A　　M-63

No.
Date 54.9.14

音波の散乱における相反定理

別所正利

内容

概要

水の上に浮んでいる物体が波を受けて動揺する場合は所謂ハスキントの関係と言う定理[5,11]があって波の強制力がその力の方向に物体が振動した場合のRadiation波の振幅に等しく、この関係を利用して動揺の少ない浮体を設計する事が出来[7]、またエネルギー収支を表わす関係を用いて消波装置設計の理論的基礎を得た[8]。

地震波についても同様な事が考えられその理論式は一応出来たが[10]従来この種の研究はないようなので実用上の見込みはわからない。

音波の反射散乱については普通は物体に比して波長が充分短かいのでめざましい応用はあまり考えられないがこの種の定理についての明確な記述は手元の参考書類に見あたらないのでまとめて見たものである。

簡単の為に2次元問題のみを採り上げたがこの時は浅水波の理論と全く同じである。また3次元でも同じような定理が成立つ事はいうまでもない。

1. 速度ポテンシャルと境界条件[1)2)]

速度ポテンシャルをϕとすると速度は

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x},\ v=\frac{\partial\phi}{\partial y},\ \cdots \qquad (1.1)$$

圧力の変動分をpとし平均密度をρ_0とすると

ベルヌーイの定理により

$$\frac{p}{\rho_0}=c^2 s=-\frac{\partial\phi}{\partial t},\ c\ \text{音速} \cdots \qquad (1.2)$$

連続の方程式から

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\Delta\phi,\quad \Delta\text{:ラプラシアン} \cdots \qquad (1.3)$$

これをフーリエ変換して周波数面で考える事にする。あるいは換言して円周波数ωで正弦運動をする場合を考え、すべての量を複素表示する事とし必要な場合以外は時間要素$e^{i\omega t}$を省略して考える事とする。

そうすると、(1.1)はそのままで(1.2)、(1.3)は

$$\frac{p}{\rho_0}=-i\omega\phi,\ \cdots \qquad (1.4)$$

$$(\Delta+k^2)\phi(x,y)=0,\quad k=\frac{\omega}{c},\qquad (1.5)$$

φの境界条件は 水中の気泡表面とか 自由表面の場合は (1.4) より

$$\phi = 0 \text{ or given value.} \quad \text{---} \quad (1.6)$$

であるが 固体表面では一般に その法線速度が与えられる。

固体が剛体的に運動する場合は 夫々の振幅を X_j とすると 1)

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = i\omega X_j \frac{\partial x_j}{\partial n} , \quad \text{---} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial n} \equiv \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial n} \equiv \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial n} = x\frac{\partial y}{\partial n} - y\frac{\partial x}{\partial n},$$

弾性的に振動する場合も 夫々の振動モードの 振巾を X_j 法線速度を v_j とすると

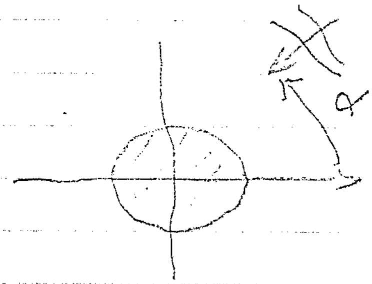
$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = i\omega X_j v_j , \quad \text{---} \quad (1.8)$$

のように書く事が出来る。

以上の他に 入射波 ϕ_0 の散乱ポテンシャルがあって それを ϕ_d とすると 固体壁の場合は (1.7), (1.8) に照応して

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_d = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n}, \quad \cdots \quad (1.9)$$

のように定義しておく。



図のように α 方向から入射する平面波は（単位変位振幅）

$$\phi_0(x,y;\alpha) = c\, e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}, \quad \cdots \quad (1.10)$$

実際には (1.7), (1.8), (1.9) による各ポテンシャルの重ね合せで流体運動が表現出来る。

解析的にはこれらのポテンシャルの境界条件を規準化して次のようにおくと便利な事がある。

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \frac{\partial x_j}{\partial n} \text{ or } n_j, \quad \cdots \quad (1.11)$$

この時右辺は実数値を採るとしても一般性を損わない。

文献では $\varphi_0(x,y,\alpha) = e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}$, (1.12)

$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi_d = -\frac{\partial}{\partial n}\varphi_0, \quad (1.13)$$

としておこう。

2. 相反定理

今勝手な2つの無限遠方で正則な速度ポテンシャル，ϕ, ψ，について次のような2種類の双一次形式を導入しよう。

$$L^*(\phi,\psi) = \iint_D \left[\nabla\phi\nabla\psi + k^2\phi\psi\right] dxdy, \qquad (2.1)$$

$$L(\phi,\psi) = \iint_D \left[\nabla\phi\nabla\overline{\psi} + k^2\phi\overline{\psi}\right] dxdy, \qquad (2.2)$$

まず

$$L^*(\phi,\psi) = L^*(\psi,\phi), \qquad (2.3)$$

$$L(\phi,\psi) = \overline{L(\psi,\phi)}, \qquad (2.4)$$

ここに上棒は複素共役値をとる事を示す。

所でまずグリーンの定理より(2.1)は

$$L^*(\phi,\psi) = -\int_C \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds = -\int_C \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}ds, \qquad (2.5)$$

(2.2)は実は無限大領域では積分が不定になっていて，DをCと充分大きい半径aの円周で囲まれた領域と考えておくべきである。

そうすると(A.4)により，

$$L(\phi,\psi) = -\int_C \phi\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n}ds + \frac{i}{8\pi}\int_0^{2\pi} H_\phi(k,\theta)\overline{H_\psi(k,\theta)}d\theta, \qquad (2.6)$$

それから (2.4) により

$$-\int_C \overline{\Psi}\frac{\partial\phi}{\partial n}ds + \frac{i}{8\pi}\int_0^{2\pi}\overline{H_\phi(k,\theta)}H_\psi(k,\theta)d\theta$$

$$= -\int_C \phi\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial n}ds - \frac{i}{8\pi}\int_0^{2\pi}H_\phi(k,\theta)\overline{H_\psi(k,\theta)}d\theta,$$

or

$$\int_C\left(\phi\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial n} - \overline{\Psi}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)ds$$

$$= \frac{1}{8\pi i}\int_0^{2\pi}\left[H_\phi(k,\theta)\overline{H_\psi}(k,\theta) + \overline{H_\phi}H_\psi\right]d\theta, \tag{2.7}$$

この式で特に $\phi=\psi$ ならば C 上で物体がなした仕事は発散する波のエネルギーに等しい事を示している。又 (2.2) は周波数面における Lagrangean Density[2)] の積分であり (2.1) はそれを modify したものであるから これらの汎関数から ハミルトンの原理により運動方程式を導いても良いし，又境界値問題の変分原理を導く事も出来る。[2)]

3. ハスキンドの関係 5)11)

相反定理(2.5)における積分は附録Bに見るように物体に働く一般力を表わしているから まず(B.9)による f_{ij} は

$$f_{i,j} = f_{j,i} \quad , \quad \cdots \quad (3.1)$$

次に

$$i\omega\int \phi_d v_j \, ds = \int \phi_j \frac{\partial \phi_d}{\partial n} ds = -\int_C \phi_j \frac{\partial \phi_0}{\partial n} ds,$$

$$\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = i\omega v_j\right)$$

であるから (B.8)から波の強制力(一般力)は (A.5)を使って

$$\frac{E_j}{\rho_0} = \int_C \left(\phi_j \frac{\partial \phi_0}{\partial n} - \phi_0 \frac{\partial \phi_j}{\partial n}\right) ds = c H_j(k, \theta), \quad (3.2)$$

となり，波の強制力は C の変位が v_j であるような発散(Radiation)ポテンシャルの発散波の振幅に等しい。

この関係を用いれば散乱ポテンシャルを計算する事なく波の強制力は発散ポテンシャルから計算出来る。

また w_j モードの振動によって $\hat{\alpha}$ 方向の発散波の振幅が0ならばその方向からの入射波に対して波の強制力はない事になり、もし他のモードの振動との連成がなくまた減衰が0でなければそのモードの振動振幅は0となる。[7]

4. 仕事積分

もう一つの相反定理(2.7)は物体表面でなされる仕事に関するものでまず

$$\int_C \left(\phi \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} - \bar{\Phi} \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) ds = \frac{1}{4\pi k}\int_0^{2\pi} \left|H(k,\theta)\right|^2 d\theta, \quad \cdots (4.1)$$ [2)]

又(2.7)の形のまゝで(3.1)のような力の係数の間の波による減衰の相反性を与える。

次にφが散乱ポテンシャルである場合を考え、かつ(1.11)のような実数値の境界条件をもつφを考えて見よう。

(1.12)から

$$\overline{\varphi_0(x,y;\alpha)} = e^{-ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}$$

$$= \varphi_0(x,y;\pi+\alpha), \quad \cdots (4.2)$$

であるから

$$\bar{\varphi}\frac{\partial \varphi_d}{\partial n} - \varphi_d\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = \bar{\varphi}\frac{\partial \varphi_d}{\partial n} + \varphi_0\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} - (\varphi_0 + \varphi_d)\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}$$

$$= \left\{\varphi_0(x,y;\alpha)\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} - \bar{\varphi}\frac{\partial}{\partial n}\varphi_0(x,y;\alpha)\right\} - (\varphi_0 + \varphi_d)\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}$$

$$= \overline{\left\{\varphi_0(x,y;\pi+\alpha)\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \varphi(\pi+\alpha)}{\partial n}\right\}} - (\varphi_0 + \varphi_d)\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n}$$

なるから

$$\overline{H(k,\alpha)} - \overline{H(k,\pi+\alpha)} = \frac{R_e}{4\pi i}\int_0^{2\pi} H_d(k,\theta,\alpha)\,\overline{H}(k,\theta)\,d\theta, \quad \cdots (4.3)$$

のような関係がある。

特に φ も又散乱ポテンシャルならば

$$H_d(k;\beta+\pi,\beta) - H_d(k;\alpha,\pi+\beta)$$

$$= \frac{1}{4\pi i} R_e \int_0^{2\pi} H_d(k,\theta,\alpha)\,\overline{H_d(k,\theta,\beta)}\,d\theta, \quad (4.4)$$

となり これは Scattering area に関する公式である[2]。

これらは発散波と散乱波の間に関係がある事を示すがもっと直接的には附録 C, (C.4) の関係があるので それを積分すると同じ式が出て来る。

5. 円筒[1)2)3)4)]

半径 a の円筒が x 軸の正方向から波を受けている場合はよく知られているように

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \cos j\theta \quad \cdots (5.1)$$

ならば

$$\varphi_j = \frac{H_j(kr)}{k H_j'(ka)} \cos j\theta \quad , \cdots (5.2)$$

但し $H_j(kr) = J_j(kr) - i Y_j(kr)$

なお上下非対称な振動は考えない事にする。

入射波は

$$\varphi_i = e^{ikx} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(kr) \cos n\theta , \quad (5.3)$$

であるから

$$\varphi_d = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{J_n'(ka)}{h_n'(ka)} h_n(kr) \cos n\theta , \quad (5.4)$$

$$= k \sum_{n=0} i^n \varepsilon_n J_n'(ka) \varphi_n(r, \theta) , \quad \cdots (5.4)$$

$$h_n(kr) \underset{kr \gg 1}{\doteqdot} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4}) + \frac{n\pi}{2} i}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(r, \theta) &\doteqdot \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{\pi k r}} \frac{i^n e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})}}{h_n'(ka)} \cos n\theta , \\ \varphi_d &\doteqdot \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=0} (-1)^n \varepsilon_n \frac{J_n'(ka)}{h_n'(ka)} \cos n\theta . \end{aligned}\right\} (5.5)$$

(A·5)

(A·4) の定義より

$$H_n(k,\theta) = \frac{4 i^{n-1} \cos n\theta}{k\, h_n'(ka)}, \cdots \qquad (5\cdot6)$$

$$H_d(k,\theta) = k \sum_n i^n \varepsilon_n J_n'(ka)\, H_n(k,\theta)$$

$$= \frac{4}{i} \sum_{n=0} \varepsilon_n (-)^n \frac{J_n'(ka)}{h_n'(ka)} \cos n\theta, \qquad (5\cdot7)$$

それ故 φ_n の振幅が $i\omega X_n$ であるならば

θ-方向への全反射波振幅 A は

$$A = H_d(k,\theta) + i\omega \sum_n X_n H_n(k,\theta)$$

$$= \frac{4}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon_n (-)^n \frac{J_n'(ka)}{h_n'(ka)} - \frac{\omega X_n i^n}{k\, h_n'(ka)} \right] \cos n\theta, \qquad (5\cdot8)$$

それ故

$$X_n = -\frac{k}{\omega} i^n \varepsilon_n J_n'(ka), \cdots \qquad (5\cdot9)$$

ならば

$$A = 0,$$

も φ_n なる振動が入射波に誘起されるもので (B·11) のように表わされるならば (5·2) を参照して

$$i\omega X_n = \frac{\rho_0 H_n(k,0)}{Z_n} \quad , \cdots \quad (5.10)?$$

だから

$$Z_n = \rho_0 \frac{4}{k}\frac{i^{n-1}}{h_n'(ka)} \Big/ \left[-\frac{i^{n+1}k}{\omega}\varepsilon_n J_n'(ka)\right]$$

$$= \frac{4\rho_0\omega}{k^2\varepsilon_n J_n'(ka)\, h_n'(ka)} \quad , \cdots \quad (5.11)?$$

また $\theta=0, \pi$ の反射波が 0 になるためには X_0, X_1 を考えて

$$\left.\begin{aligned} H_d(k,0) + i\omega\{X_0 H_0(k,0) + X_1 H_1(k,0)\} &= 0 \\ H_d(k,\pi) + i\omega\{X_0 H_0(k,\pi) + X_1 H_1(k,\pi)\} &= 0 \end{aligned}\right\} (5.12)$$

であればよいが(5.6)によりこれはまた次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} H_d(k,0) + H_d(k,\pi) + 2i\omega X_0 H_0(k,0) &= 0 \\ H_d(k,0) - H_d(k,\pi) + 2i\omega X_1 H_1(k,0) &= 0 \end{aligned}\right\} (5.12')$$

参考文献

(1) H. Lamb "Hydrodynamics" 6th ed. Cambridge, 1932.

(2) P. M. Morse and H. Feshbach "Methods of Theoretical Physics, Part I and 2, McGraw-Hill, 1953.

(3) J. W. Strutt and Lord Rayleigh; "The theory of sound" in 2 vol. 1926., Dover. Pub.

(4) 伊藤毅「音響工学原論」上,下, 昭和32年, コロナ社

(5) M. D. Haskind "波の強制力と喫水変化」 日本造船学会誌 467号 昭和43年5月(訳), Izves. Nauk C.C.C.P. Otd. Tech. Nauk, No. 7, 1957

(6) R. P. Banaugh "Diffraction of Steady Acoustic Waves by Surface of Arbitrary Shape, J. of the Acoustical Soc. of America, vol. 35 No. 10, Oct. 1963.

7) 元良誠三, 小山健夫「Heavingの強制力を受けない船型について」日本造船学会 論文集 117号 昭和40年

8) 加藤直三 他「消波装置の基礎的研究」 日本造船学会 論文集 136号 昭和49年.

9) 別所正利「逆時間速度ポテンシャルについて」 関西造船協会誌 159号 昭和50年12月

10) 別所正利「弾性波の散乱におけるハスキンドの関係」 昭和54年7月 (未刊メモ)

11) G. Chertock, "General Reciprocity Relation"

附録A 速度ポテンシャルの表現

よく知れているように[1)2)6)]

$$\phi(Q) = \int_C \left[\phi(P)\frac{\partial}{\partial n}S(P,Q) - \frac{\partial\phi}{\partial n}S(P,Q)\right]ds(P), \quad (A\cdot1)$$

$$S(P,Q) = \frac{i}{4}H_0^{(2)}(kR), \quad R=\overline{PQ} \quad (A\cdot2)$$

$H_0^{(2)}$はハンケル関数であり

$$\left.\begin{aligned} S(P,Q) &\xrightarrow[P\to Q]{} \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{\gamma k}{2}R\right), \\ &\xrightarrow[R\gg1]{} \frac{i}{2\sqrt{2\pi kR}}e^{-ikR+\frac{\pi}{4}i}, \end{aligned}\right\} \quad (A\cdot3)$$

であるから

$$\phi(Q) \xrightarrow[Q\to\infty]{} \frac{i}{2\sqrt{2\pi kr'}}H(k,\theta)e^{-ikr'+\frac{\pi}{4}i}, \quad (A\cdot4)$$

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2}, \quad x'=r'\cos\theta', \ y'=r'\sin\theta', \ Q\equiv(x',y')$$

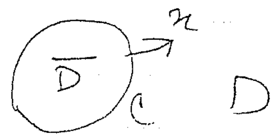
$$H(k,\theta) = \int_C \left\{\phi\frac{\partial e^{ik\bar{\omega}}}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}e^{ik\bar{\omega}}\right\}ds(P), \quad (A\cdot5)$$

$$\bar{\omega} = x\cos\theta' + y\sin\theta', \quad P\equiv(x,y), \quad x=r\cos\theta, \ y=r\sin\theta$$

(A·1)はまた吹出しもしくは2重吹出し分布で表現する事も出来る。

これを誘導してみよう。

今考えている領域Dは無限遠点を含むものとし，物体で囲まれた領域を $\bar{D}$ としよう。



$\bar{D}$ においても (A.1) と同様な表現は可能であるから

$$\phi_i(Q) = -\int_C \left[\phi_i \frac{\partial}{\partial n} S - \frac{\partial \phi_i}{\partial n} S\right] ds(P), \quad \cdots (A.6)$$

Qが D にある時は

$$\phi_i(Q) = 0 \quad , \quad Q \in D \quad , \quad \cdots (A.7)$$

それ故

$$\phi(Q) = \phi_i(Q) \quad \text{on } C \quad , \quad \cdots (A.8)$$

のように $\bar{D}$ における ϕ_i を採ると (A.1) と (A.6) を加え合せて

$$\phi(Q) = \int_C \sigma(P) S(P,Q)\, ds(P), \quad \cdots (A.9)$$

$$\sigma(P) = \frac{\partial \phi_i}{\partial n}\Big|_C - \frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_C \qquad (A.10)$$

又

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \text{on } C \quad , \qquad (A.11)$$

とおくと

$$\phi(Q) = \int_C \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} S(P,Q)\, ds(P), \qquad (A.12)$$

$$\mu(P) = \phi(P) - \phi_i(P), \quad P \in C, \qquad (A.13)$$

これらの表現は(A.1)に比して簡便であるので
数値計算には工合が良い。

この時与えられた境界条件に対して Φ_i が簡単に求まる場合があるので その時はそれを利用すると更に計算が簡単になる。

例えば 2重吹出し分布に対して散乱ポテンシャルでは、境界条件は(1.13)で与えられるから(A.11)より

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_d}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}\varphi_0 , \qquad (A.14)$$

であるが φ_0 は勿論ヘルムホルツの方程式を満たすから

$$\Phi_i \equiv -\varphi_0(x,y,\alpha), \ \text{in } D \qquad (A.15)$$

となる。

それ故(A.13)より

$$\mu = \varphi_d + \varphi_0 , \ \text{on } C ; \qquad (A.16)$$

となり、(A.12)を(1.11)の境界条件で解いた時の解 μ から上式により直ちに圧力を計算する事が出来る。この関係がなければ一般には圧力は μ を求めた後に(A.12)によって計算しなければならない。

なお(A·11)(A·9)、(A·12)を解く際ある特定の周波数では解は定まらない。*

それは例えば(A·9)について言えばこの式は(A·8)によってϕが一意的に定まらなければ得られない。所がDにおいて

$$\phi_i = 0 \quad \text{on } C, \qquad (A\cdot 17)$$

なる解は固有解として常に存在する。

それ故(A·9)((A·11)も同じである事が示される)の表現は内部領域Dで(A·17)の境界条件を持つ固有周波数で解は不定となる。

同様にして(A·12)は

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C, \qquad (A\cdot 18)$$

なる固有周波数の所で解は不定となる。

* IHI 研究所本島により見出された。

附録B　物体の振動方程式

物体が無限流体中で入射波を受けて振動している場合の速度ポテンシャルは物体が平均において静止しているとすると線型重ね合せの原理により次のように分解出来る。

散乱ポテンシャル ϕ_d

境界条件は(1.9)より

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad \text{on } C, \quad \cdots (B.1)$$

発散(radiation)ポテンシャル

境界条件はCの垂直変位を$w(s)$とすると

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = i\omega\, w(s), \quad \cdots (B.2)$$

であるが$w(s)$は平行移動、回転の剛体的運動および弾性振動から成立っているから夫々の成分(w_jとする)とその振幅X_jで表わすと

$$w(s) = \sum_j X_j\, w_j(s), \quad \cdots (B.3)$$

と書ける。(この時C上でw_jが直交するように選んでおけば便利である)

それ故、

$$\phi = \sum_j x_j \phi_j \quad , \qquad (B\cdot 4)$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = i\omega\, w_j(s) \quad , \qquad (B\cdot 5)$$

のように分解出来る。

そうするとC上の圧力は(1.4)により

$$p = -i\rho_0\omega\left[\phi_0 + \phi_d + \sum_j x_j \phi_j\right] , \qquad (B\cdot 6)$$

物体の振動方程式は弾性振動まで考えると一般に書き表わせないが w_j を一般座標と考えてその夫々の成分について書き表わせる。

その時この圧力の w_j 座標への成分力は

$$F_j = \int_C p\, w_j\, ds = -i\rho_0\omega \int_C \left[\phi_0 + \phi_d + \sum_i x_i \phi_i\right] w_j\, ds , \quad (B\cdot 7)$$

となるがこの内 x_i に関する部分は振動方程式の方に含めると$\,$他の強制力は

$$E_j = -i\rho_0\omega \int_C (\phi_0 + \phi_d)\, w_j\, ds , \qquad (B\cdot 8)$$

となる。

X_jに比例する部分は物体の附加質量力と減衰を与えるのでそれを

$$f_{ij} = \int_C \phi_i w_j \, ds , \quad \cdots\cdots \quad (B.9)$$

とすると(B.7)は

$$F_j = E_j - i\rho\omega \sum_i X_i f_{ij} \quad , \quad \cdots\cdots \quad (B.10)$$

のように表わせる。

最も簡単な場合としてすべての振動が独立ならばX_jの振動に対するインピーダンスをZ_jとし上式右辺第2項はこの中に含ませるとその振幅は

$$i\omega X_j = \frac{E_j}{Z_j} \quad , \quad \cdots\cdots \quad (B.11)$$ [4)]

となるが一般には相互干渉があるので上式をベクトル表示式とし右辺右をマトリックスと考えるとそのマトリックスは対角要素以外に0でない要素を持つことになる。

附録C　逆時間ポテンシャル[9)]

今ある速度ポテンシャル φ と複素共役値 $\overline{\varphi}$ を時間面で考えるとそれは丁度時間が逆になった現象を現わしていると考えてよいのでそれを逆時間ポテンシャルと呼ぶ事にしよう。

さて φ の C 上の法線速度が実数値をとるとすると

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} \quad , \cdots\cdots (C.1)$$

となるので $(\varphi - \overline{\varphi})$ なる速度ポテンシャルの法線速度は0となる。

無限遠方では(A.4)により

$$\varphi(Q) - \overline{\varphi}(Q) \rightarrow \frac{i\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi k r'}} H(k,\theta)\, e^{-ikr' + \frac{\pi}{4} i}$$

$$+ \frac{i\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi k r'}} \overline{H(k,\theta)}\, e^{ikr' - \frac{\pi}{4} i} \quad , \cdots (C.2)$$

となり、この右辺第1項は外へ発散する波を表わしているが第2項は内側へ収束する円筒波を表わしている。

今

$$I = \int_0^{2\pi} \overline{H}(k,\alpha)\, e^{ikr'\cos(\theta'-\alpha)}\, d\alpha \qquad (C.3)$$

なる積分を考え $kr' \gg 1$ とすると定常点法により

$$I \xrightarrow[kr' \gg 1]{} \sqrt{\frac{2\pi}{ikr'}}\left[e^{ikr'}\overline{H}(k,\theta') - e^{-ikr'}\overline{H}(k,\theta'+\pi)\right], \qquad (C.4)$$

となるので $\left(\varphi - \overline{\varphi} - \frac{i}{4\pi} I\right)$ を考えると無限遠方では発散波のみを有する。

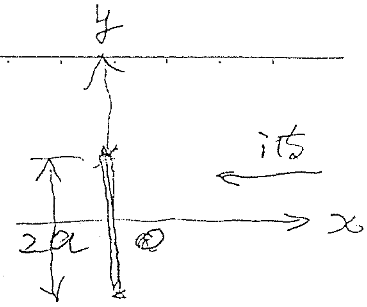
そこで更に

$$\varphi(Q) - \overline{\varphi}(Q) - \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} \overline{H}(k,\alpha)\left[\varphi_0(Q,\alpha) + \varphi_d(Q,\alpha)\right] d\alpha = 0, \qquad (C.4)$$

$$\varphi_0(Q,\alpha) = e^{ikr'\cos(\theta'-\alpha)}$$

なる速度ポテンシャルを考えると無限遠方で Sommerfeld の radiation condition を満たし C 上で法線速度は 0 であるから解の唯一性によって (C.4) は恒等的に 0 である。つまり φ の虚部は自分の作った波を散乱させる部分である。

附録D 平板



幅2aの薄い平板が図のようにあって y軸に平行に振動する場合を考えよう。

単位速度振幅で左右に振動する速度ポテンシャルφの境界条件は

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1 \quad \text{for } |y|<a, \qquad (D.1)$$

でこれを(A.1)のように表現すれば上の境界条件は積分方程式となり、解はマシウ関数で表わされる。[2]

ここでは簡単の為 入射波の波長がaに較べて充分大きいとすると(A.3)により、φは一様流れの中の平板の速度ポテンシャルに等しい。

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(0,y')\,x\,dy'}{x^2+(y-y')^2}, \quad \cdots \qquad (D.2)$$

それ故(D.1)は

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(0,y')\,dy'}{(y-y')^2} \qquad (D.3)$$

その解は

$$\varphi\Big|_c = a\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}} + \frac{C}{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}, \qquad (D\text{-}4)$$

でCは不定常数となるが両端で圧力が有限と考えるならばCは0とすべきである。

それ故 振幅(変位)をXとすると 板にかかるX方向の力Fは(B·7)より

$$F = -\rho_0\omega^2 X\int_C \varphi \frac{\partial y}{\partial s}ds = -\pi\rho_0\omega^2 X a^2, \quad (D.5)$$

これは所謂附加質量($\pi\rho_0 a^2$)による慣性力である。[4] この近似では減衰は0となるのでそれは例えば(4.1)により求めなければならない。

そて発散波の振幅は(A.5)より

$$H(k,\theta) = 2ik\cos\theta\int_{-a}^{a}\varphi e^{iky\sin\theta}dy \fallingdotseq \pi i k a^2\cos\theta, \quad (D.6)$$

それ故まず(B.8), (3.2)より強制力Eは(波振幅1)

$$E = i\omega\rho_0 c H(k,\theta) \fallingdotseq -\pi\rho_0\omega^2 a^2\cos\theta, \quad (D.7)$$

減衰については(4.1), (D.6)より

$$F = -\rho_0\omega^2 X\left\{\frac{m'}{\rho_0} + \frac{i(\mu+\mu')}{\omega}\right\}, \quad (D.8)$$

$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \pi$

$$\frac{\mu}{\omega} = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} H^2 d\theta \fallingdotseq \frac{\pi^2}{8}(ka^2)^2, \quad (D.9)$$

μ'は波以外の減衰とする。

$$m' = \rho_0\pi a^2.$$

∵質量を m，バネ常数を K とすると運動方程式は
入射波が板に直角であるとすると

$$\left[-\omega^2(m+m')+K-i\rho_0\omega(\mu+\mu')\right]X = i\omega\rho_0 c H(k,0) \qquad \text{(D.10)}$$

$$\therefore X \doteqdot \frac{-\pi\rho_0\omega^2 a^2}{-\omega^2(m+m')+K-i\rho_0\omega(\mu+\mu')}, \qquad \text{(D.11)}$$

同調時，つまり

$$\left.\begin{array}{l} \omega^2 = \dfrac{K}{m+m'} \\ \text{ならば} \quad X \doteqdot \dfrac{8}{\pi^2(ka)^2\left(1+\frac{\mu'}{\mu}\right)} \end{array}\right\} \cdots \text{(D.12)}$$

散乱ポテンシャルは（$\phi_0 = c\,e^{ikx}$ だから）

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_d = \frac{\partial}{\partial x}\phi_d\Big|_{x=0} = -\frac{\partial}{\partial x}\phi_0\Big|_{x=0} = -ikc, \qquad \text{(D.13)}$$
$(kc=\omega)$

ならば $\quad \phi_d = -i\omega\varphi \quad , \cdots\cdots \text{(D.14)}$

それなら

$$H_d(k,\theta) = -i\omega H(k,\theta) \doteqdot \pi\omega k a^2\cos\theta, \qquad \text{(D.15)}$$

これと振動 X による発散波を合せると反射波の振幅は

$$A(\theta) = i\omega\left[-1+X\right]H(k,\theta) \doteqdot (1-X)\pi\omega k a^2\cos\theta, \qquad \text{(D.16)}$$

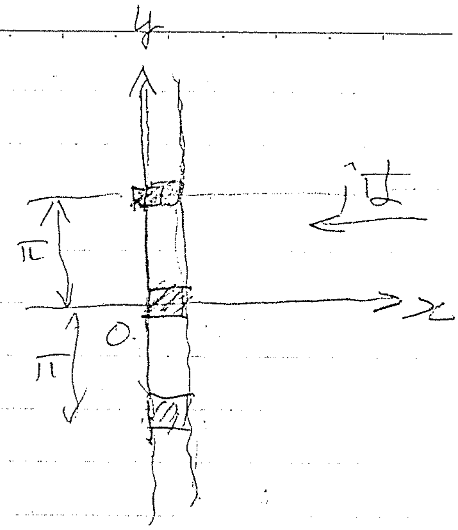
μ は充分小さいと考えられるので，さらに $m' \gg m$ とすれば

$$X \doteqdot 1 \quad , \quad A(\theta) \doteqdot 0 \quad , \cdots \text{(D.17)}$$

となる。

以上解答等きわめて怪しい。

附録E　平面壁[4]



y軸が平面壁でそれが例えば所々に骨があってy方向に周期性があるとしよう。

そうすると無限遠方で正則な速度ポテンシャルは(1.5)から

$$\varphi_n(x,y) = \begin{cases} \cos ny\, e^{-i\sqrt{k^2-n^2}|x|}, & \text{for } k>n, \\ \cos ny\, e^{-\sqrt{n^2-k^2}|x|} & \text{for } k<n, \end{cases} \quad n:\ \text{integer} \qquad (E.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_n(0,y) = -\sqrt{n^2-k^2}\cos ny, \quad \cdots \qquad (E.2)$$

このnが0から正の無限大の整数までの関数の全体は(2.1)の右又は左半平面(帯状)積分L^*に関して直交系をなし且つ完全系である。

$$\left.\begin{aligned} L^*(\varphi_n, \varphi_m) &= 0 \qquad \text{for } n \neq m \\ &= +\int_0^{\pi} \varphi_n \frac{\partial}{\partial x}\varphi_m\, dy = (n^2-k^2)\frac{\pi}{\varepsilon_n}, \end{aligned}\right\} \qquad (E.3)$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \ \text{for } n \geq 1$$

それ故例えば右半平面で正則なポテンシャルφは常に(E.1)式に展開出来て

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x,y),$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0}=-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sqrt{n^2-k^2}\cos ny, \qquad \cdots (E\text{-}4)$$

となるから

$$a_n=\frac{\varepsilon_n}{\pi(n^2-k^2)}\int_0^{\pi}\varphi_n\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy, \quad \cdots (E\text{-}5)$$

さて φ_n は $n>k$ ならば指数関数的に減少する。例えば $k=\frac{2\pi}{\lambda}<1$ $(\lambda/\pi>2)$ ならば正弦的に変化するのは φ_0 のみであるから、この際無限遠方では

$$\varphi(x,y)\xrightarrow[x\gg 1]{}a_0\varphi_0(x,y)=a_0e^{-ikx}$$

$$a_0=\frac{-1}{\pi k^2}\int_0^{\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy, \qquad (E\text{-}6)$$

左半面に波がないためには左側の壁は静止していなければならない。

又右半面に波が反射しない為には上式によれば右壁は入射波の流体粒子と同じに動けばよい事を示し(5.9)式に示と同じになる。