E

M-51

昭和51年9月24日

"平面応力理論における境界値問題"

別府公利

内容

昭和　　年　　月　　日

1. 序論

数理物理学的に見ると弾性理論も流体力学も共に偏微分方程式の境界値問題に還元されるので数学的には同じような手法でも良いはずであるが実際上の数値解析手法はかなり異なっている。

即ち現在弾性学の分野では有限要素法が実際的解法として大変隆盛であるが一方流体力学の方ではこの方法は現在の所あまり盛んではなく、旧来の吹出し吸込み等の特異点を用いて境界条件の積分方程式を解く方法が主流を占めている。

このように両力学における解析手法が異なって来たのには多くの理由が考えられようが、その一つには弾性理論の成書に後者の方法の記述が大変少ないと言う事にもあると思われる。

しかしLoveの教科書にはBettiの表現として後者の特異点による応力場の表現が記されており歴史の所では級数展開等の方法と並んでもう一つの解析法として紹介されている。

一般に偏微分方程式の問題ではその斉次解をみつける事は容易であるので問題はその解が境界条件を満たすものを探し出す事である。このような方法の内で最も簡単なものは多くの要素解を加え合せて境界条件を満たす方法であるが（級数展開）、一方又この要素解を例えば流体力学における吹出しのようなものに選んでその吹出しの

昭和　　年　　月　　日

項をも加減して境界条件を満たすようにする方法もある。

一方有限要素法では境界条件は最初に入力データとして指定し応力場又は流れ場の方を偏微分方程式を満たすように定める。これは変分法の観点から考えると有限要素法では例えば歪エネルギー最小の条件によって応力場は定められるが一方前者の方法では要素解は偏微分方程式を満たしているので境界条件に関する極値問題になる事になる。

本覚書は下記参照文献特に(2)に依って平面応力問題に限って特異点法による応力等の表現を導出しようとするものである。

参文献

(1) A.E.H. Love "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity" 4th ed., Cambridge, 1959

(2) S. Bergman and M. Schiffer "Kernel Function and Elliptic Differential Equation in Mathematical Physics", Academic Press, 1953

2, 相反定理とBettiの表現[1],[2]

今平面応力場Dにおいて応力関数 f_1, f_2 を持つ変位 $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$, 応力 $(\sigma_{1x}, \sigma_{1y}, \tau_{1xy})$, $(\sigma_{2x}, \sigma_{2y}, \tau_{2xy})$ を考え又その境界C上のx, y方向の力 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ として双2次形式を導入すると

$$E(f_1, f_2) = \iint_D \left[\sigma_{1x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \sigma_{1y}\frac{\partial v_2}{\partial y} + \tau_{1xy}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\right] dx\,dy$$

$$= \int_C (u_2 p_1 + v_2 q_1)\, ds, \quad \cdots\cdots (2.1)$$

Maxwell-Bettiの相反定理は

$$E(f_1, f_2) = E(f_2, f_1) \quad , \cdots \quad (2.2)$$

から

$$\int_C (u_2 p_1 + v_2 q_1)\, ds = \int_C (u_1 p_2 + v_1 q_2)\, ds, \quad (2.3)$$

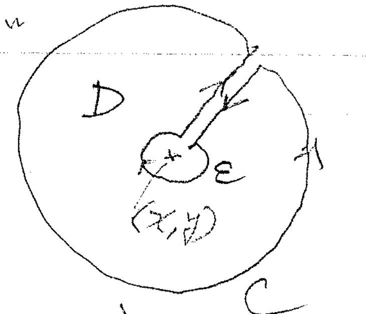
となる。

(2.1)で特に $f_1 = f_2 = f$ ならば

$$\left.\begin{aligned} E(f, f) &= \iint_D A(f, f)\, dx\,dy, \\ A(f, f) &= \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{aligned}\right\} (2.4)$$

となって $A(f, f)$ は単位面積, 単位厚さ当りの歪エネルギー密度であり, $E(f, f)$ は領域Dの単位厚さ当りの歪エネルギーである。

(2.3) において (u_1, v_1) として D 内で正則なものをとり u_2, v_2 等として点 (x, y) に x 方向の単位力が加わった応力函数 $S^{(1)}(x', y'; x, y)$ を採り、周曲線 C として図のように点 (x, y) をさけるように回るものとすると



$$\int_{C-\varepsilon}\Big[u(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}\Big(\frac{\partial}{\partial y'}S^{(1)}(x',y';x,y)\Big) - v\frac{\partial}{\partial s'}\Big(\frac{\partial}{\partial x'}S^{(1)}(x',y';x,y)\Big)$$

$$- U^{(1)}(x',y';x,y)\,p(x',y') - V^{(1)}(x',y';x,y)\,q(x',y')\Big]ds' = 0$$

となるが ε なる点 (x, y) の周りの積分は ε を小さくすると $-u(x, y)$ に近づく。

これを上式に代入し又 (B.12) によって (x, y), (x', y') を入れ換えると

$$u(x,y) = \int_{C}\Big[u(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}\Big(\frac{\partial}{\partial y'}S^{(1)}(x,y;x',y')\Big) - v(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}\Big(\frac{\partial}{\partial x'}S^{(1)}(x,y;x',y')\Big)$$

$$- U^{(1)}(x,y;x',y')\,p(x',y') - V^{(1)}(x,y;x',y')\,q(x',y')\Big]ds' \quad (2.5)$$

同様にして $S^{(2)}$ を用いて

$$v(x,y) = \int_{C}\Big[u(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}\Big(\frac{\partial}{\partial y'}S^{(2)}(x,y;x',y')\Big) - v(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}\Big(\frac{\partial}{\partial x'}S^{(2)}(x,y;x',y')\Big)$$

$$- U^{(2)}(x,y;x',y')\,p(x',y') - V^{(2)}(x,y;x',y')\,q(x',y')\Big]ds' \quad (2.5')$$

これらの式で $S^{(1)}$ $S^{(2)}$ $U^{(1)}$ $U^{(2)}$ 等は夫々点 (x', y') に単位力が加わる時の函数となっている。

所で $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ の他に食違いのある応力函数 $S^{(3)}$, $S^{(4)}$ を導入すると (B.9), (B.11) によって (2.5) (2.5') は次のようにかける。

昭和　　年　　月　　日

$$u(x,y)=\int_C\Big[u(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}U^{(3)}(x,y;x',y')+v(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}U^{(4)}(x,y;x',y')$$

$$-U^{(1)}(x,y;x',y')p(x',y')-U^{(2)}(x,y;x',y')q(x',y')\Big]ds',$$

$$v(x,y)=\int_C\Big[u(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}V^{(3)}(x,y;x',y')+v(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}V^{(4)}(x,y;x',y')\qquad(2.6)$$

$$-V^{(1)}(x,y;x',y')p(x',y')-V^{(2)}(x,y;x',y')q(x',y')\Big]ds',$$

この表現では右辺はすべて $S^{(i)}$ $(i=1\sim4)$ なる応力函数による変位となっている故 (A.8), (B.3) 両式の相似性から他の諸量の表現も同様に直ちに得られる。
先ず

$$\xi(x,y)=-\int_C\Big[u(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}\Xi^{(3)}(x,y;x',y')+v(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}\Xi^{(4)}(x,y;x',y')$$

$$-p(x',y')\Xi^{(1)}(x,y;x',y')-q(x',y')\Xi^{(2)}(x,y;x',y')\Big]ds',$$

$$\eta(x,y)=\int_C\Big[u\frac{\partial}{\partial s'}H^{(3)}+v\frac{\partial}{\partial s'}H^{(4)}$$

$$-pH^{(1)}-qH^{(2)}\Big]ds',\qquad(2.7)$$

を得るが ξ, η は調和函数であるので一方では

$$\xi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_C\Big[\xi(x',y')\frac{\partial}{\partial n'}\log R-\frac{\partial\xi}{\partial n'}(x',y')\log R\Big]ds',\quad(2.8)$$

なる表現がある。

実際 (2.7) の u, v, p, q に (A.8) の関係を導入して (B.6) を参照し、部分積分すると u, v 等が一価とすれば（定数を除けば）

(2.8)になる事がわかる。
(2.6),(2.7)から(2.8)の関係を使えば $\partial_x f, \partial_y f$ の表示が得られるがそれを積分すれば f の表示となる。
即ち

$$f(x,y)=\int_C\Big[u(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}S^{(3)}(x,y;x',y')+v(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}S^{(4)}(x,y;x',y')$$

$$-p(x',y')S^{(1)}(x,y;x',y')-q(x',y')S^{(2)}(x,y;x',y')\Big]ds' \quad (2.9)$$

流体力学における吹出し、吸込み等の概念との相似から言うならば $S^{(1)}, S^{(2)}$ は p, q なる力による吹出し又は吸込みに相当し、$\frac{\partial}{\partial s'}S^{(3)}, \frac{\partial}{\partial s'}S^{(4)}$ は変位 u, v を (x',y') にひき起す二重吹出しとも言うべき応力関数である。

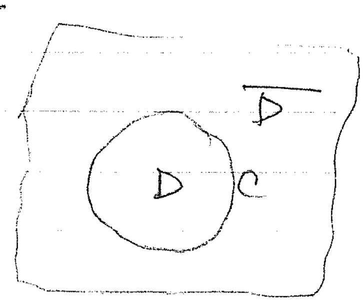
いずれにしてもこれらの式で周辺上の u, v, p, q がわかればその中の応力場は計算出来る事になる。
境界条件は C 上で (u,v) が与えられる場合(第1問題と呼ぼう)、(p,q) が与えられる場合(第2問題)、(u,v) と (p,q) の間に比例関係のある場合(第3問題)、その他実用的には C の一部では (u,v)、それ以外では (p,q) が与えられる場合(第4問題)等がある。
その内第1,第2問題については次節以下に示すような便法がある(第3にもあるがここではふれない)がその他の問題も含めてこれらの境界条件を(2.6)又は(2.7)に代入するとそれらは C 上での積分方程式(フレドホルム第2種)となるのでこれを解けば直ちに解を得る。

3. 吹出し式表現 (Quellenmäßig Darstellung**)

前節の(2.6)～(2.9)の表現は流体力学的に言えば吹出し分布と2重吹出し分布とから成立っているが流体力学ではこれをそのどちらかで表現するのが普通である。

以下Lambの方法*に従ってそれを求めよう。前節(2.5)を導いた時点(x,y)を領域D内に採った為にC上の積分が$u(x,y)$となったのであるから点(x,y)がD内になければ(2.5)及び(2.6)の右辺は0である。

そこで領域Dに対して補領域$\bar{D}$を考えて$\bar{D}$も同じ材料で出来ているとし境界値が(u',v'), (p',q')であるとするとD内の点(x,y)に対しては上述のように



$$0=\int_C \Big[u'(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}U^{(3)}(x,y;x',y')+v'(x',y')\frac{\partial}{\partial s'}U^{(4)}(x,y;x',y')$$
$$-U^{(1)}(x,y;x',y')\,p'(x',y')-U^{(2)}(x,y;x',y')\,q'(x',y')\Big]ds', \quad (3.1)$$

となる。

それ故今境界条件として

$$\left.\begin{aligned} p'(x',y') &= -p(x',y') \\ q'(x',y') &= -q(x',y') \end{aligned}\right\} \text{ on } C \quad (3.2)$$

とおくと$\bar{D}$の応力場は一義的に定まりC上に変位u', v'を生ずる。

ここで

$$\left.\begin{aligned} u+u' &= \mu(x,y) \\ v+v' &= \nu(x,y) \end{aligned}\right\} \text{ on } C, \quad (3.3)$$

* H. Lamb "Hydrodynamics" 6th ed. p.62

** R. Courant und D. Hilbert "Methoden der Mathematischen Physik" Bd I, S.97.

とおいて (2.6) と (3.1) を夫々加え合せると

$$
\left.
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_C \left[\mu(x',y') \frac{\partial}{\partial s'} U^{(3)}(x,y;x',y') + \nu(x',y') \frac{\partial}{\partial s'} U^{(4)}(x,y;x',y') \right] ds' \\
v(x,y) &= \int_C \left[\mu \frac{\partial}{\partial s'} V^{(3)} + \nu \frac{\partial}{\partial s'} V^{(4)} \right] ds'
\end{aligned}
\right\} \quad (3.4)
$$

これが 2重吹出し式表現である。
ξ および f は同様にして

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi(x,y) &= \int_C \left[\mu \frac{\partial}{\partial s'} \Xi^{(3)} + \nu \frac{\partial}{\partial s'} \Xi^{(4)} \right] ds' \\
\eta(x,y) &= \int_C \left[\mu \frac{\partial}{\partial s'} H^{(3)} + \nu \frac{\partial}{\partial s'} H^{(4)} \right] ds'
\end{aligned}
\right\} \quad (3.5)
$$

$$
f(x,y) = \int_C \left[\mu \frac{\partial}{\partial s'} S^{(3)} + \nu \frac{\partial}{\partial s'} S^{(4)} \right] ds' \quad (3.6)
$$

となる。
吹出し式表現の時は (3.2), (3.5) を逆にして

$$
\left.
\begin{aligned}
u + u' &= 0 \\
v + v' &= 0
\end{aligned}
\right\} \text{ on } C \quad (3.7)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
p(x,y) + p'(x,y) &= \sigma(x,y) \\
q(x,y) + q'(x,y) &= \tau(x,y)
\end{aligned}
\right\} \text{ on } C \quad (3.8)
$$

とおくと

$$
\left.
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_C \left[\sigma(x',y') U^{(1)}(x,y;x',y') + \tau(x',y') U^{(2)}(x,y;x',y') \right] ds' \\
v(x,y) &= \int_C \left[\sigma V^{(1)} + \tau V^{(2)} \right] ds'
\end{aligned}
\right\} \quad (3.9)
$$

$$f(x,y)=\int_C\left[\sigma S^{(1)}+\tau S^{(2)}\right]ds', \quad \cdots \quad (3.10)$$

等を得る。
境界値問題が第1又は第2問題の場合はこれらの式からフレドホルムの第1種の積分方程式が出来るので前節の場合に較べ簡単である。

以上の場合の大変特殊な場合としてCが無限に長い直線（x軸）である場合を考えて見よう。
今DとD̄を合せた無限大平板を考えてC上の点を$(\mu(x,y),\nu(x,y))$だけ変位させたと考えよう。
対称性からDの変位をu, vとすると(3.5)より

$$\left.\begin{aligned}\mu(x,y)&=2u(x,y)\\ \nu(x,y)&=2v(x,y)\end{aligned}\right\}\text{on } C, \quad \cdots \quad (3.11)$$

この時には対称性から境界に働く力には(3.2)が成立つと考えざるを得ないので(3.4)は

$$\left.\begin{aligned}u(x,y)&=2\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(x',y')\frac{\partial}{\partial x'}U^{(3)}+v(x',y')\frac{\partial}{\partial x'}U^{(4)}\right]dx',\\ v(x,y)&=2\int_{-\infty}^{\infty}\left[u\frac{\partial}{\partial x'}V^{(3)}+v\frac{\partial}{\partial x'}V^{(4)}\right]dx',\\ f(x,y)&=2\int_{-\infty}^{\infty}\left[u\frac{\partial}{\partial x'}S^{(3)}+v\frac{\partial}{\partial x'}S^{(4)}\right]dx',\end{aligned}\right\}(3.12)$$

が得られる。
同様にして(3.7)のようにC上で変形をとると対称性から

$$\left.\begin{aligned}\sigma(x,y)&=-2p(x,y)\\ \tau(x,y)&=-2q(x,y)\end{aligned}\right\}\text{on } C. \quad (3.13)$$

昭和　　年　　月　　日

となり (3.9)(3.10) から

$$
\left.
\begin{aligned}
u(x,y) &= -2\int_{-\infty}^{\infty}\left[p(x',y)U^{(1)} + q U^{(2)}\right]dx', \\
v(x,y) &= -2\int_{-\infty}^{\infty}\left[p V^{(1)} + q V^{(2)}\right]dx', \\
f(x,y) &= -2\int_{-\infty}^{\infty}\left[p S^{(1)} + q S^{(2)}\right]dx',
\end{aligned}
\right\} \quad (3.14)
$$

を得るがこれは次節に考察する直線境界に対するグリーン関数表示であり、この場合は第1、第2境界値問題は (3.12)(3.14) で完全に解かれた事になる。

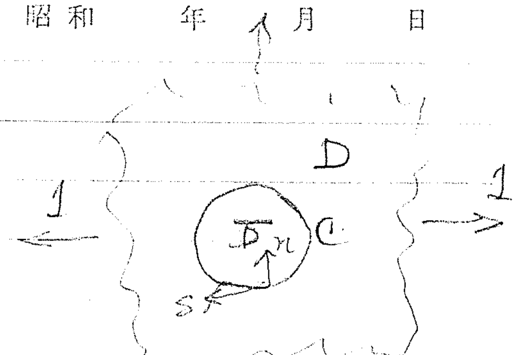
この例でもわかるように $\bar{D}$ 内の応力場としてはどんなものを考えても D内の応力場に直接関係はないので勝手にとる事が出来る。

それ故それを適当なものにとる事によって式又は問題を簡単にする事が出来る場合もある訳である。

もう一つのそのような例として無限平板の中にある穴の周りの応力集中問題を次節で考えて見よう。

昭和　年　月　日

4. 無限平板中の穴



無限平板の中程の穴の周りの応力集中の問題を考えて見よう。これは前節迄の方法に大変適した問題である。

と言うのは有限要素法は応力集中問題にはあまり適していないし又この場合全領域が無限に広がっている事は要素の分割法について不便である。

又一方解析的手法として穴の形を単位円に写像する関数がわかれば Muskhelishvili の方法*等で容易に解けるが、穴の形が簡単でない時はこの写像関数を求める事自体が数値解析の問題であるからである。

さて穴の縁は自由辺であるとすると境界条件は

$$p = q = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{on } C \qquad (4.1)$$

であるが無限遠方で一様な応力になる部分は除いて考えねばならないので今夫々 x, y 方向の一様引張応力を与える

$$\frac{1}{2}y^2, \quad \frac{1}{2}x^2, \qquad (4.2)$$

に対応して $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ なる応力関数を考えると、(4.1)により

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = -y, \\ \text{又は} \quad &q_1 = 0, \quad p_1 = -\frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial n}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \quad p_2 = 0, \quad q_2 = \frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\partial y}{\partial n}, \qquad (4.4)$$

*N.I. Muskhelishvili; "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity," Transl. P. Noordhoff Ltd. 1963

さてまず(2·4)によって無限遠方の漸近値を求めておこう。

$$S^{(i)}(x,y;x',y') \xrightarrow[x,y\to\infty]{} S^{(i)}(x,y;0,0) + x'\frac{\partial}{\partial x'}S^{(i)}(x,y;0,0) + y'\frac{\partial}{\partial y'}S^{(i)}(x,y;0,0), \cdots \quad i=1\sim4 \qquad (4.5)$$

で又

$$\int_C p_i(x,y)\,ds = \int_C q_i\,ds = 0, \quad (i=1\ \text{or}\ 2) \qquad (4.6)$$

であるから

$$f_i(x,y) \xrightarrow[x,y\to\infty]{} a_1^i\frac{\partial}{\partial x}S^{(1)}(x,y;0,0) + a_2^i\frac{\partial}{\partial y}S^{(1)}(x,y;0,0)$$
$$+ b_1^i\frac{\partial}{\partial x}S^{(2)}(x,y;0,0) + b_2^i\frac{\partial}{\partial y}S^{(2)}(x,y;0,0)$$
$$- c_1^i\frac{\partial}{\partial x}S^{(3)}(x,y;0,0) - c_2^i\frac{\partial}{\partial y}S^{(3)}$$
$$- d_1^i\frac{\partial}{\partial x}S^{(4)} - d_2^i\frac{\partial}{\partial y}S^{(4)}, \qquad (4.7)$$

(注　$\frac{\partial}{\partial x}S^{(3)}$ ─ $\frac{\partial}{\partial y}S^{(4)}$)

ここに

$$\left.\begin{aligned} \begin{matrix} a_1^i \\ a_2^i \end{matrix}\Big\} &= \int_C p_i(x,y)\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} ds, \\ \begin{matrix} b_1^i \\ b_2^i \end{matrix}\Big\} &= \int_C q_i(x,y)\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} ds. \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{matrix} c_1^i \\ c_2^i \end{matrix}\Big\} &= \int_C u_i(x,y)\begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{Bmatrix} ds, \\ \begin{matrix} d_1^i \\ d_2^i \end{matrix}\Big\} &= \int_C v_i(x,y)\begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{Bmatrix} ds, \end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

昭和　　年　　月　　日

$f_1(x,y)$ について考えると (4.3) より

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= -\int_C \frac{\partial x}{\partial n} x\, ds = -A \quad (\text{Dの面積}) \\ a_2' &= 0, \quad b_1' = b_2' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.10)$$

$$\left.\begin{aligned} -c_1' + d_2' &= \int_C \left(-u_1 \frac{\partial x}{\partial s} + v_1 \frac{\partial y}{\partial s}\right) ds \\ c_2' &= -\int_C u_1 p_1\, ds \quad ; \ \text{歪エネルギー} \\ d_1' &= \int_C v_1 q_2\, ds = \int_C (u_1 p_2 + v_1 q_2)\, ds = \int_C u_2 p_1\, ds, \end{aligned}\right\} \quad (4.11)$$

変位, ξ, η 等については (4.7) で $S^{(i)}$ の所に夫々 $U^{(i)}, V^{(i)}, \Phi^{(i)}, H^{(i)}$ をおきかえればよい。

又 (4.11) 第1式をきれいな形に書くには f_3 なる応力関数を導入して

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_3(x,y) &= -y, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_3 = -x \quad \text{on } C \\ \text{つまり} \quad p_3 &= -\frac{\partial x}{\partial s}, \quad q_3 = \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{on } C \end{aligned}\right\} \quad (4.12)$$

とおく。つまり (4.2) なる一様引張りに対し一応剪断応力 (xy) なるものに対応する関数であるが、これを使うと

$$\begin{aligned} d_2' - c_1' &= \int_C \left(-u_1 \frac{\partial x}{\partial s} + v_1 \frac{\partial y}{\partial s}\right) ds = \int_C (u_1 p_3 + v_1 q_3)\, ds \\ &= \int_C (u_3 p_1 + v_3 q_1)\, ds, \qquad (4.13) \end{aligned}$$

のように書く事が出来る。

これらを (4.7) に代入すると

$$f_1(x,y) \longrightarrow -A\frac{\partial}{\partial x}S^{(1)}(x,y;0,0) - c_2'\frac{\partial}{\partial y}S^{(2)}(x,y;0,0)$$

$$-d_1'\frac{\partial}{\partial x}S^{(4)} + (d_2'-c_1')\frac{\partial}{\partial x}S^{(3)}(x,y;0,0) \quad \cdots (4.14)$$

となる。

右辺第1項は x方向に働く力のモーメントに対応する応力場であって今の場合穴の面積に比例する点が興味がある。

第2項は原点において x方向変位が c_2'（基本解）だけジャンプする場合の応力場であり、第3項は y方向変位が d_1' だけジャンプする場合に対応しているが（附録C参照）

第4項は x方向変位に食違いがある（x軸y方向に）場合の応力場であって変位に多価性を生ぜしめるので、この係数は0となるべきだと考えられるが一般的には今の所証明出来ない。

しかし穴が x, y 軸に関し対称ならば (4.17) 第2式により図形の対称性から 0 となる事は明らかである。

それ故穴が x, y 軸に関し対称ならば右辺第1項、第2項のみで表わされ共に対数的に無限大となる。(特異性)

（その点つまり対数的に無限大となる点から見ると領域が無限大となる時 (2.9) の表現はもう一つ無限大の半径の円上の積分も考えねばならずその積分は有限ではなくなるだろう。

それ故 (2.9) の表現は形式的に成立っても数学的には問題が残るので以下ではなるべく使わない事にする）

昭和　年　月　日

次に前節の表現について考えて見よう。
この場合 時出し式表現(3.10)についてはこれ以上に簡単化出来ないが(3.4)についてはu, vがもう少し明確な形に表わせる。
その為には穴の中つまりDの中での変位u, vとして一様応力場を考える。
今はx方向の引張り応力を考えると応力関数φに対して

$$p_1' = \frac{\partial}{\partial s} y, \quad q_1' = 0 \quad \text{on } C$$
$$\xi_1' = \frac{x}{E}, \quad \eta_1' = \frac{y}{E}$$
$$u_1 = \frac{x}{E}, \quad v_1 = \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{2G}\right) y = -\frac{y}{mE}, \quad \cdots (\cancel{4}.15)$$

境界力に関し(4.3)と較べて(3.2)が成立っているので(3.4)～(3.6)の表現が成立って然も(3.3)と上式より

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= u_1(x,y) + \frac{x}{E}, \\ v(x,y) &= v_1(x,y) - \frac{y}{mE}, \end{aligned}\right\} \cdots (4.16)$$

が得られるが、u_1, v_1は一様引張りによる変位を除いた変位であったから、u, vはそれに一様引張り分を加えた全変位である。
この表現の便利な点は問題を解いてu, vがわかるとC上では応力の主軸はCに沿ったものとその法線方向であるが法線方向応力は0である故、Cに沿う応力を求めるにはu, vからCの切線方向の変位を求めそれを線素で微分すれば直ちに応力が求まる。

最後にグリーン関数について考えて見よう。
(2.6)の表現において $U^{(i)}$ に適当な正則関数 $U_A^{(i)}$ を加えて

$$U^{(i)}+U_A^{(i)} = V^{(i)}+V_A^{(i)} = 0, \qquad \begin{matrix} i=1,2 \\ \text{on } C, \end{matrix} \qquad (4.17)$$

となるようにする事が出来，その応力関数は

$$S^{(i)}+A^{(i)} = G^{(i)}, \qquad i=1,2 \qquad (4.18)$$

のようになったとすると $U^{(2)}$, $U^{(1)}$ は (13.9)のような関係がなければならないから

$$u(x,y) = -\int_C \left[u(x',y') \frac{\partial^2}{\partial s' \partial y'} G^{(1)}(x,y;x',y') + v(x',y') \frac{\partial^2}{\partial s' \partial x'} G^{(1)}(x,y;x',y') \right] ds', \qquad (4.19)$$

(v についても同様な式を得るが，以下省略する)
このような応力関数 $G^{(i)}$ をグリーン関数と呼ぼう。
一方第2境界値問題では正則関数 $B^{(i)}$ によって

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \end{matrix} \right\} \left\{ S^{(i)}(x,y;x',y') + B^{(i)}(x,y;x',y') \right\} = 0 \qquad \begin{matrix} i=1,2 \\ \text{on } C \end{matrix} \qquad (4.20)$$

$$N^{(i)} = S^{(i)} + B^{(i)},$$

とする事が出来れば，その時 $U^{(i)}$, $V^{(i)}$ は

$$U_N^{(i)} = U^{(i)}+U_B^{(i)}, \quad V_N^{(i)} = V^{(i)}+V_B^{(i)}, \qquad (4.21)$$

となるので(2.6)は

$$u(x,y) = -\int_C \left[p(x',y') U_N(x,y;x',y') + q\, U_N \right] ds', \qquad (4.22)$$

と書ける。
この $(S^{(i)}+B^{(i)})$ をノイマン関数と呼ぶ事にしよう。
(4.22)は与えられた境界力 (p,q) によって変位 u を与える式であるから，早速正則な変位 $U_B^{(i)}$, $V_B^{(i)}$

に適用して見ると $S^{(i)}$ の境界条件は (4.20) で与えられるから

$$U_B^{(i)}(x,y;x',y') = \int_C \Big[U_N^{(1)}(x,y;x'',y'') \frac{\partial^2}{\partial s'' \partial y''} S^{(i)}(x',y';x'',y'')$$

$$- U_N^{(2)}(x,y;x'',y'') \frac{\partial^2}{\partial s'' \partial x''} S^{(i)}(x',y';x'',y'') \Big] ds'', \quad (4.23)$$
$$i=1,2$$

を得る。

今点 (x',y') が充分原点を離れると、

$$S^{(i)}(x',y';x'',y'') = S^{(i)}(x',y';0,0) + x'' \frac{\partial}{\partial x''} S^{(i)}(x',y';0,0) + y'' \frac{\partial}{\partial y''} S^{(i)} + \cdots$$

$$= S^{(i)}(x',y';0,0) - x'' \frac{\partial}{\partial x'} S^{(i)}(x',y';0,0) - y'' \frac{\partial}{\partial y'} S^{(i)}$$

$$+ \frac{(x'')^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} S^{(i)}(x',y';0,0) + \frac{(x''y'')}{2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} S^{(i)} + \frac{(y'')^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} S^{(i)} \cdots$$

$$\cdots (4.24)$$

と近似されるから、これを上式に代入すると、

$$U_B^{(i)}(x,y;x',y') \xrightarrow[(x',y') \to \infty]{} - u_1(x,y) \frac{\partial^2}{(\partial y')^2} S^{(i)}(x',y';0,0)$$

$$- u_3(x,y) \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} S^{(i)}(x',y';0,0) - u_2(x,y) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} S^{(i)},$$

$$\cdots (4.25)$$

を得る。

ここに u_1, u_2, u_3 は (4.3), (4.4), (4.12) のような境界条件を持つ変位であって、

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,y) &= \int_C \frac{\partial y'}{\partial s'} U_N^{(1)}(x,y;x',y') ds', \\ u_2(x,y) &= -\int_C \frac{\partial x'}{\partial s'} U_N^{(2)}(x,y;x',y') ds', \\ u_3(x,y) &= \int_C \Big[\frac{\partial x'}{\partial s'} U_N^{(1)} - \frac{\partial y'}{\partial s'} U_N^{(2)} \Big] ds', \end{aligned}\right\} (4.26)$$

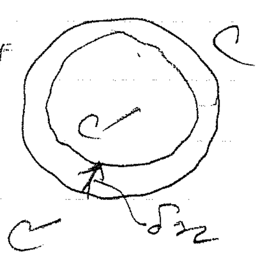
昭和　　年　　月　　日

それ故 $U^{(i)}$ の展開と合せて

$$U_N^{(i)}(x,y;x',y') \xrightarrow[x',y'\to\infty]{} U^{(i)}(0,0;x',y') + x\frac{\partial}{\partial x}U^{(i)} + y\frac{\partial}{\partial y}U^{(i)}$$
$$- u_1\frac{\partial^2}{\partial y'^2}S^{(i)} - u_3\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}S^{(i)} - u_2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}S^{(i)}, \qquad \cdots (4.27)$$

なお右辺の微係数は(B.9)によって $U^{(i)}$ $(i=3,4)$ によって表わされる。
これをさらに(4.26)に代入すると、(4.7)に対応する関係が得られる。

最後に周辺 C が少し変形して C' になった場合を考えよう。
C' に対するノイマン関数の境界条件は



$$\frac{\partial}{\partial s'}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x'}\\ \frac{\partial}{\partial y'}\end{pmatrix}\left[S^{(i)}(x,y;x',y') + B^{(i)*}(x,y;x',y')\right]=0 \quad \text{on } C', \qquad \cdots (4.28)$$
$$N^{*(i)} = S^{(i)} + B^{(i)*}$$

である。
これに対応する変位は $U_N^{(i)*}$ となるものとしよう。

$$U_N^{(i)*}(x,y;x',y') - U_N^{(i)}(x,y;x',y') = \delta U_N^{(i)}(x,y;x',y'), \qquad \cdots (4.29)$$

とおくと、特異性は共通である故 $\delta U_N^{(i)}$ は D 内で正則であり、境界条件は C 上では(4.20)、C' 上では(4.28)である故

$$\frac{\partial}{\partial s'}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x'}\\ \frac{\partial}{\partial y'}\end{pmatrix}\delta N^{(i)} = \frac{\partial}{\partial s'}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x'}\\ \frac{\partial}{\partial y'}\end{pmatrix}N^{(i)}, \quad \text{on } C' \qquad \cdots (4.28)$$

$$\delta N^{(i)} = N^{(i)} - N^{(i)*} \qquad \cdots (4.29)$$

である故

$$\delta U_N^{(i)}(x,y;x',y') = -\int_{C'}\left[\frac{\partial^2 N^{(i)}}{\partial s''\partial y''} U_N^{(1)*}(x',y';x'',y'') - \frac{\partial^2}{\partial s''\partial x''} N^{(i)} U_N^{(2)*}\right] ds'',$$

となるが右辺の境界値は(4.28)により一次の微小量であり、U_N^*とU_Nの差も又微小量と考えられるので2次の微小量を無視すれば上式は

$$\delta U_N^{(i)}(x,y;x',y') = -\int_{C'}\left[\frac{\partial^2 N^{(i)}}{\partial s''\partial y''} U_N^{(1)} - \frac{\partial^2 N^{(i)}}{\partial s''\partial x''} U_N^{(2)}\right] ds'', \quad (4.30)$$

と近似する事が出来る。

一方C上では右辺の境界値は(4.20)により消えるので(2.1)により

$$\delta U_N^{(i)}(x,y;x',y') = -\iint_D A(N^{(i)}, N^{(1)})\, dx''dy'' +$$

$$\fallingdotseq -\int_C A(N^{(i)}, N^{(1)})(\delta n)\, ds, \quad \cdots (4.31)$$

$$A(N^{(i)}, N^{(1)}) = \Sigma_{NX}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} U_N^{(1)} + \Sigma_{NY}^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} V_N^{(1)} + T_{Nxy}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial y} U_N^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x} V_N^{(1)}\right), \quad \cdots (4.32)$$

と近似する事が出来る。

ここにδnはC'とCの間隔であり、$\Sigma_{NX}^{(i)}$等は$N^{(i)}$による応力である。

$(U_N^{(2)} = V_N^{(1)})$

昭和　年　月　日

(4.27)の変分をとって(4.31)を代入すると例えば

$$\delta u_1(x,y) = -\int_C A(f_1, N^{(1)})(\delta n)ds \quad , \cdots \quad (4.33)?$$

等が得られ、さらに$N^{(1)}$の展開式を考えて(4.7)の展開を用いれば

$$\delta(C_2') = \delta\left\{\int_C u_1 \frac{\partial y}{\partial s} ds\right\}$$

$$= -\int_C A(f_1, f_1)(\delta n)ds \quad , \cdots \quad (4.34)?$$

を得る。

自由縁では周に沿う応力をσ_sとすると、

$$A(f_1, f_1) = \frac{\sigma_s^2}{E} \quad , \cdots \quad (4.35)?$$

であるから せ のある部分で

$$\int(\delta n)ds = 0$$

つまり穴面積を変えないで変形する時

$$\delta(C_2') = 0 \quad , \cdots \quad (4.36)?$$

となれば

$$\sigma_s = \mathrm{Const.} \quad (4.37)?$$

である。

(?印) 訂正の要あり

昭和　年　月　日

5. 変分法 *

本文の方法では序論にのべたように変分原理は歪エネルギー最小ではなくなる。

今或る応力関数 f_0 に対し f で近似するとその差 $(f-f_0)$ に対する歪エネルギーは (2.1) により

$$E(f-f_0, f-f_0) = \int_C [(u-u_0)(p-p_0) + (v-v_0)(q-q_0)]\, ds$$

$$= E(f,f) - 2E(f,f_0) + E(f_0,f_0) > 0, \quad (5.1)$$

となるのでこれが最小となる為には右辺第1,2項は最大とならねばならない。

つまり

$$I = \int_C (up + vq - 2up_0 - 2vq_0)\, ds \quad , \quad \cdots (5.2)$$

が最大となればよい。

上式は p_0, q_0 が与えられた場合であるが、(u, v) が与えられる時は

$$\int_C (up_0 + vq_0)\, ds = \int_C (u_0 p + v_0 q)\, ds,$$

により右辺第2項を書きかえる。

* Courant, Hilbert, 前出 Bd. I, S. 206. (4章 §9,3)

昭和　　年　　月　　日

6. 結論

以上考察して来たように平面弾性問題においても流体力学と殆ど同じように簡単な応力状態の重ね合せで表現する事が出来る事がわかった。

又この核関数(又は基本特異性)は流体力学における吹出し又は2重吹出しと同程度の特異性(吹出しでは対数的無限大)しか示さないので数値解析上の困難も又流体力学と同程度である。
(勿論 聯立方程式の元数は倍である)

昭和　　年　　月　　日

附録A　平面応力状態

変位を u, v とすると 歪は、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (A.1)$$

応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ との関係は

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m}\right), \\ &\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \end{aligned}\right\} \qquad (A.2)$$

あるいは逆に

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{e'}{m-1}\right), \quad \sigma_y = 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{e'}{m-1}\right), \qquad (A.3)$$

ここに $\quad e' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{m-1}{mE}(\sigma_x + \sigma_y), \qquad (A.4)$

$1/m$ はポアソン比、E はヤング率、$G = \frac{mE}{2(m+1)}$,

u, v の満足すべき微分方程式は、

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 u + \frac{m}{m-1}\frac{\partial e'}{\partial x} = 0, \\ &\nabla^2 v + \frac{m}{m-1}\frac{\partial e'}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (A.5)$$

$$\nabla^2 e' = 0, \quad \nabla^4 u = 0, \quad \nabla^4 v = 0, \qquad (A.6)$$

次のように応力関数 f を導入すると、

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f, \\ &\nabla^4 f = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A.7)$$

$$\left.\begin{aligned} &u = \xi - \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial x} f, \\ &v = \eta - \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial y} f, \end{aligned}\right\} \qquad (A.8)$$

昭和　年　月　日

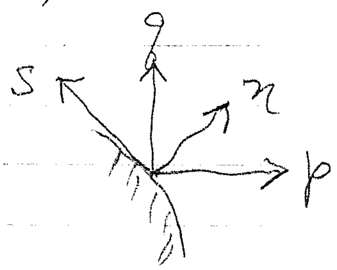
ここに

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial x} &= \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{E}\nabla^2 f = \frac{m}{m-1}e' \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} &= -\frac{\partial\xi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (A.9)$$

なる表現がある。

境界条件は変位 u, v と表面力 p, q で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} p &= \sigma_x \cos(n,x) + \tau_{xy}\cos(n,y) \\ q &= \sigma_y \cos(n,y) + \tau_{xy}\cos(n,x) \end{aligned}\right\} \quad (A.10)$$



応力関数を用いれば

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial y}f\right), \\ q &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right), \end{aligned}\right\} \quad (A.11)$$

又境界に垂直な力 p_n と平行な力 p_s に分解すれば

$$\left.\begin{aligned} p_n &= p\cos(nx) + p_y\cos(ny) \\ &= \sigma_x\cos^2(nx) + \sigma_y\cos^2(ny) + 2\tau_{xy}\cos(nx)\cos(ny) \\ p_s &= -(\sigma_y - \sigma_x)\cos(nx)\cos(ny) + \tau_{xy}\{\cos^2(nx) - \cos^2(ny)\} \end{aligned}\right\} \quad (A.12)$$

となるので
p_n は法線方行の引張応力、p_s は剪断応力となる。
自由辺では $p = q = 0$ であるから、$p_n = p_s = 0$ である。

昭和　　年　　月　　日

附録B. 基本特異性.

基本特異性として次の4つの応力関数を考える。点(x',y')にx,y方向の単位の力が加わった場合の応力関数

$$\left.\begin{aligned} S^{(1)}(x,y;x',y') &= \frac{1}{2\pi}\left[(y-y')\Theta - \frac{m-1}{2m}(x-x')\log R\right], \\ S^{(2)}(x,y;x',y') &= \frac{-1}{2\pi}\left[(x-x')\Theta + \frac{m-1}{2m}(y-y')\log R\right], \end{aligned}\right\} \quad (B.1)$$

点(x',y')においてx,y方向変位に単位の食違いがある応力関数

$$\left.\begin{aligned} S^{(3)}(x,y;x',y') &= -\frac{E}{4\pi}(y-y')\log R, \\ S^{(4)}(x,y;x',y') &= \frac{E}{4\pi}(x-x')\log R, \end{aligned}\right\} \quad (B.2)$$

ここに $R^2=(x-x')^2+(y-y')^2,\quad \tan\Theta = \dfrac{y-y'}{x-x'}.$

これらの応力関数から(A.8)のように変位が計算出来る。

$$\left.\begin{aligned} U^{(i)}(x,y;x',y') &= \Xi^{(i)}(x,y;x',y') - \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial x}S^{(i)}, \\ V^{(i)} &= H^{(i)} - \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial y}S^{(i)}, \end{aligned}\right\} \quad (B.3)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\Xi^{(i)} = \frac{\partial}{\partial y}H^{(i)} &= \frac{1}{E}\nabla^2_{(x,y)} S^{(i)}, \\ \frac{\partial}{\partial x}U^{(i)} + \frac{\partial}{\partial y}V^{(i)} &= \frac{m-1}{m}\frac{\partial}{\partial x}\Xi^{(i)}, \end{aligned}\right\} \quad (B.4)$$

$S^{(i)}$の微係数(および$U^{(i)}, V^{(i)}$)を列挙すれば次の通りである。

昭和　年　月　日

$$2\pi \frac{\partial}{\partial x} S^{(1)} = -\frac{m-1}{2m} \lg R + \frac{(m+1)(x-x')^2}{2m R^2} - 1,$$

$$2\pi \frac{\partial}{\partial y} S^{(1)} = \Theta + \frac{m+1}{2m} \frac{(x-x')(y-y')}{R^2},$$

$$2\pi \frac{\partial}{\partial x} S^{(2)} = -\Theta + \frac{m+1}{2m} \frac{(x-x')(y-y')}{R^2},$$

$$2\pi \frac{\partial}{\partial y} S^{(2)} = -\frac{m-1}{2m} \lg R + \frac{(m+1)}{2m} \frac{(y-y')^2}{R^2} - 1,$$

$$2\pi \frac{\partial}{\partial x} S^{(3)} = -\frac{E}{2} \frac{(x-x')(y-y')}{R^2}$$

$$2\pi \frac{\partial}{\partial y} S^{(3)} = -\frac{E}{2} \left[\lg R + \frac{(y-y')^2}{R^2} \right],$$

$$2\pi \frac{\partial}{\partial x} S^{(4)} = \frac{E}{2} \left[\lg R + \frac{(x-x')^2}{R^2} \right],$$

$$2\pi \frac{\partial}{\partial y} S^{(4)} = \frac{E}{2} \times \frac{(x-x')(y-y')}{R^2},$$

(B.5)

$$\Xi^{(1)} = \frac{1}{4\pi G} \lg R, \quad H^{(1)} = \frac{1}{4\pi G} \Theta,$$

$$\Xi^{(2)} = -\frac{\Theta}{4\pi G}, \quad H^{(2)} = \frac{1}{4\pi G} \lg R,$$

$$\Xi^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \Theta, \quad H^{(3)} = -\frac{1}{2\pi} \lg R,$$

$$\Xi^{(4)} = \frac{1}{2\pi} \lg R, \quad H^{(4)} = \frac{1}{2\pi} \Theta,$$

(B.6)

$$2\pi U^{(1)} = \frac{(3m-1)}{4mG} \lg R + \frac{1}{2G} - \frac{1}{2G} \times \frac{m+1}{2m} \times \frac{(x-x')^2}{R^2},$$

$$2\pi V^{(1)} = -\frac{m+1}{4mG} \frac{(x-x')(y-y')}{R^2},$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left.
\begin{aligned}
2\pi U^{(2)} &= -\frac{m+1}{4mG}\,\frac{(x-x')(y-y')}{R^2}, \\
2\pi V^{(2)} &= \frac{3m-1}{4mG}\,\lg R + \frac{1}{2G} - \frac{m+1}{4mG}\,\frac{(y-y')^2}{R^2},
\end{aligned}
\right\} \\
&\left.
\begin{aligned}
2\pi U^{(3)} &= \Theta + \frac{m+1}{2m} \times \frac{(x-x')(y-y')}{R^2}, \\
2\pi V^{(3)} &= -\frac{m-1}{2m}\,\lg R + \frac{m+1}{2m}\,\frac{(y-y')^2}{R^2},
\end{aligned}
\right\} \\
&\left.
\begin{aligned}
2\pi U^{(4)} &= \frac{m-1}{2m}\,\lg R - \frac{m+1}{2m}\,\frac{(x-x')^2}{R^2}, \\
2\pi V^{(4)} &= \Theta - \frac{m+1}{2m}\,\frac{(x-x')(y-y')}{R^2},
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}
\right\}
\quad (B.7)
$$

$S^{(1)}$, $S^{(2)}$ と $S^{(3)}$, $S^{(4)}$ の間には次の関係がある。

$$
\left.
\begin{aligned}
S^{(1)}(x,y;x',y') - \frac{1}{2G} S^{(4)}(x,y;x',y') &= \frac{1}{2\pi}\left[(y-y')\Theta - (x-x')\lg R\right], \\
S^{(2)} + \frac{1}{2G} S^{(3)} &= \frac{-1}{2\pi}\left[(x-x')\Theta + (y-y')\lg R\right],
\end{aligned}
\right\}
\quad (B.8)
$$

この右辺は調和関数である。
これを微分すると次の関係を得る。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} S^{(1)} &= -U^{(4)} - 1, \\
\frac{\partial}{\partial y} S^{(1)} &= U^{(3)},
\end{aligned}
\right\} \\
&\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} S^{(2)} &= -V^{(4)}, \\
\frac{\partial}{\partial y} S^{(2)} &= +V^{(3)} - 1.
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}
\right\}
\quad (B.9)
$$

又逆に

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} S^{(3)} = 4G^2 U^{(2)}, \\
&\frac{\partial}{\partial y} S^{(3)} = -4G^2 H^{(2)} - 2G \frac{\partial}{\partial y} S^{(2)}, \\
&\frac{\partial}{\partial x} S^{(4)} = 4G^2 \Xi^{(1)} + 2G \frac{\partial}{\partial x} S^{(1)}, \\
&\frac{\partial}{\partial y} S^{(4)} = -4G^2 V^{(1)},
\end{aligned}
\right\} \quad (B.10)
$$

なお

$$
V^{(1)} = U^{(2)}, \quad \cdots \qquad (B.11)
$$

である。

以上は点(x', y')に特異点がある時の点(x, y)における変位等である。
逆に点(x, y)に特異点がある時は

$$
S^{(i)}(x', y'; x, y),\ \frac{\partial}{\partial x'} S^{(i)}(x', y'; x, y),\ U^{(i)}(x', y'; x, y)
$$

等となる。
上の諸式において(x, y)と(x', y')を交換すると

$$
\left.
\begin{aligned}
&S^{(i)}(x', y'; x, y) = -S^{(i)}(x, y; x', y'), \\
&\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}\right) S^{(i)}(x', y'; x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) S^{(i)}(x, y; x', y'), \\
&\left.\begin{matrix} U^{(i)} \\ V^{(i)} \end{matrix}\right\} (x', y'; x, y) = \left.\begin{matrix} U^{(i)} \\ V^{(i)} \end{matrix}\right\} (x, y; x', y'), \\
&\left.\begin{matrix} \Xi^{(i)} \\ H^{(i)} \end{matrix}\right\} (x', y'; x, y) = \left.\begin{matrix} \Xi^{(i)} \\ H^{(i)} \end{matrix}\right\} (x, y; x', y'),
\end{aligned}
\right\} \quad (B.12)
$$

のようになる。

昭和　年　月　日

附録C　円孔の解

(3.10)の表現を用いて無限大平板中に円孔(半径1)がある場合の第2境界値問題を解いて見よう。

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\left[\sigma(\theta')S^{(1)} + \tau(\theta')S^{(2)}\right]d\theta', \quad \cdots (C.1)$$

今

$$\left.\begin{aligned}\sigma(\theta) &= \sum(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta),\\ \tau(\theta) &= \sum_n(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta).\end{aligned}\right\} \cdots (C.2)$$

とおいておこう。

又境界条件は

$$\left.\begin{aligned}p &= \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y}f = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta),\\ q &= -\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x}f = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\theta + D_n\sin n\theta),\end{aligned}\right\} (C.3)$$

ここに

$$\int_0^{2\pi}p\,d\theta = \int_0^{2\pi}q\,d\theta = 0 \quad \cdots\cdots (C.4)$$

そうすると円周上では

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x}S^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{m-1}{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\sin n(\theta-\theta') + \frac{m+1}{4m}\sin(\theta+\theta')\right],\\ \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x}S^{(2)} &= \frac{1}{2\pi}\left[-1-\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(\theta-\theta') - \frac{m+1}{4m}\cos(\theta+\theta')\right],\\ \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial y}S^{(1)} &= \frac{1}{2\pi}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(\theta-\theta') - \frac{m+1}{4m}\cos(\theta+\theta')\right],\\ \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial y}S^{(2)} &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{m-1}{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\sin n(\theta-\theta') - \frac{m+1}{4m}\sin(\theta+\theta')\right],\end{aligned}\right\} (C.5)$$

と展開出来るので (C.3) に (C.2) を代入して項別積分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x}\int_0^{2\pi}\sigma S^{(1)}d\theta' &= -\frac{m-3}{8m}a_1\sin\theta+\frac{3m-1}{8m}b_1\cos\theta+\frac{m-1}{4m}\sum_{n=2}^{\infty}(-a_n\sin n\theta+b_n\cos n\theta),\\
\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x}\int\tau S^{(2)}d\theta' &= -c_0-\frac{5m+1}{8m}c_1\cos\theta-\frac{3m-1}{8m}d_1\sin\theta-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta),\\
\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial y}\int\sigma S^{(1)}d\theta' &= a_0+\frac{3m-1}{8m}a_1\cos\theta+\frac{5m+1}{8m}b_1\sin\theta+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),\\
\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial y}\int_0^{2\pi}\tau S^{(2)}d\theta' &= -\frac{3m-1}{8m}c_1\sin\theta+\frac{m-3}{8m}d_1\cos\theta-\frac{m-1}{4m}\sum_{n=2}^{\infty}(c_n\sin n\theta-d_n\cos n\theta),
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
&A_0=0,\quad C_0=0\\
&A_1=\frac{3m-1}{8m}a_1+\frac{m-3}{8m}d_1,\quad B_1=\frac{5m+1}{8m}b_1-\frac{3m-1}{8m}c_1,\\
&A_n=\frac{a_n}{2}+\frac{m-1}{4m}d_n,\quad B_n=\frac{b_n}{2}-\frac{m-1}{4m}c_n,\\
&C_1=\frac{5m+1}{8m}c_1-\frac{3m-1}{8m}b_1,\quad D_1=\frac{3m-1}{8m}d_1+\frac{m-3}{8m}a_1,\\
&C_n=\frac{c_n}{2}-\frac{m-1}{4m}b_n,\quad D_n=\frac{d_n}{2}+\frac{m-1}{4m}a_n,
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

を得る。

これをといて

$$
\begin{aligned}
a_1&=\frac{m}{m^2-1}\left[(3m-1)A_1-(m-3)D_1\right],\\
b_1&=\frac{1}{2(m+1)}\left[(5m+1)B_1+(3m-1)C_1\right],\\
c_1&=\frac{1}{2(m+1)}\left[(3m-1)B_1+(5m+1)C_1\right],\\
d_1&=\frac{m}{m^2-1}\left[(3m-1)D_1-(m-3)A_1\right],
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

昭和　　年　　月　　日

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{8m^2}{(3m-1)(m+1)}\left[A_n - \frac{m-1}{2m}D_n\right], \\ b_n &= \;\;〃\;\; \left[B_n + \frac{m-1}{2m}C_n\right], \\ c_n &= \;\;〃\;\; \left[C_n + \frac{m-1}{2m}B_n\right], \\ d_n &= \;\;〃\;\; \left[D_n - \frac{m-1}{2m}A_n\right], \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{for } n \geq 2 \\ &(C.8') \end{aligned}$$

これを(C.1)に代入して

$$\left.\begin{aligned} \log R &= \log r - \sum_{n=1} \frac{\cos n(\theta-\theta')}{n r^n}, \\ \Theta &= \theta + \sum_{n=1} \frac{\sin n(\theta-\theta')}{n r^n}, \end{aligned}\right\}$$

なる展開を利用して積分すると結局

$$f(x,y) = f^{(1)}(x,y) + f^{(2)}(x,y), \qquad (C.9)$$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x,y) = A_1&\left[\frac{3m-1}{4(m-1)} + \frac{1}{2}\log r - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\cos 2\theta\right] \\ &+ \frac{(C_1-B_1)}{2}\left[\theta + \frac{m+1}{4m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\sin 2\theta\right] \\ &+ D_1\left[\frac{3m-1}{4(m-1)} + \frac{1}{2}\log r + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\cos 2\theta\right], \qquad (C.10) \end{aligned}$$

$$f^{(2)}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[(y-y')p'(\theta') - (x-x')q'(\theta')\right]\Theta\, d\theta', \qquad (C.11)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} p'(\theta) &= p(\theta) - A_1\cos\theta - B_1\sin\theta, \\ q'(\theta) &= q(\theta) - C_1\cos\theta - D_1\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (C.12)$$

を得る。

昭和　年　月　日

縁が自由で無限遠方でx一方向の単位引張応力が働いている場合は(4.13)により

$$A_1 = -1, \quad \cdots\cdots$$

となり解は直ちに(ただし定数は無意味なので省略する)

$$f_1(x,y) = -\frac{1}{2}\left[\log r - \left(1 - \frac{1}{2r^2}\right)\cos 2\theta\right], \quad (C.13)$$

を得る。

これから $\nabla^2 f_1 = \frac{-2\cos 2\theta}{r^2}$,

を得,又変位は

$$u_1 = +\frac{2\cos\theta}{Er} + \frac{1}{4Gr}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos 3\theta\Big|_{r=1} = \frac{2\cos\theta}{E},$$

$$v_1 = -\frac{2\sin\theta}{Er} + \frac{1}{2Gr}\left\{\sin\theta + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\sin 3\theta\right\}\Big|_{r=1} = -\frac{m-1}{mE}\sin\theta, \quad (C.14)$$

これより

$$c_2' = \int_0^{2\pi} u_1 \frac{\partial y}{\partial s} ds = -\frac{2\pi}{E},$$

$$d_1' = -\int_0^{2\pi} v_1 \frac{\partial x}{\partial s} ds = -\left(\frac{m-1}{m}\right)\frac{\pi}{E}, \quad (C.15)$$

又 $a_1' = +\pi = +A$

これを(4.14)に代入すると,

$$f_1(x,y) \doteqdot + \left(\frac{m-1}{2m}\log r - \frac{(m+1)x^2}{2mr^2}\right)$$

$$+ -\frac{1}{2}\left(\log r + \frac{y^2}{r^2}\right) + \frac{m-1}{2m}\left(\log r + \frac{x^2}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\log r - \cos 2\theta\right), \quad \cdots\cdots (C.16)$$

となって(C.13)で $r \to \infty$ としたものに一致する。

附録A 基本特異性

昭和　　年　　月　　日

i) 原点で x 方向に単位力(の2π倍)が働く場合　$\int p_x ds = 2\pi$

$$\chi = y\theta, \qquad (A.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi = -\frac{y^2}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\chi = \theta + \frac{xy}{r^2}, \qquad (A.2)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi = \frac{2xy^2}{r^4}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\chi = \frac{2x}{r^2} - \frac{2xy^2}{r^4} = \sigma_x$$

$$-\tau_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\chi = -\frac{2x^2 y}{r^4}, \quad \nabla^2\chi = \frac{2x}{r^2} \qquad (A.3)$$

$$\xi = \frac{2}{E}\log r, \quad \eta = \frac{2}{E}\theta, \qquad (A.4)$$

$$u = \frac{2}{E}\log r + \frac{y^2}{2Gr^2}, \quad v = \frac{2\theta}{E} - \frac{1}{2G}\left(\theta + \frac{xy}{r^2}\right)$$

$$v = \left(\frac{m-1}{mE}\right)\theta - \frac{xy}{2Gr^2}, \qquad (A.5)$$

ii) 原点で y 方向に単位力の2π倍が働く場合　$\int p_y ds = 2\pi$

$$\chi = -x\theta, \quad \frac{\partial}{\partial x}\chi = -\theta + \frac{xy}{r^2}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{x^2}{r^2}, \qquad (A.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi = \frac{2y}{r^2} - \frac{2x^2 y}{r^4}, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{2x^2 y}{r^4},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\chi = -\frac{2xy^2}{r^4}, \quad \nabla^2\chi = \frac{2y}{r^2}, \qquad (A.7)$$

$$\xi = -\frac{2}{E}\theta, \quad \eta = \frac{2}{E}\log r, \qquad (A.8)$$

$$u = -\frac{2}{E}\theta - \frac{1}{2G}\left(-\theta + \frac{xy}{r^2}\right) = -\frac{m-1}{mE}\theta - \frac{xy}{2Gr^2}$$

$$v = \frac{2}{E}\log r + \frac{x^2}{2Gr^2} \qquad (A.9)$$

$$u = -\frac{2}{E}\left(\theta + \frac{m+1}{2m}\frac{xy}{r^2}\right) = -\frac{2}{E}\frac{\partial}{\partial y}\chi^{(1)}$$ A-2

$$v = \frac{m-1}{mE}\left\{\log r - \frac{m(m+1)}{(m-1)2m}\frac{y^2}{r^2}\right\} = -\frac{2}{E}\frac{\partial}{\partial x}\chi^{(1)} + C_0 t$$

昭和　年　月　日

iii) x方向変位に2πの食違いがある場合

$$\chi = y \log r \qquad (A.10)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{xy}{r^2}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = \log r + \frac{y^2}{r^2} \qquad (A.11)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{y}{r^2} - \frac{2x^2y}{r^4}, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{y}{r^2} + \frac{2x^2y}{r^4}, \\ &\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = \frac{x}{r^2} - \frac{2xy^2}{r^4}, \quad \nabla^2 \chi = \frac{2y}{r^2}, \end{aligned}\right\} (A.12)$$

$$\xi = -\frac{2}{E}\theta, \quad \eta = \frac{2}{E}\log r,$$

$$\left.\begin{aligned} &u = -\frac{2}{E}\theta - \frac{xy}{2Gr^2}, \quad v = \frac{2}{E}\log r - \frac{1}{2G}\left(\log r + \frac{y^2}{r^2}\right), \\ &v = \frac{m-1}{mE}\log r - \frac{y^2}{2Gr^2}, \end{aligned}\right\} (A.13)$$

$$-\frac{2}{E}\theta - \frac{m+1}{mE}\frac{xy}{r^2}$$

iv) y方向の食違い

$$\frac{2}{E}\left(-\theta - \frac{m+1}{2m}\frac{xy}{r^2}\right)$$

$$\chi = x \log r$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi = \log r + \frac{x^2}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\chi = \frac{xy}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi = \frac{x}{r^2} + \frac{2y^2x}{r^4}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\chi = \frac{x}{r^2} - \frac{2xy^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\chi = \frac{y}{r^2} - \frac{2x^2y}{r^4}, \quad \nabla^2 \chi = \frac{2x}{r^2},$$

$$\xi = \frac{2}{E}\log r, \quad \eta = \frac{2}{E}\theta$$

$$u = \frac{2}{E}\log r - \frac{1}{2G}\left(\log r + \frac{x^2}{r^2}\right) = \frac{m-1}{mE}\log r - \frac{x^2}{2Gr^2},$$

$$v = \frac{2}{E}\theta - \frac{xy}{2Gr^2}$$

$$\frac{4m^2 - m^2 - 1}{4m^2}$$

$$\left(1 - \frac{(m-1)^2}{4m^2}\right) = \frac{3m^2+2m-1}{4m^2}$$

$$1 - \frac{m-1}{} \quad m+1$$

v)　x 方向に力が働き回転のない場合

$$\chi^{(1)} = y\theta - \left(\frac{m-1}{2m}\right) x \log r$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi^{(1)} = -\frac{y^2}{r^2} - \left(\frac{m-1}{2m}\right)\left(\log r + \frac{x^2}{r^2}\right) = -\frac{m-1}{2m}\log r \overbrace{- \frac{m-1}{2m} + \frac{m+1}{2m}\frac{y^2}{r^2}}^{-1 + \frac{(m+1)x^2}{2mr^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\chi^{(1)} = \theta + \frac{xy}{r^2} - \frac{m-1}{2m}\frac{xy}{r^2} = \theta + \frac{m+1}{2m}\frac{xy}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi^{(1)} = \frac{2xy^2}{r^4} - \frac{m-1}{2m}\left(\frac{x}{r^2} + \frac{2y^2x}{r^4}\right) = -\frac{m-1}{2m}\frac{x}{r^2} + \frac{m+1}{m}\frac{xy^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\chi^{(1)} = \frac{2x}{r^2} - \frac{2xy^2}{r^4} - \frac{m-1}{2m}\left(\frac{x}{r^2} - \frac{2xy^2}{r^4}\right) = \frac{3m+1}{2m}\frac{x}{r^2} - \frac{m+1}{m}\frac{xy^2}{r^4},$$

$$\nabla^2\chi^{(1)} = \frac{m+1}{m}\frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\chi^{(1)} = -\frac{m-1}{2m}\frac{y}{r^2} - \frac{2x^2y}{r^4}\frac{m+1}{2m},$$

$$\xi^{(1)} = \frac{\log r}{2G}$$

$$u^{(1)} = \frac{m+1}{mE}\log r + \frac{y^2}{2Gr^2} + \frac{m-1}{2m \times 2G}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{2G}\frac{m-1}{2m}\log r$$

$$\zeta^{(1)} = \frac{\theta}{2G}$$

$$= \frac{(3m-1)}{4mG}\log r + \frac{1}{2G} - \frac{x^2}{2Gr^2}\times\frac{m+1}{2m} \quad \xi^{(1)} - \frac{\partial\chi}{\partial x}$$

$$v^{(1)} = -\frac{xy}{2Gr^2} + \frac{m-1}{2m}\frac{xy}{2Gr^2} = -\frac{m+1}{4Gm}\frac{xy}{r^2},$$

vi)　y 方向に力が働き回転のない場合

$$\chi^{(2)} = -x\theta - \frac{m-1}{2m}y\log r,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi^{(2)} = -\theta + \frac{xy}{r^2} - \frac{m-1}{2m}\left(\frac{xy}{r^2}\right) = -\theta + \frac{m+1}{2m}\frac{xy}{r^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\chi^{(2)} = -\frac{x^2}{r^2} - \frac{m-1}{2m}\left(\log r + \frac{y^2}{r^2}\right) = -\frac{m-1}{2m}\log r - 1 + \frac{m+1}{2m}\frac{y^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi^{(2)} = \frac{2y}{r^2} - \frac{2x^2y}{r^4} - \frac{m-1}{2m}\left(\frac{y}{r^2} - \frac{2x^2y}{r^4}\right)$$

$$= \frac{3m+1}{2m}\frac{y}{r^2} - \frac{m+1}{m}\frac{x^2y}{r^4},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\chi^{(2)} = -\frac{2xy^2}{r^4} - \frac{m-1}{2m}\left(\frac{x}{r^2} - \frac{2xy^2}{r^4}\right) = -\frac{m-1}{2m}\frac{x}{r^2} - \frac{m+1}{m}\frac{xy^2}{r^4},$$

昭和　　年　　月　　日

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\chi^{(1)} + \frac{\partial}{\partial y}\chi^{(2)} = -\frac{m-1}{m}\log r - 1 - \frac{m-1}{2m}, \\
&\frac{\partial}{\partial y}\chi^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x}\chi^{(2)} = 2\theta, \\
&\frac{\partial}{\partial y}\chi^{(1)} + \frac{\partial}{\partial x}\chi^{(2)} = \frac{m+1}{m}\frac{xy}{r^2},
\end{aligned}\right.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u^{(1)} + \frac{1}{m-1}\frac{m-1}{2mG}\frac{x-x'}{R^2} = \frac{3m+1}{4mG}\frac{x-x'}{R^2} + \frac{(x-x')(y-y')^2}{2mGR^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}v^{(1)} + \frac{1}{2mG}\frac{y-y'}{R^2} = \frac{y-y'}{R^2}\frac{1-m}{4mG} + \frac{m+1}{2mG}\frac{(y-y')(x-x')^2}{R^2},$$

/

昭和　　年　　月　　日

$$\log(z-z') = \log R + i\Theta = \log z + \log\left(1-\frac{z'}{z}\right)$$

$$= \log r + i\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in(\theta'-\theta)}}{n r^n}$$

$$\therefore \log R = \log r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\theta-\theta')}{n r^n} \xrightarrow[r\to 1]{} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\theta-\theta')}{n}$$

$$\Theta = \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\theta-\theta')}{n r^n} \xrightarrow[r\to 1]{} \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,\overline{\theta-\theta'}}{n}$$

$$\frac{1}{z-z'} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z'}{z}\right)^n = \frac{x-x'-i(y-y')}{R^2}$$

$$\frac{x-x'}{R^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos n\theta' - \overline{n+1}\,\theta)}{r^{n+1}} \xrightarrow[r\to 1]{}$$

$$\frac{y-y'}{R^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\overline{n+1}\,\theta - n\theta')}{r^{n+1}}$$

$$\theta, \theta' = \frac{\theta+\theta'}{2} \pm \frac{\theta-\theta'}{2},$$

$r=1$

$$\frac{(x-x')^2}{R^2} \underset{r=1}{=} \frac{(\cos\theta-\cos\theta')^2}{2\{1-\cos\overline{\theta-\theta'}\}} = \frac{4\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}\sin^2\frac{\theta+\theta'}{2}}{4\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}} = \frac{1-\cos\overline{\theta+\theta'}}{2}$$

$$\frac{(x-x')(y-y')}{R^2} = \frac{4\left(-\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}} = -\frac{\sin\overline{\theta+\theta'}}{2}$$

$$\frac{(y-y')^2}{R^2} = \frac{4\cos^2\frac{\theta+\theta'}{2}\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}}{4\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}} = \frac{1+\cos\overline{\theta+\theta'}}{2},$$

昭和　　年　　月　　日

$$f(x,y) = \int_C \left[\sigma(\theta') S_y^{(1)} + \tau S^{(2)}\right] d\theta' \qquad (1.1)$$

$$f_x = \int_C \left(\sigma S_x^{(1)} + \tau S_x^{(2)}\right] d\theta' = \sum A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

$$f_y = \int_C \left(\sigma S_y^{(1)} + \tau S_y^{(2)}\right] d\theta' = \sum C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta$$

$$\sigma = \sum a_n \cos n\theta' + b_n \sin n\theta'$$

$$\tau = \sum c_n \cos n\theta' + d_n \sin n\theta'$$

$$S_x^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\left[+ \frac{m-1}{2m} \sum_{n=1} \frac{\cos n(\theta-\theta')}{n} + \frac{(m+1)}{4m}\left(1 - \cos\overline{\theta+\theta'}\right)\right] \quad -1$$

$$S_x^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\left[-\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\overline{\theta-\theta'}}{n} + \frac{m+1}{4m} \sin(\theta+\theta')\right]$$

$$S_y^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\left[+\theta + \sum_{n=1} \frac{\sin n\overline{\theta-\theta'}}{n} - \frac{m+1}{4m} \sin \overline{\theta+\theta'}\right]$$

$$S_y^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{m-1}{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\overline{\theta-\theta'}}{n} + \frac{m+1}{4m}\left(1 + \cos\overline{\theta+\theta'}\right) - 1\right]$$

$$\int_0^{2\pi} S_x^{(1)} \cos n\theta' \, d\theta' = \begin{cases} -1 + \frac{m+1}{4m}, & \text{for } n=0 \\ \frac{m-1}{4m}\cos\theta - \frac{m+1}{8m}\cos\theta & \text{for } n=1 \\ \frac{m-1}{4m}\frac{\cos n\theta}{n} & n \geq 2 \end{cases} \qquad \frac{2m-2-m-1}{8m}$$

$$\int_0^{2\pi} S_x^{(1)} \sin n\theta' \, d\theta' = \begin{cases} 0, & n=0 \\ \left(\frac{m-1}{4m} + \frac{m+1}{8m}\right)\sin\theta, & \text{for } n=1 \\ \frac{m-1}{\cdots}\sin n\theta, & \text{for } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} S_x^{(2)} \cos n\theta' d\theta' = \begin{cases} -\theta, & n=0. \\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{m+1}{8m}\right)\sin\theta, & n=1 \\ -\frac{\sin n\theta}{2n}, & \text{for } n \geq 2. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} S_x^{(2)} \sin n\theta' d\theta' = \begin{cases} 0 & \text{for } n=0. \\ \left(+\frac{1}{2} - \frac{m+1}{8m}\right)\cos\theta, & \text{for } n=1 \\ \frac{\cos n\theta}{2n}, & \text{for } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} S_y^{(1)} \cos n\theta' d\theta' = \begin{cases} \theta, & n=0. \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{m+1}{8m}\right)\sin\theta, & n=1 \\ \frac{\sin n\theta}{2n}, & \text{for } n \geq 2. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} S_y^{(1)} \sin n\theta' d\theta' = \begin{cases} 0 & \text{for } n=0 \\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{m+1}{8m}\right)\cos\theta, & n=1 \\ -\frac{\cos n\theta}{2n}, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} S_y^{(2)} \cos n\theta' d\theta' = \begin{cases} \frac{m+1}{4m} - 1, & \text{for } n=0. \\ \left(\frac{m-1}{4m} + \frac{m+1}{8m}\right)\cos\theta, & n=1 \\ \frac{m-1}{4m}\frac{\cos n\theta}{n}, & n \geq 2. \end{cases}$$

$\frac{3m-1}{8m}$

$$\int_0^{2\pi} S_y^{(2)} \sin n\theta' d\theta' = \begin{cases} 0, & n=0 \\ \left(\frac{m-1}{4m} - \frac{m+1}{8m}\right)\sin\theta, & n=1 \\ \frac{m-1}{4m}\frac{\sin n\theta}{n}, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\theta = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}, \quad \text{for } 0<\theta<2\pi$$

昭和　　年　　月　　日

$$\int_0^{2\pi}\sigma S_x^{(1)}\,d\theta' = \left(\frac{1-3m}{4m}\right)a_0 + \frac{m-3}{8m}a_1\cos\theta + \frac{m-1}{4m}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta}{n}$$
$$+ \frac{3m-1}{8m}b_1\sin\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\tau S_x^{(2)}\,d\theta' = -\theta c_0 - \frac{5m+1}{8m}c_1\sin\theta + \frac{3m-1}{8m}d_1\cos\theta$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n}\left[-c_n\sin n\theta + d_n\cos n\theta\right],$$

$$\int_0^{2\pi}\sigma S_y^{(1)}\,d\theta' = \theta a_0 + \frac{3m-1}{8m}a_1\sin\theta - \frac{5m+1}{8m}b_1\cos\theta$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n}\left[a_n\sin n\theta - b_n\cos n\theta\right]$$

$$\int_0^{2\pi}\tau S_y^{(2)}\,d\theta' = -\frac{3m-1}{4m}c_0 + \frac{3m-1}{8m}c_1\cos\theta + \frac{m-3}{8m}d_1\sin\theta$$
$$+ \frac{m-1}{4m}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left[c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta\right]$$

$$A_0 = \frac{1-3m}{4m}a_0$$

$$-q = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{2\pi}\left(\sigma S_x^{(1)} + \tau S_x^{(2)}\right)d\theta' = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n\cos n\theta + D_n\sin n\theta\right]$$

$$p = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{2\pi}\left(\sigma S_y^{(1)} + \tau S_y^{(2)}\right)d\theta' = \sum_{0}^{\infty}\left[A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta\right]$$

$$\int_0^{2\pi}\sigma S_{x\theta}^{(1)}d\theta' = -\frac{m-3}{8m}a_1\sin\theta + \frac{3m-1}{8m}b_1\cos\theta + \frac{m-1}{4m}\sum_{n=2}^{\infty}\left(-a_n\sin n\theta + b_n\cos n\theta\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\tau S_{x\theta}^{(2)}d\theta' = -c_0 - \frac{5m+1}{8m}c_1\cos\theta - \frac{3m-1}{8m}d_1\sin\theta - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\sigma S_{y\theta}^{(1)}d\theta' = a_0 + \frac{3m-1}{8m}a_1\cos\theta + \frac{5m+1}{8m}b_1\sin\theta + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\tau S_{y\theta}^{(2)}d\theta' = -\frac{3m-1}{8m}c_1\sin\theta + \frac{m-3}{8m}d_1\cos\theta - \frac{m-1}{4m}\sum_{n=2}\left[c_n\sin n\theta - d_n\cos n\theta\right],$$

$\therefore$ $A_0 = a_0$

$$A_1 = \frac{3m-1}{8m}a_1 + \frac{m-3}{8m}d_1, \quad B_1 = \frac{5m+1}{8m}b_1 - \frac{3m-1}{8m}c_1,$$

$$A_n = \frac{a_n}{2} + \frac{m-1}{4m}d_n, \quad B_n = \frac{b_n}{2} - \frac{m-1}{4m}c_n,$$

$C_0 = c_0$

$$C_1 = \frac{5m+1}{8m}c_1 - \frac{3m-1}{8m}b_1, \quad D_1 = \frac{3m-1}{8m}d_1 + \frac{m-3}{8m}a_1,$$

$$C_n = \frac{c_n}{2} - \frac{m-1}{4m}b_n, \quad D_n = \frac{d_n}{2} + \frac{m-1}{4m}a_n, \qquad \frac{m-1}{2m}$$

$$\frac{3m-1}{8m}A_1 - \frac{m-3}{8m}D_1 = \left[\left(\frac{3m-1}{8m}\right)^2 - \left(\frac{m-3}{8m}\right)^2\right]a_1 = (3m-1-m+3)(3m-1+m-3)$$

$(2m+2)(4m-4)$

$64m^2$

$$\frac{m-3}{8m}A_1 - \frac{3m-1}{8m}D_1 = \left[\left(\frac{m-3}{8m}\right)^2 - \left(\frac{3m-1}{8m}\right)^2\right]d_1$$

$(m+1)(m-1)$

$8m^2$

昭和　　年　　月　　日

$$\frac{5m+1}{8m}B_1 + \frac{3m-1}{8m}C_1 = \left[\left(\frac{5m+1}{8m}\right)^2 - \left(\frac{3m-1}{8m}\right)^2\right] b_1$$

$$\frac{3m-1}{8m}B_1 + \frac{5m+1}{8m}C_1 = -\left[\quad '' \quad\right] C_1$$

$$\frac{1}{2}A_n - \frac{m-1}{4m}D_n = \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{m-1}{4m}\right)^2\right] a_n$$

$$-\frac{m-1}{4m}A_n + \frac{1}{2}D_n = \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{m-1}{4m}\right)^2\right] d_n$$

$$\frac{1}{2}B_n + \frac{m-1}{4m}C_n = \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{m-1}{4m}\right)^2\right] b_n$$

$$\frac{m-1}{4m}B_n + \frac{1}{2}C_n = \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{m-1}{4m}\right)^2\right] C_n$$

$$a_n = \frac{8m^2}{(3m-1)(m+1)}\left[A_n - \frac{m-1}{2m}D_n\right]$$

$$b_n = \quad '' \quad \left[B_n + \frac{m-1}{2m}C_n\right]$$

$$c_n = \quad '' \quad \left[C_n + \frac{m-1}{2m}B_n\right]$$

$$d_n = \alpha \left[D_n - \frac{m-1}{2m}A_n\right]$$

$n \geq 2.$

$$a_0 = A_0, \quad c_0 = C_0$$

$$a_1 = \frac{m}{m^2-1}\left[(3m-1)A_1 - (m-3)D_1\right] = \alpha\left[A_1 - \frac{m-1}{2m}D_1\right] + \frac{m(m+1)}{(m-1)(3m-1)}(A_1 + D_1)$$

$$b_1 = \frac{1}{2(m+1)}\left[(5m+1)B_1 + (3m-1)C_1\right] = \alpha\left[B_1 + \frac{m-1}{2m}C_1\right] + \frac{1}{2(3m-1)}\left[-(m+1)B_1 + \frac{(m-1)^2}{(m+1)}C_1\right]$$

$$C_1 = \frac{1}{2(m+1)}\left[(3m-1)B_1 + (5m+1)C_1\right] = \alpha\left[C_1 + \frac{m-1}{2m}B_1\right] + \frac{\left[-(m+1)^2C_1 + (m-1)^2B_1\right]}{2(m+1)(3m-1)}$$

$$d_1 = \frac{m}{m^2-1}\left[(3m-1)D_1 - (m-3)A_1\right] = \alpha\left[D_1 - \frac{m-1}{2m}A_1\right] + \frac{m(m+1)}{(m-1)(3m-1)}(D_1 + A_1)$$

$$\frac{m(3m-1)}{m^2-1} - \frac{8m^2}{(3m-1)(m+1)} = \frac{m}{(m+1)(3m-1)}\left[\frac{(3m-1)^2}{m-1} - 8m\right] = \frac{m(m+1)}{(m-1)(3m-1)}$$

$9m^2+1-6m$

m^2+2m+1

$$\frac{m(m-3)}{m^2-1} - \frac{\alpha(m-1)m}{(3m-1)(m+1)2m^2} = \frac{m}{(m^2-1)(3m-1)}\left[(m-3)(3m-1) - 4(m-1)^2\right]$$

$3m^2 - 10m + 3 - [4m^2 - 8m + 4]$

$$= \frac{-m(m+1)}{(m-1)(3m-1)}$$

$-m^2 - 2m - 1$

$$\frac{5m+1}{2(m+1)} - \frac{8m^2}{(3m-1)(m+1)} = \frac{(5m+1)(3m-1) - 16m^2}{2(m+1)(3m-1)} = -\frac{(m+1)}{2(3m-1)}, \quad \frac{3m-1}{2(m+1)} - \frac{4m(m-1)}{(3m-1)(m+1)} = \frac{(3m-1)^2 - 8m^2+8m}{\dots}$$

$$\sigma = \sum_0 (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),\ \tau$$

$$\tau = \sum_0 (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta),$$

$$p = \sum_0 (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

$$q = \sum (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta),$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{p} &= \sum_{n=1} (A_n \sin n\theta - B_n \cos n\theta) \\ \tilde{q} &= \sum_{n=1} (C_n \sin n\theta - D_n \cos n\theta)\end{aligned}\right\} \text{conjugate}$$

$$\sigma(\theta) = \alpha\, p(\theta) - \alpha \frac{m-1}{2m} \tilde{q}(\theta) + \beta (A_1 + D_1) \cos\theta + \gamma \left\{ B_1 + \frac{(m-1)^2}{(m+1)^2} C_1 \right\} \sin\theta$$

$$\tau(\theta) = \alpha \left[q(\theta) - \frac{m-1}{2m} \tilde{p}(\theta) \right] + \gamma \left\{ -C_1 + \frac{(m-1)^2}{(m+1)^2} B_1 \right\} \cos\theta + \beta (A_1 + D_1) \sin\theta,$$

$$\alpha = \frac{8m^2}{(m+1)(3m-1)},\quad \beta = \frac{m(m+1)}{(m-1)(3m-1)},\quad \gamma = \frac{m+1}{2(3m-1)}$$

$$-(m+1)^2 B_1 + (m-1)^2 C_1 = (m^2+1)(-B_1 + C_1) + 2m(B_1 + C_1)$$

$$(m-1)^2 B_1 - (m+1)^2 C_1 = (m^2+1)(B_1 - C_1) - 2m(B_1 + C_1)$$

$\cos\theta' \cos(\theta-\theta') = \cos\theta \cos 2\theta'$

昭和　　年　　月　日　$\cos n\theta'$

$$\cancel{(x-x')\lg R = (r\cos\theta - \cos\theta')} \left[\lg r - \sum_{n=1} \frac{\cos n(\theta-\theta')}{n r^n}\right]$$

$$(y-y')\lg R = (r\sin\theta - \sin\theta')\left[\qquad\right]$$

$$(x-x')\,\Theta = (r\cos\theta - \cos\theta')\left[\theta + \sum_{n=1}\frac{\sin n(\theta-\theta')}{n r^n}\right]$$

$$(y-y') \quad = (r\sin\theta - \sin\theta')\left[\theta + \qquad\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\lg R\,d\theta' = r\lg r\cos\theta + \frac{\cos\theta}{2r} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\lg R\cos\theta'\,d\theta' = r\cos\theta\left[-\frac{\cos\theta}{2r}\right] - \left[\frac{\lg r}{2} + \frac{\cos 2\theta}{8r^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\lg r - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 2\theta}{8r^2}$$

$n \geq 2$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lg r - \frac{\cos 2\theta}{4}\left(1 - \frac{1}{2r^2}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\lg R\cos n\theta'\,d\theta' = r\cos\theta\left[-\frac{\cos n\theta}{2n r^n}\right] \qquad n \geq 2$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\left[\cos(n-1)\theta' + \cos(n+1)\theta'\right]\lg R\,d\theta'$$

$$= -\frac{\cos\theta\cos n\theta}{2n r^{n-1}} + \frac{1}{4}\left[\frac{\cos(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}} + \frac{\cos(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}}\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{4n r^{n-1}} + \frac{1}{4(n-1)r^{n-1}}\right)\cos(n-1)\theta + \left(-\frac{1}{4n r^{n-1}} + \frac{1}{4(n+1)r^{n+1}}\right)\cos(n+1)\theta$$

$$= \frac{\cos(n-1)\theta}{4r^{n-1}}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{\cos(n+1)\theta}{4r^{n+1}}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{r^2}{n}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\lg R\sin\theta'\,d\theta' = r\cos\theta\left[-\frac{\sin\theta}{2r}\right] + \frac{\sin 2\theta}{2\times 2\times 2 r^2}$$

$$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8r^2}\right)\sin 2\theta$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\lg R\sin n\theta'\,d\theta' = -r\cos\theta\frac{\sin n\theta}{2n r^n} + \frac{1}{4\pi}\int\lg R\,[\cos(n-1)\theta' - \cos(n+1)\theta'] \qquad n \geq 2$$

$$= -\frac{\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta}{4n r^{n-1}} + \frac{\sin(n-1)\theta}{4(n-1)r^{n-1}} + \frac{\sin(n+1)\theta}{4(n+1)r^{n+1}}$$

$$= \frac{\sin(n-1)\theta}{4r^{n-1}}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{\sin(n+1)\theta}{4r^{n+1}}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{r^2}{n}\right)$$

昭和　　年　　月　　日

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\log R\,d\theta' = r\log r\sin\theta + \frac{\sin\theta}{2r}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\log R\cos\theta'\,d\theta' = r\sin\theta\left(-\frac{\cos\theta}{2r}\right) + \frac{\sin 2\theta}{8r^2} = \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8r^2}\right)\sin 2\theta$$

$n \geq 2$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\log R\cos n\theta'\,d\theta' = -r\sin\theta\times\frac{\cos n\theta}{2nr^n} + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}} - \frac{\sin(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{\sin(n-1)\theta}{4r^{n-1}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right) + \frac{\sin(n+1)\theta}{4r^{n+1}}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{r^2}{n}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\log R\sin\theta'\,d\theta' = r\sin\theta\left[-\frac{\sin\theta}{2r}\right] + \left[\frac{1}{2}\log r + \frac{\cos 2\theta}{8r^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log r + \frac{\cos 2\theta}{4}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\log R\sin n\theta'\,d\theta' = -r\sin\theta\times\frac{\sin n\theta}{2nr^n} + \frac{1}{4}\left[\frac{\cos(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}} - \frac{\cos(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\Theta\,d\theta' = r\cos\theta - \frac{\sin\theta}{2r}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\Theta\cos\theta'\,d\theta' = r\cos\theta\,\frac{\sin\theta}{2r} - \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4\cdot 2r^2}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\Theta\cos n\theta'\,d\theta' = r\cos\theta\,\frac{\sin n\theta}{2nr^n} - \left[\frac{\sin(n-1)\theta}{4r^{n-1}(n-1)} + \frac{\sin(n+1)\theta}{4(n+1)r^{n+1}}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\Theta\sin\theta'\,d\theta' = r\cos\theta\left(-\frac{\cos\theta}{2r}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos 2\theta}{2r^2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\Theta\sin n\theta'\,d\theta' = r\cos\theta\left(\frac{-\cos n\theta}{2nr^n}\right) + \frac{1}{4}\left[\frac{\cos(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}} + \frac{\cos(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\Theta\,d\theta' = r\theta\sin\theta + \frac{\cos\theta}{2r}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\Theta\cos\theta'\,d\theta' = r\sin\theta\,\frac{\sin\theta}{2r} - \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2r^2}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\Theta\sin\theta'\,d\theta' = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{\sin 2\theta}{2r^2} - \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\Theta\cos n\theta'\,d\theta' = r\sin\theta\,\frac{\sin n\theta}{2nr^n} + \frac{1}{4}\left[\frac{\cos(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}} - \frac{\cos(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\Theta\sin n\theta'\,d\theta' = r\sin\theta\left(-\frac{\cos n\theta}{2nr^n}\right) + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}} - \frac{\sin(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}}\right]$$

$n \geq 2$ 昭和 年 月 日

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\log R\cos n\theta' d\theta' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\,H\,\sin n\theta' d\theta'$$

$$\int_0^{2\pi}(x-x')\log R\sin n\theta' d\theta' = -\int_0^{2\pi}(x-x')\,H\,\cos n\theta' d\theta'$$

$$\int_0^{2\pi}(y-y')\log R\cos n\theta' d\theta' = \int_0^{2\pi}(y-y')\,H\,\sin n\theta' d\theta'$$

$$\int_0^{2\pi}(y-y')\log R\sin n\theta' d\theta' = -\int_0^{2\pi}(y-y')\,H\,\cos n\theta' d\theta'$$

円孔 自由 [illegible]の解

昭和　　年　　月　　日

$A_1 = 1$, 他は0. , $\quad a_1 + d_1 = \frac{m(2m+2)}{m^2-1} = \frac{2m}{m-1}$

$a_1 - d_1 = \frac{m\,4(m-1)}{m^2-1} = \frac{4m}{m+1}$

$a_1 = \frac{m(3m-1)}{m^2-1}$, $d_1 = -\frac{m(m-3)}{m^2-1}$, 他は0.

$$f = \int_0^{2\pi}\left[a_1\cos\theta' S^{(1)} + d_1\sin\theta' S^{(2)}\right]d\theta'$$

$$= \frac{a_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta'\left[(y-y')\Theta - \frac{m-1}{2m}(x-x')\log R\right]d\theta'$$

$$- \frac{d_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta'\left[(x-x')\Theta + \frac{m-1}{2m}(y-y')\log R\right]d\theta'$$

$$= a_1\left[\frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{\cos 2\theta}{8r^2} + \frac{m-1}{2m}\left(+\frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\log r}{2} - \frac{\cos 2\theta}{8r^2}\right)\right]$$

$$- d_1\left[-\frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos 2\theta}{8r^2} + \frac{m-1}{2m}\left(-\frac{\sin^2\theta}{2} - \frac{\log r}{2} - \frac{\cos 2\theta}{8r^2}\right)\right]$$

$$= a_1\left[\frac{3m-1}{8m} + \frac{m-1}{4m}\log r - \frac{m+1}{8m}\cos 2\theta + \frac{m+1}{16mr^2}\cos 2\theta\right]$$

$$- d_1\left[-\frac{3m-1}{8m} - \frac{m-1}{4m}\log r - \frac{m+1}{8m}\cos 2\theta + \frac{m+1}{16mr^2}\cos 2\theta\right]$$

$$= \frac{3m-1}{4(m-1)} + \frac{1}{2}\log r - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{\cos 2\theta}{4r^2}$$ // O.K.

$$\left(\frac{1}{2}\log r - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 2\theta}{4r^2}\right)$$

昭和　年　月　日

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta' S^{(1)}d\theta' = \frac{\sin 2}{2}\theta + \frac{\cos 2\theta}{8r^2} + \frac{m-1}{2m}\left(\frac{1}{4}+\frac{\log r}{2}+\frac{\cos 2\theta}{4}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\right)$$

$$= \frac{3m-1}{8m} - \frac{m+1}{8m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\cos 2\theta + \frac{m-1}{4m}\log r$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta' S^{(1)}d\theta' = -\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 2\theta}{8r^2} + \frac{m-1}{8m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\sin 2\theta - \frac{\theta}{2}$$

$$= -\frac{m+1}{8m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\sin 2\theta - \frac{\theta}{2}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta' S^{(2)}d\theta' = -\frac{\sin 2\theta}{4} + \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{8r^2}\right] - \frac{m-1}{2m}\left[-\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\sin 2\theta}{8r^2}\right]$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{m+1}{8m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\sin 2\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta' S^{(2)}d\theta' = \frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{\cos 2\theta}{8r^2} - \frac{m-1}{2m}\left[-\frac{1}{4}-\frac{\log r}{2}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\cos 2\theta\right]$$

$$= \frac{3m-1}{8m} + \frac{m-1}{4m}\log r + \frac{m+1}{8m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left[(a_1\cos\theta'+b_1\sin\theta')S^{(1)} + (c_1\cos\theta'+d_1\sin\theta')S^{(2)}\right]d\theta'$$

$$= A_1\int_0^{2\pi}\frac{m}{m^2-1}\left[\cos\theta'(3m-1)S^{(1)} - (m-3)S^{(2)}\sin\theta'\right]d\theta'$$

$$+ B_1\int_0^{2\pi}\frac{1}{2(m+1)}\left[\sin\theta'(3m+1)S^{(1)} + (3m-1)\cos\theta' S^{(2)}\right]d\theta'$$

$$+ \frac{C_1}{2(m+1)}\int_0^{2\pi}\left[(3m-1)\sin\theta' S^{(1)} + (3m+1)\cos\theta' S^{(2)}\right]d\theta'$$

$$+ \frac{m}{m^2-1}P_1\int_0^{2\pi}\left[-(m-3)S^{(1)}\cos\theta' + (3m-1)\sin\theta' S^{(2)}\right]d\theta'$$

$\cancel{2m+2}$

昭和　　年　　月　　日

$$f^{(1)} = A_1 \frac{m}{m^2-1}\left[\frac{3m+1}{4m}(m+1) + \frac{m^2-1}{2m}\log r - \frac{m^2-1}{2m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\cos 2\theta\right]$$

$$+ \frac{B_1(-2)}{2(m+1)}\left[(m+1)\right]\left[\frac{\theta}{2} + \frac{(m+1)}{8m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\sin 2\theta\right.$$

$$+ \frac{C_1}{2(m+1)}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{m+1}{8m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\sin 2\theta\right]$$

$$+ D_1 \frac{m}{m^2-1}\left[\frac{(3m-1)(m+1)}{4m} + \frac{m^2-1}{2m}\log r + \frac{m^2-1}{2m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\cos 2\theta\right]$$

I

$$f^{(1)} = A_1\left[\frac{3m-1}{4(m-1)} + \frac{1}{2}\log r - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\cos 2\theta\right]$$

II

$$+ \frac{1}{2}(C_1 - B_1)\left[\theta + \frac{m+1}{4m}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\sin 2\theta\right]$$

$$+ D_1\left[\frac{3m-1}{4(m-1)} + \frac{1}{2}\log r + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2r^2}\right)\cos 2\theta\right]$$

$$I = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')\log R \sin\theta' d\theta' = \frac{\log r}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-y')(\mathrm{I})\cos\theta' d\theta'$$

$$\mathrm{III} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')\log R \cos\theta' d\theta' = \frac{\log r}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-x')(\mathrm{I})\sin\theta' d\theta'$$

$$\mathrm{II} = -\frac{1}{2\pi}\int(y-y')(\mathrm{II})\sin\theta' d\theta'$$

$A_n \cos n\theta \quad \cancel{\int_0^{2\pi}\left[a_n \cos n\theta' \ldots \sin n\theta' S^{(1)} \ldots (C_n \cos n\theta + \ldots\right.}$

昭和 $n \geq 2$ 年 月 日

$$A_n \quad I_1 = \int_0^{2\pi}\left[\cos n\theta' S^{(1)} - \frac{m-1}{2m}\overset{\sin n\theta'}{S^{(2)}}\right] d\theta' = \frac{1}{4\pi\alpha}\int_0^{2\pi} \cos n\theta' (y-y') \textcircled{H}\, d\theta'$$

$$D_n \quad I_2 = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{m-1}{2m}\cos n\theta' S^{(1)} + \sin n\theta' S^{(2)}\right] d\theta' = \frac{-1}{4\pi\alpha}\int_0^{2\pi} \cos n\theta' (x-x') \textcircled{H}\, d\theta'$$

$(y-y')\textcircled{H} - \frac{m-1}{2m} \ldots$

$$B_n \quad I_3 = \int_0^{2\pi}\left[\sin n\theta' S^{(1)} + \frac{m-1}{2m}\cos n\theta' S^{(2)}\right] d\theta' = \frac{1}{4\pi\alpha}\int_0 \sin n\theta (y-y') \textcircled{H}\, d\theta'$$

$+\frac{m-1}{2m}(x-x')\textcircled{H}\cos n\theta'$

$$C_n \quad I_4 = \int_0^{2\pi}\left[\frac{m-1}{2m}\sin n\theta' S^{(1)} + \cos n\theta' S^{(2)}\right] d\theta' = \frac{-1}{4\pi\alpha}\int_0^{2\pi} \sin n\theta' (x-x') \textcircled{H}\, d\theta'$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta' S^{(1)} d\theta' = \left[\frac{\sin\theta \sin n\theta}{2n r^{n-1}} + \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}} - \frac{\cos(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}}\right)\right] - \frac{m-1}{2m}\left[-\frac{\cos\theta\cos n\theta}{2n r^{n-1}} + \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}} + \frac{\cos(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}}\right)\right]$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta' S^{(2)} d\theta' = -\left[-\frac{\cos\theta\cos n\theta}{2r^{n-1}} + \frac{1}{4}\left\{\frac{\cos(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}} + \frac{\cos(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}}\right\}\right] - \frac{m-1}{2m}\left[-\frac{\sin\theta\sin n\theta}{2n r^{n-1}} + \frac{1}{4}\left\{\frac{\cos(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}} - \frac{\cos(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}}\right\}\right]$$

$$1 - \frac{(m-1)^2}{4m^2} = \frac{(3m-1)(m+1)}{4m^2} = \frac{2}{\alpha}$$

$$I_1 = \frac{2}{\alpha}\left[\frac{\sin\theta\sin n\theta}{n r^{n-1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}} - \frac{\cos(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}}\right)\right]$$

$$I_2 = \frac{2}{\alpha}\left[\frac{\cos\theta\cos n\theta}{n r^{n-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(n+1)\theta}{(n+1)r^{n+1}} - \frac{\cos(n-1)\theta}{(n-1)r^{n-1}}\right)\right]$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\sin n\theta'(y-y')\textcircled{H} + \frac{m-1}{2m}\cos n\theta'(x-x')\textcircled{H}$$
$$- \frac{m-1}{2m}\left\{\cos n\theta'(x-x')\textcircled{H} + \frac{m-1}{2m}(y-y')\textcircled{H}\right\}\Big] d\theta'$$
$$= \frac{2}{2\pi\alpha}\int_0^{2\pi} \sin n\theta'(y-y')\textcircled{H}\, d\theta' \quad = -\frac{2}{2\pi\alpha}\int_0^{2\pi} \sin n\theta (x-x')\textcircled{H}\, d\theta'$$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{m-1}{2m}\left\{\sin n\theta'(y-y')\textcircled{H} + \frac{m-1}{2m}(x-x')\textcircled{H}\right\}$$
$$- \left\{\cos n\theta'(x-x')\textcircled{H} + \frac{m-1}{2m}(y-y')\textcircled{H}\right\}\Big]$$

昭和　　年　　月　　日

$$\left.\begin{aligned} p'(\theta) &= p(\theta) - A_1 \cos\theta - B_1 \sin\theta \\ q'(\theta) &= q(\theta) - C_1 \cos\theta - D_1 \sin\theta \end{aligned}\right\}.$$

$$f = f^{(1)} + f^{(2)}$$

$\frac{\partial}{\partial x} \textcircled{H} = -\frac{\partial}{\partial y} \log R$

$$f^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(y-y')p'(\theta') - (x-x')q'(\theta')\right] \textcircled{H}\, d\theta'.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{p'(y-y')^2}{R^2} - q'\left\{\textcircled{H} - \frac{(x-x')(y-y')}{R^2}\right\}\right] d\theta'.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[p'\left\{\textcircled{H} + \frac{(x-x')(y-y')}{R^2}\right\} - q'\frac{(x-x')(y-y')}{R^2}\right] d\theta'$$

D.K.

昭和　　年　　月　　日

$$d_1^2 = \frac{(m-1)}{m}\frac{\pi}{E}$$

$$+\pi\frac{\partial}{\partial x}S^{(1)}(x,y;0,0) + d_1^2\frac{\partial}{\partial x}S^{(4)} = -\frac{m-1}{4m}\log \cancel{R} \mp \frac{(m+1)x^2}{4m\,r^2} \mp \frac{1}{2}$$

$$-+\frac{m-1}{4m}\left[\log \cancel{R} + \frac{x^2}{r^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{E}\frac{\partial}{\partial y}g^{(3)} = -\frac{1}{2}\left[\log r + \frac{y^2}{r^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\log r + \frac{x^2-y^2}{2r^2}$$

$$\frac{1}{2m}\log r \quad -\frac{m+1}{2m}\frac{}{r}$$

昭和　　年　　月　　日

$$f_1 = \frac{1}{2}\lg r - \frac{(x^2-y^2)}{2r^2} + \frac{x^2-y^2}{4r^4}$$

$$f_2 = \frac{1}{2}\lg r + \frac{x^2-y^2}{2r^2} - \frac{x^2-y^2}{4r^4}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_1 = \frac{x}{2r^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{r^2} - \frac{2x(x^2-y^2)}{r^4}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{2x}{r^4} - \frac{4x(x^2-y^2)}{r^6}\right]$$

$$= -\frac{x}{2r^2} + \frac{x(x^2-y^2)}{r^4} + \frac{x}{2r^4} - \frac{x(x^2-y^2)}{r^6}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f_1 = \frac{y}{2r^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{-2y}{r^2} - \frac{2y(x^2-y^2)}{r^4}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{-2y}{r^4} - \frac{4y(x^2-y^2)}{r^6}\right]$$

$$= \frac{y(x^2-y^2)}{r^4} - \frac{y}{2r^4} - \frac{y(x^2-y^2)}{r^6} + \frac{3y}{2r^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{3x^2-y^2}{r^4} - \frac{4x^2(x^2-y^2)}{r^6} + \frac{1}{2r^4} - \frac{2x^2}{r^6}$$

$$- \frac{3x^2-y^2}{r^6} + \frac{6x^2(x^2-y^2)}{r^8} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}\right)$$

$=$

$-3 + 1 - \frac{1}{2} + 1 + 3 - 6 + 1 - 2$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \frac{x^2-3y^2}{r^4} - \frac{4y^2(x^2-y^2)}{r^6} - \frac{1}{2r^4} + \frac{2y^2}{r^6}$$

$$- \frac{x^2-3y^2}{r^6} + \frac{6y^2(x^2-y^2)}{r^8} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4}\right)\frac{3}{2}$$

$$\nabla^2 f_1 = \frac{4(x^2-y^2)}{r^4} - \frac{4(x^2-y^2)}{r^4} + \frac{2(y^2-x^2)}{r^6} - \frac{4(x^2-y^2)}{r^6}$$

$$+ \frac{6(x^2-y^2)}{r^8} + 2\frac{x^2-y^2}{r^4}$$

$$= 2\frac{x^2-y^2}{r^4}$$ O.K.

$\xi_1 = \frac{-2x}{Er^2}$, $\eta_1 = \frac{-2y}{Er^2}$

昭和　　年　　月　　日

$$u_1 = \xi_1 - \frac{1}{2G}\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{2\cos\theta}{Er} - \frac{1}{4Gr}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cos 3\theta$$

$$v_1 = \eta_1 - \frac{1}{2G}\frac{\partial f_1}{\partial y} = +\frac{2\sin\theta}{Er} - \frac{1}{2Gr}\left\{\sin\theta + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\sin 3\theta\right\}$$

$$u_1\Big|_{r=1} = -\frac{2}{E}\cos\theta,$$

$$\frac{m+1}{2mE} \qquad \frac{m+1}{2m}+1 = \frac{3m+1}{2m}$$

$$v_1\Big|_{r=1} = +\frac{2}{E}\sin\theta\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{4G}\right) = \frac{m-1}{mE}\sin\theta$$

$$\frac{1}{2G}$$

$$\cos\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} u_1\, p_1\, d\theta = +\frac{2\pi}{E}$$

$$p_1 = -\cos\theta$$

$$q_2 = -\sin\theta$$

$$d_1^2 = \int_0^{2\pi} v_1\, q_2\, d\theta = \frac{m-1}{mE}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \frac{(m-1)}{m}\frac{\pi}{E}$$

$$(u_1 p_2 + v_1 q_1)$$

$$\frac{3m+1 + (m-1)}{4m} = 1$$

$$u_2 p_1 + v_2 q_1$$

$$\frac{x}{r^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} = \frac{x^2-y^2}{r^4}$$

$\cos 2\theta - 2\sin^2\theta = \cos 2\theta - (1 - \cos 2\theta)$

昭和　　年　　月　　日

$$\frac{\partial}{\partial x} f_1 = -\frac{x[x^2+y^2-2x^2+2y^2]}{2r^4} + \frac{x[-x^2+3y^2]}{2r^6}$$

$$= \frac{x[x^2-3y^2]}{2r^4} + \frac{x(-x^2+3y^2)}{2r^6} = \frac{\cos\theta}{2r^2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)(2\cos 2\theta - 1)$$

$(\cos\theta + \cos 3\theta - \cos\theta)$

$$= \frac{1}{2r^2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cos 3\theta$$

$3x^2+y^2$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1 = \frac{y\{3(x^2+y^2)+2(x^2-y^2)\}}{2r^4} - \frac{y[(x^2+y^2)+2(x^2-y^2)]}{2r^6}$$

$5x^2+y^2$

$\sin\theta(2+\cos 2\theta)$

$$= \frac{y\{5x^2+y^2\}}{2r^4} - \frac{y(3x^2+y^2)}{2r^6}$$

$$= \left[\frac{3+2\cos 2\theta}{2r^2} - \frac{1+2\cos 2\theta}{2r^3}\right]\sin\theta$$

$3\sin\theta$ θ $+\sin 3\theta - \sin\theta$

$$= \frac{\sin 3\theta + 2\sin\theta}{2r^2} - \frac{\sin 3\theta}{2r^3} = \frac{\sin\theta}{r^2} + \frac{\sin 3\theta}{2r^2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\nabla^2 f_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left[\frac{1}{2}\log r - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 2\theta}{4r^2}\right]$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} f_1 = \frac{1}{2r} - \frac{\cos 2\theta}{2r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f_1 = +2\cos 2\theta - \frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} f_1 = -\frac{1}{2r^2} + \frac{3\cos 2\theta}{2r^4}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) f_1 = \frac{\cos 2\theta}{r^4}$$

$$\nabla^2 f_1 = \frac{2}{r^2}\cos 2\theta$$

$\frac{2}{E} - \frac{1}{G}$　$\frac{m+1}{2m}$

$\frac{2}{E}\left(1 - \frac{E}{4G}\right) = \frac{m-1}{m}$

$4\varepsilon_x + \varepsilon_y = 2\varepsilon_x$　$-\frac{1}{4G}\frac{\cos 2\theta}{r^2} = \left(-\frac{4}{E} - \frac{1}{G}\right)\frac{\cos}{r^2}$

$= \left(1 + \frac{1}{\ }\right)$