変分原理* (Junger, 1952)

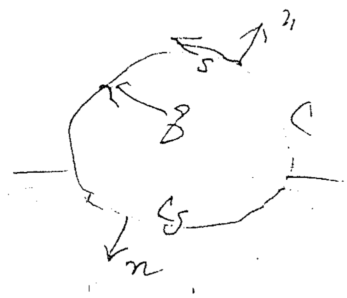
Modified Lagrangean (Morse & Feshbach)

$$L = T - S \qquad (1)$$

T: kinetic energy, S: strain energy (potential energy)

$$T = -\frac{\rho_s t \omega^2}{2} \int_C (w^2 + v^2)\, ds, \qquad (2)$$

(w と v は長さの次元をもつ物とする)



$$S = S_1 + S_2,$$

$$S_1 = \frac{EI}{2(1-\nu^2)} \int_C \left(\frac{d^2 w}{ds^2} - \kappa \frac{dv}{ds} \right)^2 ds, \qquad (3)$$

逆 sign

$$S_2 = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_C \left(\frac{dv}{ds} + \kappa w \right)^2 ds,$$

但し $\kappa = \frac{1}{a}$: 曲率

S_1は曲げ系, S_2は延び系のエネルギー

一方 水については, 今は ポテンシャルエネルギーはないので

$$L_w = T_w = \frac{\rho}{2} \iint_D (\nabla\phi)^2\, dx\, dy = \mp \frac{\rho}{2} \int_{C_S} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n}\, ds, \qquad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{C_S} = i\omega w \qquad (5)$$

$p = -\rho i \omega \phi$ おくと $\quad L_w = \frac{1}{2} \int p w\, ds \qquad (4')$

変分原理は

$$\delta\left[L + L_w - A \quad \cdots \right] = 0 \qquad (6)$$

$$A = \int_c (g_w w + g_u u)\, ds, \qquad (7)$$

$$\delta T = -\rho_s t \omega^2 \int (w\,\delta w + v\,\delta v)\, ds \qquad (8)$$

$$\delta S_1 = \frac{EI}{1-\nu^2} \int_c \left[\left\{ \frac{d^4 w}{ds^4} - \frac{d^2}{ds^2}\left(\kappa \frac{dv}{ds}\right) \right\} \delta w + \delta v \frac{d}{ds} \left\{ \kappa \left(\frac{d^2 w}{ds^2} - \kappa \frac{dv}{ds} \right) \right\} \right] ds, \qquad (9)$$

$$\delta S_2 = \frac{Et}{1-\nu^2} \int_c \left[+ \kappa\, \delta w \left(\frac{dv}{ds} + \kappa w \right) + \delta v \frac{d}{ds} \left(\frac{dv}{ds} + \kappa w \right) \right] ds, \qquad (10)$$

$$\delta L_w = \frac{1}{2} \int (w\,\delta p + p\,\delta w)\, ds = \int p\, \delta w\, ds. \qquad (11)$$

$$\delta A = \int_c (g_w\, \delta w + g_u\, \delta u)\, ds, \qquad (12)$$

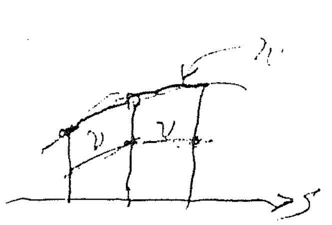
任意の δw, δu に対して (6) が成立つためには
振動方程式を満たせば成立つ事は
容易にわかろう。

勿論ここでは水の方は境界要素法による。つまり
wが与えられれば(境界上で) pが求められると考えている。

水の方も有限要素法によるならばそのラグランジアンは
(4)の2重積分をとらねばならないが今の場合水の
領域は無限にのびているので境界要素法の方が
格段に便利である。

この変分原理によって振動部分の有限要素法を
展開する事が出来よう。

その為には wはsについて2回, vは1回微分可能で
あればよいから、要素上で wはsの2次式, sは1次式
で近似しておけばよい。



水の方の境界条件(w)は要素上で一定
とし上記のwの平均値とすればよかろう。

この時水のノイマン関数があれば(解いておけば)直ちに
連立方程式が書き下せる。