M-129

No.

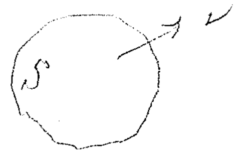
Date 61.6.22

M.B.

3次元音場

1. 無限媒体中

物体Sのまわりの放射音場を考えよう。



速度ポテンシャルϕは

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0, \quad k=\omega/c \qquad (1.1)$$

を満たし，圧力pは次式で与えられる。

$$p = -i\rho\omega\phi, \qquad (1.2)$$

境界条件は

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = i\omega w, \quad w: 変位, \qquad (1.3)$$

で与えられるものとする。

今 核関数 $S(PQ)$を

$$S(PQ) = -\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}, \quad R=\overline{PQ}, \quad P\equiv(x,y,z), \quad Q\equiv(x',y',z'), \qquad (1.4)$$

を導入してグリーンの定理より

$$\phi(Q) = \iint_S \left[\phi\frac{\partial}{\partial\nu}S(P,Q) - \frac{\partial\phi}{\partial\nu}S\right] dS(P), \qquad (1.5)$$

を得る。

遠方では

$$S(P,Q) \underset{Q\to\infty}{\doteqdot} -\frac{e^{-ikr' + \frac{ik}{r'}(xx'+yy'+zz')}}{4\pi r'}, \qquad (1.6)$$

と近似出来るから

$$\phi(Q) \underset{Q\to\infty}{\doteqdot} \frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} F(k;\theta',\varphi'), \qquad (1.7)$$

$$F(k;\theta',\varphi') = \iint_S \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu} - \phi\frac{\partial}{\partial\nu}\right) e^{ik\hat{\omega}}\, dS, \qquad (1.8)$$

ここに $\Theta = x\cos\theta' + y\sin\theta'\cos\varphi' + z\sin\theta'\sin\varphi'$

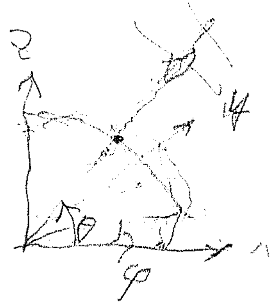
$$\left.\begin{array}{l} \Theta = x\cos\theta' + y\sin\theta'\cos\varphi' + z\sin\theta'\sin\varphi' \\ x' = r'\cos\theta',\ y' = r'\sin\theta'\cos\varphi';\ z' = r'\sin\theta'\sin\varphi' \end{array}\right\} \quad (1.9)$$

音の放射パワーは

$$P = \frac{1}{4}\iint_R \left(p\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r} + \bar{p}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$$

$$= \frac{\rho\omega k}{32\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |H|^2 \sin\theta \, d\theta \quad , \qquad (1.10)$$

さて



$$\phi_0 = c\, e^{ikr\Theta} , \qquad (1.11)$$

$$\Theta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

は θ', φ' の方向から入射して来る単位振幅の音波である。

散乱ポテンシャル ϕ_d は

$$\frac{\partial\phi_d}{\partial\nu} = -\frac{\partial\phi_0}{\partial\nu} \qquad (1.12)$$

と定義されるから，今

$$\Phi_d = \phi_0 + \phi_d \quad , \qquad (1.13)$$

とおき，可逆定理を使えば (1.8)は

$$H(k, \theta', \varphi') = \frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\Phi_d(P; \theta', \varphi')\, dS(P) , \qquad (1.14)$$

と Haskind の関係をうる。

2. 球のまわりの音場

さて極座標を導入すると

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{\pi}{2i\sqrt{rr'}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}}(kr) H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr') P_n(\cos\gamma) , \qquad (2.1)$$

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma , \quad r' > r$$

また $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$,

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') \cos m(\varphi-\varphi') , \qquad (2.2)$$

また

$$e^{ikr\cos\theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n(\cos\theta) , \qquad (2.3)$$

なる展開が出来る。

またルジャンドル関数の直交関係は

$$\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) P_\nu^m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq \nu \\ \dfrac{1}{(n+\frac{1}{2})} \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{for } n = \nu \end{cases} \qquad (2.4)$$

さて今音場が φ に関係しない帯球関数 $P_n(\cos\theta)$ で表わされる場合を考えよう。

$$\left.\frac{\partial \phi_n}{\partial r}\right|_{r=a} = i\omega P_n(\cos\theta) , \qquad (2.5)$$

そのような ϕ は明らかに

$$\phi_n = i \frac{c}{\sqrt{kr}} \frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n(\cos\theta)}{\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)}{\sqrt{z}}\right)\right|_{z=ka}} \qquad (2.6)$$

Sommerfeld の定義では

$$\psi_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(z)\ ,\quad \zeta_n^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)\ , \qquad (2.7)$$

これを使うと

$$\phi_n = -c\,\mathfrak{z}_n(ka)P_n(\cos\theta)\ , \qquad (2.6)$$

$$\mathfrak{z}_n(ka) = -i\,\frac{\zeta_n^{(2)}(ka)}{\frac{d}{d(ka)}\zeta_n^{(2)}(ka)}\ , \qquad (2.8)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{z}_n(ka) &\xrightarrow[ka\gg 1]{} 1 \\ \mathfrak{z}_n(ka) &\xrightarrow[ka\to 0]{} \frac{ika}{n+1} \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

$$p_n\Big|_{r=a} = -i\rho\omega\phi_n = i\rho\omega c\,\mathfrak{z}_n(ka)P_n(\cos\theta)\ , \qquad (2.10)$$

これを $\quad p_n\Big|_{r=a} = (R_n + i\omega M_n)\,i\omega P_n(\cos\theta)\ , \qquad (2.10')$

と書くと $\quad R_n + i\omega M_n = \rho c\,\mathfrak{z}_n \qquad (2.11)$

(2.9)より

$$\left.\begin{aligned} R_n &\xrightarrow[ka\gg 1]{} \rho c \\ M_n &\xrightarrow[ka\to 0]{} \frac{\rho a}{n+1} \end{aligned}\right\} \cdots \qquad (2.12)$$

それな放射率 η_r は

$$\eta_r = \frac{R_n}{\rho c} = \mathrm{Re}\{\mathfrak{z}_n\} \xrightarrow[ka\gg 1]{} 1\ , \qquad (2.13)$$

としてよい。 $\quad \left(\eta_r = \mathrm{Re}\iint p\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial r}dS \Big/ \iint\left|\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|^2 dS\right)$

附加質量の表現は理想流体の時の剛体運動とは少々

異なっているが次のようにすると、

$$\mathrm{Re}\iint p_n\Big|_{r=a} P_n(\cos\theta)\,dS = -\frac{\omega^2 M_n \cdot 4\pi a^2}{2n+1} \xrightarrow[ka\to 0]{} \frac{-\omega^2 4\pi\rho a^3}{(n+1)(2n+1)}$$

$$\xrightarrow[n=1]{} -\frac{2}{3}\omega^2\rho\pi a^3 = -\frac{\rho\omega^2}{2}V, \quad \cdots \quad (2.14)$$

となって剛体平行運動のものに一致する。

何れにしても今

$$M_n/\rho a = \mu_n \qquad (2.15)$$

と定義すれば(2.11), (2.13)と合せて

$$\left.\begin{aligned} \zeta_n &= \theta_r + ika\,\mu_n, \\ \theta_r &\xrightarrow[ka\gg 1]{} 1, \qquad \mu_n \xrightarrow[ka\to 0]{} \frac{1}{n+1} \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

振動については Junger (J. Applied Mechanics 1952) でとかれており

この ζ_n は彼の $\zeta_n = \theta_n + j\chi_n$ に等しい。

さてコッチン関数は

$$\zeta_n^{(2)}(z) \xrightarrow[z\gg1]{} \frac{i^{n+1}}{z} e^{-iz}$$

故(2.6)より

$$\Phi_n \xrightarrow[kr\gg1]{} -\frac{i^n c\, e^{-ikr} P_n(\cos\theta)}{kr\left[\frac{d}{dz}\zeta^{(2)}(z)\right]_{z=ka}} , \quad \cdots (2.17)$$

故(1.7)の定義より

$$F_n(k,\theta) = -\frac{4\pi c}{k} \frac{i^n P_n(\cos\theta)}{\left[\frac{d}{dz}\zeta^{(2)}(z)\right]_{z=ka}} , \quad (2.18)$$

(1.10)より

$$P = \frac{\rho c \omega^2}{2}\left(\frac{4\pi a^2}{2n+1}\right)\frac{1}{k^2 a^2\left|\left[\frac{d}{dz}\zeta_n^{(2)}\right]\right|^2} , \quad (2.19)$$

$$\eta_r = P\Big/\frac{\rho c \omega^2 a^2}{2}\iint P_n^2(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{P}{\frac{2\pi\rho c\omega^2 a^2}{(2n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\left|ka\left[\frac{d}{dz}\zeta_n^{(2)}\right]\right|^2} , \quad \cdots\cdots (2.20)$$

一方(2.13)でも η_r は与えられているのでこれは等しくなければならない。

$$\mathrm{Re}\{\beta_n\} = \frac{1}{\left|ka\left[\frac{d}{dz}\zeta_n^{(2)}\right]_{z=ka}\right|^2} , \quad (2.21)$$

ベッセル関数の公式によってこれが成立つ事がわかる。

θ=0 の方向からの入射波は (2.3) のように展開出来る故、

散乱ポテンシャルは

$$\phi_d = -c\sum_{0}^{\infty} i^n(2n+1)\frac{\psi_n'(ka)}{\zeta_n^{(2)\prime}(ka)}\zeta_n^{(2)}(kr)P_n(\cos\theta) \qquad (2.22)$$

$$\left.\frac{\partial\phi_d}{\partial r}\right|_{r=a} = -c\sum i^n(2n+1)\psi_n'(ka)P_n(\cos\theta)$$

$$= -c\left.\frac{\partial}{\partial r}e^{ikr\cos\theta}\right|_{r=a} \qquad (2.23)$$

$$\therefore\ \Phi_a = ce^{ikr\cos\theta} + \phi_d = c\sum_{0}^{\infty}\frac{i^n(2n+1)}{\zeta_n^{(2)\prime}(ka)}P_n(\cos\theta)\left\{\psi_n(kr)\zeta_n^{(2)\prime}(ka) - \psi_n'(ka)\zeta_n^{(2)}(kr)\right\} \qquad (2.24)$$

$$\left.\Phi_a\right|_{r=a} = -ic\sum_{0}\frac{i^n(2n+1)}{(ka)^2\zeta_n^{(2)\prime}(ka)}P_n(\cos\theta), \qquad (2.25)$$

3. 水の上の無限平板 * Sakurai

x-y 面に板があり，$z \geq 0$ が水とする。

音場は

$$\phi(Q) = \frac{i\omega}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{w}{R} e^{-ikR} dx\,dy \quad , \qquad (3.1)$$

$G(P,Q) = \frac{e^{-ikR}}{2\pi R}$ ↳ 鏡像

ここに w は板の変位とする。

よって

$$p(Q) = \frac{\rho\omega^2}{2\pi} \iint \frac{w}{R} e^{-ikR} dx\,dy \quad , \qquad (3.2)$$

ここで

$$W(p,q) = \iint_{-\infty}^{\infty} w(x,y)\, e^{i(px+qy)} dx\,dy \, , \qquad (3.3)$$

とすると

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint W(p,q)\, e^{-i(px+qy)} dp\,dq \, . \qquad (3.4)$$

さて

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

$$I = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikR + i(px'+qy')}}{R} dx'\,dy' = e^{i(px+qy)} \iint^{\infty} \frac{e^{-ikR - i(p(x-x')+q(y-y'))}}{R} R\,dR\,d\alpha$$

$R\,dR\,d\alpha \Longrightarrow dx'dy'$, $p = \kappa\cos\theta$, $q = \kappa\sin\theta$,

$x - x' = R\cos\alpha$, $y - y' = R\sin\alpha$.

$$I = e^{i(px+qy)} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \int_0^{\infty} e^{-ikR - i\kappa R\cos(\theta-\alpha)} dR =$$

$$= 2\pi e^{i(px+qy)} \int_0^{\infty} e^{-ikR} J_0(\kappa R)\, dR = \begin{cases} \dfrac{2\pi e^{i(px+qy)}}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}, & \kappa > k \\ \dfrac{2\pi e^{i(px+qy)}}{i\sqrt{k^2 - \kappa^2}}, & \kappa < k \end{cases} \qquad (3.5)$$

故に

$$\iint_{-\infty}^{\infty} p(\alpha)\, e^{i(px'+qy')}\, dx'dy' = \begin{cases} \dfrac{2\pi\, W(p,q)}{\sqrt{\kappa^2-k^2}}, & \text{for } \kappa > k \\[2ex] \dfrac{2\pi\, W(p,q)}{i\sqrt{k^2-\kappa^2}} & \text{for } k > \kappa \end{cases} \qquad (3.6)$$

そして振動方程式は

$$-\rho_s \omega^2 w + EI\Delta^2 w = p + Q\,\delta(0), \qquad (3.7)$$

これをフーリエ変換すると

$$\left[-\omega^2 \rho_s + EI(p^2+q^2)^2 - \begin{Bmatrix} \dfrac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2-k^2}} \\[1ex] \dfrac{2\pi}{i\sqrt{k^2-\kappa^2}} \end{Bmatrix}\right] W(p,q) = Q$$

つまり

$$W(p,q) = \frac{Q}{EI\kappa^4 - \rho_s\omega^2 - \begin{Bmatrix} \dfrac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2-k^2}} \\[1ex] \dfrac{2\pi}{i\sqrt{k^2-\kappa^2}} \end{Bmatrix}}, \qquad (3.8)$$

一方

$$\iint f\bar{g}\, dxdy = \iint F\bar{G}\, dpdq = \iint F\bar{G}\, \kappa\, d\kappa\, d\alpha$$

なる関係があるから放射パワーは

$$P = \frac{1}{4}\iint \left(\bar{p}\, i\omega w - p\, i\omega \bar{w}\right) dxdy = 2\pi^2\omega \int_0^{k} |W|^2 \frac{\kappa\, d\kappa}{\sqrt{k^2-\kappa^2}}, \qquad (3.9)$$

4. 球殻の振動（Junger 論文の補足）

半径 a，厚み t の球殻の歪エネルギーは

$$S = \frac{\pi E t a^2}{1-\nu^2}\int_0^{\pi}\left[(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi)^2 - 2(1-\nu)\varepsilon_\theta\varepsilon_\varphi\right]\sin\theta\, d\theta, \qquad (4.1)$$

ここに φ方向の変位は一定とすると

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{w}{a}\\ \varepsilon_\varphi &= \frac{v}{a}\cot\theta + \frac{w}{a}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots \qquad \text{(Love)}\ (4.2)$$

ここに w は法線方向，v は接線方向の変位とする。

さて

$$a^2\left[(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi)^2 - 2(1-\nu)\varepsilon_\theta\varepsilon_\varphi\right] = a^2\left[(\varepsilon_\theta-\varepsilon_\varphi)^2 + 2(1+\nu)\varepsilon_\theta\varepsilon_\varphi\right]$$

$$= (v' - v\cot\theta)^2 + 2(1+\nu)(w+v')(w+v\cot\theta)$$

（′ は θ に関する微分とする）

$(1+\nu) - 2$

$$= \left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(v\sin\theta)\right\}^2 - 4vv'\cot\theta + 2(1+\nu)\left\{w^2 + \frac{w}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(v\sin\theta) + vv'\cot\theta\right\}$$

$$= 2(1+\nu)\left\{w^2 + \frac{w}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(v\sin\theta)\right\} + (\nu-1)(v^2)'\cot\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d}{d\theta}(v\sin\theta)\right)^2, \qquad (4.3)$$

所で

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\pi} w\frac{d}{d\theta}(v\sin\theta)\,d\theta &= -\int_0^{\pi} v\sin\theta\, w'\, d\theta,\\ \int_0^{\pi}(v^2)'\cos\theta\, d\theta &= +\int_0^{\pi} v^2\sin\theta\, d\theta,\\ \int_0^{\pi}\frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{d}{d\theta}(v\sin\theta)\right\}^2 d\theta &= -\int_0^{\pi} v\sin\theta\,\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(v\sin\theta)\right\}d\theta\end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

$\{v' + v\cot\theta\}$

$v'' + v'\cot\theta - \dfrac{v}{\sin^2\theta}$

ここで w は $P_n(\cos\theta)$, v は $P_n^1(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)$ [Jungerのと定義が異なる]

で表わされ, v は次式を満足する.

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{dv}{d\theta}\cot\theta + \left[n(n+1) - \frac{1}{\sin^2\theta}\right]v = 0, \quad \cdots (4.5)$$

補足

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(v\sin\theta)\right\} = v'' + \frac{d}{d\theta}(v\cot\theta)$$

$$= v'' + v'\cot\theta - \frac{v}{\sin^2\theta} = -n(n+1)v, \quad (4.6)$$

つまり

$$\int_0^\pi \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{d}{d\theta}(v\sin\theta)\right)^2 d\theta = n(n+1)\int_0^\pi v^2\sin\theta\, d\theta, \quad \cdots (4.7)$$

これらを(4.1)に代入すると

$$S = \frac{\pi E t}{1-\nu^2}\int_0^\pi \left[2(1+\nu)(w^2 - v w') + (\nu-1)v^2 + n(n+1)v^2\right]\sin\theta\, d\theta, \quad (4.8)$$

$$\left.\begin{aligned} w &= \sum a_n P_n(\cos\theta) \\ v &= \sum b_n P_n^1(\cos\theta), \end{aligned}\right\} (4.9)$$

と展開し, 直交関係

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)P_\nu^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \end{array}\right\} \quad \cdots (4.10)$$

を適用すれば (4.8)は直ちに積分出来て

$$S = \frac{\pi t E}{1-\nu^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left[2(1+\nu)\{a_n^2 - n(n+1)a_n b_n\} + \{n(n+1) - (1-\nu)\}n(n+1)b_n^2\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\partial S}{\partial a_n} = \frac{\pi t E}{(1-\nu^2)(n+\frac{1}{2})}\Big[2(1+\nu)\{2a_n - n(n+1)b_n\}\Big]$$

$$\frac{\partial S}{\partial b_n} = \frac{\pi t E}{(1-\nu^2)(n+\frac{1}{2})}\Big[-2(1+\nu)(n+1)n\,a_n + 2n(n+1)\{n(n+1) - (1-\nu)\}\,b_n\Big]$$

$$= \frac{4\pi t E\, n(n+1)}{(1-\nu)(2n+1)}\Big[-a_n + \frac{n(n+1) - (1-\nu)}{1+\nu}\,b_n\Big]. \qquad (4.11)$$

一方運動エネルギーは

$$T = \pi \rho_s t a^2 \omega^2 \int_0^{\pi} (u^2 + v^2) \sin\theta \, d\theta.$$

$$= -\pi \rho_s t a^2 \omega^2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \left\{ a_n^2 + n(n+1) b_n^2 \right\} \qquad (4.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial a_n} = -\frac{4\pi \rho_s t a^2 \omega^2}{2n+1}\, a_n$$

$$\frac{\partial T}{\partial b_n} = -\frac{4\pi \rho_s t a^2 \omega^2\, n(n+1)}{(2n+1)}\, b_n \qquad (4.13)$$

これらはJungerの結果と一致する。

5. 相似則

幾何学的に相似な振動体が水中又は水上で振動している時の相似則を考えよう。

小さい方に下添字M，大きい方にSをつけて区別する。さて．振動が相似である為には振巾等を長さ(L)の次元で割った無次元量に関する支配方程式の係数が等しければよい。

あるいはまた変分原理によって方程式を導くと考えれば，ラグランジャンの各項の比率が等しければよい。

後者によればまず物体振動の方では．

$$L = T - S \qquad (5.1)$$

$$T \propto \rho_s \omega^2 L^5 \qquad (5.2)$$

$$S \propto E L^3 , \qquad (5.3)$$

一方水の方は

$$L_w \propto \rho \omega c L^4 = \rho c^2 L^3 (kL) ,\ k = \frac{\omega}{c} , \qquad (5.4)$$

となるが明らかに音場が相似である為には先ず

$$k_M L_M = k_S L_S , \quad \frac{L_M}{\lambda_M} = \frac{L_S}{\lambda_S} \qquad (5.5)$$

λは音波長とする。

でなければならないから、この仮定の下では

$$L_W \propto \rho c^2 L^3 \quad , \qquad \text{---} (5.4')$$

それ故

$$\left.\begin{aligned} \frac{I}{L_W} &= \frac{\rho_S}{\rho}\cdot\frac{\omega^2 L^2}{c^2} = \frac{\rho_S}{\rho}(kL)^2 , \\ \frac{S}{L_W} &= \frac{E}{\rho c^2} , \end{aligned}\right\} \quad (5.5)$$

が夫々模型と実物で等しければよい。

流体は水を使うとすると結局比重もヤング率も実物と同じでなければならない事になる。

この時相当する周波数は

$$f_M = f_S\left(\frac{L_S}{L_M}\right) , \qquad (5.6)$$

起振力は

$$\frac{Q_M}{\rho c^2 L_M^2} = \frac{Q_S}{\rho c^2 L_S^2} , \quad Q_M = Q_S\left(\frac{L_M}{L_S}\right)^2 , \qquad (5.7)$$

変位、板厚等は幾何学的に相似と最初に仮定した。

(5.6)と合せると変位速度は、対応周波数で

$$\dot{w}_M = \dot{w}_S \quad \text{at } f_M = f_S\left(\frac{L_S}{L_M}\right) , \qquad (5.8)$$

No. 1

Date 61.6.15

M.B.

変分原理*(Junger, 1952)

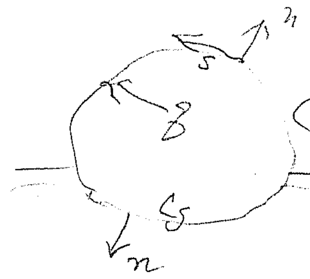
Modified Lagrangean (Morse & Feshbach)

$$L = T - S \qquad (1)$$

T: Kinetic energy, S: strain energy (potential energy)

$$T = -\rho_s t \frac{\omega^2}{2}\int_C (w^2+v^2)\,ds, \qquad (2)$$

(wとvは長さの次元をもつ量とする)



$$S = S_1 + S_2,$$

$$S_1 = \frac{EI}{2(1-\nu^2)}\int_C \left(\frac{d^2w}{ds^2} - \kappa\frac{dv}{ds}\right)^2 ds,$$

逆 sign

$$S_2 = \frac{Et}{2(1-\nu^2)}\int_C \left(\frac{dv}{ds} + \kappa w\right)^2 ds, \qquad (3)$$

但し $\kappa = \frac{1}{a}$: 曲率

S_1は曲げ系, S_2は延び系のエネルギー

一方 水については, 今は ポテンシャルエネルギーはないので

$$L_w = T_w = \frac{\rho}{2}\iint_D (\nabla\phi)^2\,dx\,dy = \frac{\rho}{2}\int_{C_s}\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds, \qquad (4)$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{C_s} = i\omega w \qquad (5)$$

$p = -\rho i\omega\phi$ より $\quad L_w = \frac{1}{2}\int p\,w\,ds \qquad (4')$

変分原理は

$$\delta\left[L + L_w - A \qquad \right] = 0 \tag{6}$$

$$A = \int_c (q_w w + q_u u)\,ds, \tag{7}$$

$$\delta T = -\rho_s t \omega^2 \int (w\,\delta w + v\,\delta v)\,ds \tag{8}$$

$$\delta S_1 = \frac{EI}{1-\nu^2}\int_c \left[\left\{\frac{d^4 w}{ds^4} - \frac{d^2}{ds^2}\left(\kappa\frac{dv}{ds}\right)\right\}\delta w + \delta v\,\frac{d}{ds}\left\{\kappa\left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \kappa\frac{dv}{ds}\right)\right\}\right] ds, \tag{9}$$

$$\delta S_2 = \frac{Et}{1-\nu^2}\int_c \left[+\kappa\,\delta w\left(\frac{dv}{ds} + \kappa w\right) + \delta v\,\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds} + \kappa w\right)\right] ds. \tag{10}$$

$$\delta L_w = \frac{1}{2}\int (w\,\delta p + p\,\delta w)\,ds = \int p\,\delta w\,ds. \tag{11}$$

$$\delta A = \int_c (q_w\,\delta w + q_u\,\delta u)\,ds, \tag{12}$$

任意のδw, δu, に対して (6)が成立つためには振動方程式を満たせば成立つ事は容易にわかろう。

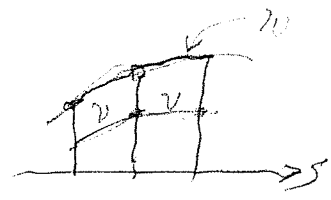
分論 こゝでは水の方は境界要素法による，つまり w が与えられれば（境界上で）p が求められると考えている。

水の方も有限要素法によるならばそのラグランジアンは (4) の2重積分をとらねばならないが今の場合水の領域は無限にのびているので境界要素法の方が格段に便利である。

この変分原理によって振動部分の有限要素法を展開する事が出来よう。

その為には w は s について2回，v は1回微分可能であればよいから，要素上で w は s の2次式，v は1次式で近似しておけばよい。

水の方の境界条件 w は要素上で一定，とし上記の w の平均値とすればよかろう。



この時水のノイマン関数があれば（解いておけば）直ちに連立方程式が書き下せる。