E　M-6K

No.

Date 54.11.4

薄板の曲げ理論における応力集中について

別所正利

概要

無限に広い薄板の真中に孔があいている場合について面外曲げモーメントが働く場合の応力集中問題を特異点法で取扱う立場がある。

こゝではその場合の無限遠方における板の変位の漸近値が板の歪エネルギーに関係している事をまず示す。

その次に与えられた境界条件によるグリーン関数表示をもとめる。 自由辺の場合はポテンシャル論の境界値問題からの類推によりそのグリーン関数をノイマン関数と呼び、その無限遠方での漸近値をもとめ、さらに孔の境界が僅かに変形した時のその変化を見積る。

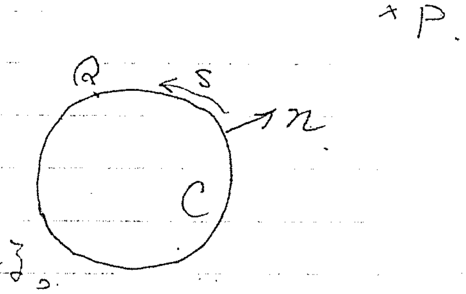
これから直ちに自由境界の応力変化および歪エネルギーの見積り式が出て来る。

しかしこの方法では鋭い切欠きについては工合が悪いと考えられるので、その場合に変分原理を応用する事を提案する。

また最後に直線状割れ目の場合の解を積分方程式で解く方法も試みる。

1. 積分表示，境界条件，遠方の表現

無限領域の中に孔Cがある場合を考えよう。



板の変位 w は次のように表わされる。

$$w(p) = \int_C \Big[-m(w(Q)) \frac{\partial S(p,Q)}{\partial n_Q} + q(w(Q)) S(p,Q) + M(S(p,Q)) \frac{\partial w}{\partial n_Q} - Q(S(p,Q))\, w(Q) \Big] ds_Q, \quad (1.1)$$

$$S(p,Q) = \frac{R^2}{8\pi} \log R, \quad R = \overline{PQ}$$

$$\left.\begin{aligned} m(w(p)) &= \nu \Delta w + (1-\nu)\Big(\cos^2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\sin\alpha\cos\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\Big) \\ q(w(p)) &= \frac{\partial}{\partial n}\Delta w + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\Big(\cos 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin\alpha\cos\alpha\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)\Big) \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \sin\alpha = \frac{\partial y}{\partial n},$$

境界値問題は無限遠方での変位Wが

$$W = w + w_i \longrightarrow w_i, \quad i = 1,2,3. \quad (1.3)$$

$$w_1 = \frac{x^2}{2}, \quad w_2 = xy, \quad w_3 = \frac{y^2}{2}, \quad (1.4)$$

となりかつC上で

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0, \ (固定端) \ \text{on } C \quad (1.5$$

又は　$m(W(p)) = 0, \quad q(W(p)) = 0$（自由端）　(1.6)
となるように w を定める事である。

それならば w に対しては

$$w = -w_i \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{\partial w_i}{\partial n} \quad \text{on } C \qquad (1.5')$$

又は　$m(w) = -m(w_i)$, $q(w) = -q(w_i)$,　(1.6')
となるが以下は主として C が自由端である場合を考えよう。　そうすると

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} m(w_1) &= \nu + (1-\nu)\cos^2\alpha \\ q(w_1) &= -\frac{(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial s}(\sin 2\alpha) \end{aligned}\right\} \\
&\left.\begin{aligned} m(w_2) &= (1-\nu)\sin 2\alpha \\ q(w_2) &= (1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\cos^2\alpha \end{aligned}\right\} \\
&\left.\begin{aligned} m(w_3) &= \nu + (1-\nu)\sin^2\alpha \\ q(w_3) &= \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial s}\sin 2\alpha \end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

さて P が充分遠方にあると、

$$
\begin{aligned}
S(P,Q) \underset{P\to\infty}{\longrightarrow} & \; S(P,O) - x'\frac{\partial S(P,O)}{\partial x} - y'\frac{\partial S(P,O)}{\partial y} \\
& + \frac{x'^2}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + x'y'\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{y'^2}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \cdots ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M(S(P,Q)) \longrightarrow & \; m(w_1(Q))\frac{\partial^2}{\partial x^2}S(P,O) + m(w_2(Q))\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}S \\
& + m(w_3(Q))\frac{\partial^2}{\partial y^2}S(P,O) + \cdots \\
Q(S(P,Q)) \longrightarrow & \; q(w_1(Q))\frac{\partial^2}{\partial x^2}S(P,O) + q(w_2(Q))\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}S \\
& + q(w_3)\frac{\partial^2}{\partial y^2}S(P,O) + \cdots
\end{aligned}
$$

又無限遠方では w は高々対数的無限である（これを w の正則性と定義しよう）から

$$
\left.
\begin{aligned}
& \int_C q \, ds = 0 , \\
& \int_C \left(m(w)\frac{\partial x}{\partial n} - x q \right) ds = 0 , \\
& \int_C \left[m(w)\frac{\partial y}{\partial n} - y q \right] ds = 0 .
\end{aligned}
\right\} \quad (1.10)
$$

でなければならないがこれは C 上の力とモーメントが平衡する条件である。

これらを(1.1)に代入すると、

$$w(p) \xrightarrow[p\to 0]{} A\frac{\partial^2}{\partial x^2}S(p,0)+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}S+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}S,$$

$$A=\int_C\Big[w_1(p)\,q(w)-\frac{\partial w_1}{\partial n}m(w)-q(w_1)w+m(w_1)\frac{\partial w}{\partial n}\Big]ds,$$

$$B=\int_C\Big[w_2\,q_1(w)-\frac{\partial w_2}{\partial n}m(w)-w\,q(w_2)+\frac{\partial w}{\partial n}m(w_2)\Big]ds,$$

$$C=\int_C\Big[w_3\,q(w)-\frac{\partial w_3}{\partial n}m(w)-w\,q(w_3)+\frac{\partial w}{\partial n}m(w_3)\Big]ds,$$

Cが自由端ならば (1.6) により 従えば $i=1$ に

$$A=\int_C\Big[m(w_1)\frac{\partial W_1}{\partial n}-W_1\,q(w_1)\Big]ds,$$

$$W_1=w+w_1$$

$$B=\int_C\Big(m(w_2)\frac{\partial W_1}{\partial n}-q(w_2)W_1\Big)ds,\qquad (1.13)$$

$$C=\int_C\Big[m(w_3)\frac{\partial W_1}{\partial n}-W_1\,q(w_3)\Big]ds,$$

∵ C内で正則な関数について

$$\int_C\Big(w_i\,q_j-m_j\frac{\partial w_i}{\partial n}\Big)ds=\int_C\Big(w_j\,q_i-m_i\frac{\partial w_j}{\partial n}\Big)ds.$$

これらの量は C 上で m, q のなした仕事の倍になって
いるから w がその領域でもつ歪エネルギーである

(1.11)は又、

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) S \\ M_y &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) S \\ M_{xy} &= (1-\nu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

なる量を導入すると

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} S &= \frac{1}{1-\nu^2}(M_x - \nu M_y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} S &= \frac{1}{1-\nu^2}(M_y - \nu M_x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} S &= \frac{1}{1-\nu} M_{xy} \end{aligned}\right\} \quad (1.14')$$

であるから

$$w(p) \longrightarrow A' M_x + B' M_{xy} + C' M_y, \quad (1.15$$

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{1}{1-\nu^2}(A - \nu C) \\ B' &= \frac{B}{1-\nu} \\ C' &= \frac{1}{1-\nu^2}(C - \nu A) \end{aligned}\right\} \quad (1.16)$$

となって物理的解釈が容易となる。

2. ノイマン関数と境界の変形

(1.6)の自由辺の境界値問題の解が

$$w(p) = \int_C \left[m_i \frac{\partial N(p,Q)}{\partial n} - g_i N(p,Q) \right] ds, \quad \cdots (2.1)$$

$$m_i \equiv m(w_i), \quad g_i \equiv g(w_i)$$

の形に書けるようなグリーン関数をノイマン関数と呼ぼう。

その為には正則な関数 $A(p,Q)$ によって

$$N(p,Q) = S(p,Q) + A(p,Q), \quad \cdots (2.2)$$

$$M_Q(N(p,Q)) = Q_Q(N(p,Q)) = 0, \quad \cdots (2.3)$$

でなければならない。

A は正則で C 上では(2.3)により

$$\left.\begin{aligned} M_Q(A(p,Q)) &= -M_Q(S(p,Q)) \\ Q_Q(A(p,Q)) &= -Q_Q(S(p,Q)) \end{aligned}\right\} \quad \cdots (2.4)$$

であるから(2.1)により

$$A(p,Q) = \int_C \left[M_R(S(R,P)) \frac{\partial N(Q,R)}{\partial n_R} - Q_R(S(R,P)) N(Q,R) \right] ds_R$$

(2.5)

(1.9) と (1.11) 定義により

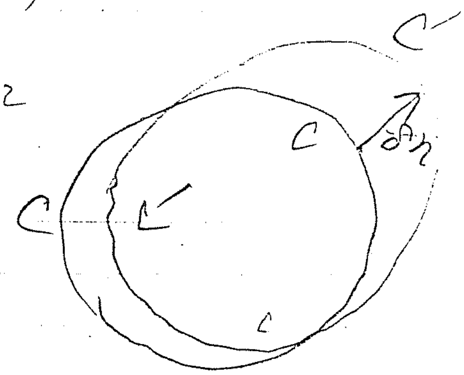
$$A(P,Q) \xrightarrow[P\to\infty]{} w_1(Q)\frac{\partial^2 S(P,0)}{\partial x^2} + w_2\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y} + w_3\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad (2.$$

又 (1.8) と合せて

$$N(P,Q) \xrightarrow[P\to\infty]{} S(P,0) - x'\frac{\partial S(P,0)}{\partial x} - y'\frac{\partial S}{\partial y}$$

$$+ W_1(Q)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + W_2(Q)\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y} + W_3(Q)\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad (2.$$

今境界 C が法線方向に δn だけふくれて C' になったとし、その C' に対するノイマン関数を N' としよう。境界条件は



$$M_Q(N') = Q_Q(N') = 0, \quad Q \text{ on } C', \quad (2.8)$$

そしてその差は (2.2) より

$$\delta N(P,Q) = N'(P,Q) - N(P,Q) = A'(P,Q) - A(P,Q), \quad (2.9$$

となって正則であり、その C' 上の境界条件は

$$M_Q(\delta N) = -M_Q(N),\ Q_Q(\delta N) = -Q_Q(N), \quad Q\in C', \quad (2.1$$

それ故 (2.1) より

$$\delta N(P,Q) = -\int_{C'}\left[M_R(N(P,R))\frac{\partial N'(R,Q)}{\partial n_R} - Q_R(N(P,R))N'(R,Q)\right]ds_R$$

となるが δN が小さいとすればこれは

$$\delta N(p,Q) = -\int_{C'} \left[M_R(N(p,R)) \frac{\partial N(R,Q)}{\partial n_R} - Q_R(N(p,R)) N(R,Q) \right] ds_R$$

(2.11)

(2.7) により

$$\delta N(p,Q) \xrightarrow[p\to\infty]{} \delta W_1(Q) \frac{\partial^2 S(P,Q)}{\partial x^2} + \delta W_2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \delta W_3 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

(2.12)

(2.11) に (2.7) を代入して、$p \to \infty$ とおき (2.12) と等置すれば
例えば

$$\delta W_1(Q) = -\int_{C'} \left[m(W_1(R)) \frac{\partial N}{\partial n} - q(W_1) N \right] ds_R$$

となるが $m(W_1)$, $q(W_1)$ は C 上では 0 であるからこれを C と C′ にはさまれた領域の面積分に書きかえ面積要素は $\delta n\, ds$ と近似すれば

$$\int_C \left\{ m(u) \frac{\partial v}{\partial n} - q(u) v \right\} ds =$$

$$\iint_D \left[\Delta u \Delta v - (1-\nu)(u_{xx} v_{yy} + u_{yy} v_{xx} - 2u_{xy} v_{xy}) \right] dx\,dy$$

であるが右辺の被積分関数を法線方向と切線方向 (t) に座標変換すれば

$$m_n(u) \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + m_t(u) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2 m_{nt}(u) \frac{\partial^2 v}{\partial n \partial t}$$

$$\left.\begin{aligned} m_n(u) &= m_x \cos^2\alpha + m_y \sin^2\alpha - 2 m_{xy} \sin\alpha \cos\alpha \\ m_t(u) &= m_x \sin^2\alpha + m_y \cos^2\alpha + 2 m_{xy} \sin\alpha \cos\alpha \\ m_{nt} &= m_{xy} \cos 2\alpha + (m_x - m_y) \sin\alpha \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

となり W_1 に対する境界条件を考慮すれば

$$\delta W_1(Q) = \delta w(Q) = \int_C m_t(W_1) \frac{\partial^2 N(R,Q)}{\partial t^2} \delta n \, ds_R \,,$$

となるが $\displaystyle \frac{\partial^2}{\partial t_R^2} N(R,Q)\Big|_C = \frac{1}{1-\nu^2}\left[M_t(N(R,Q)) - \nu M_n(N(R,Q))\right]$

$$= \frac{1}{1-\nu^2} M_t(N(R,Q))$$

なるから

$$\delta W_1(Q) = \frac{1}{1-\nu^2}\int_C m_t(W_1)\, M_t(N(R,Q))\, \delta n \, ds_R \,, \quad (2.1\text{[illegible]})$$

$Q \to \infty$ として (1.11)、(2.7) から

$$\delta A \overset{?}{=} \frac{1}{1-\nu^2}\int_C \{m_t(W_1)\}^2 \delta n \, ds_R \,, \quad (2.14)$$

3. 変分原理の応用

前節でとり扱かった境界の変形は滑らかなもを考えているので割れ目のようなものにはそぐわな

そのような場合は次の変分原理を応用する事考えられる。

さて我々の境界値問題は次の汎関数の極問題と同等である。(m_0, q_0 は与えられた量)

$$I = \frac{1}{2}\int_C \left[m(w)\frac{\partial w}{\partial n} - q(w)w - 2m_0\frac{\partial w}{\partial n} + 2q_0 w \right] \quad \cdots (3.1)$$

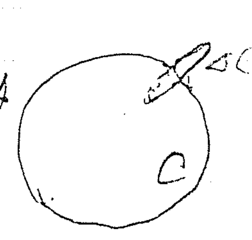
何故なら相反定理により

$$\delta I = \int_C \left[\delta w(q_0 - q) - (m_0 - m)\frac{\partial \delta w}{\partial n} \right] ds \quad (3.$$

となるからである。(但し $\Delta^2 w = 0$)

今境界 C の解を w_1 とし

一方変形 ΔC の解(C がなくてそれのみがある場合で C 内へは適当に例えば鏡像を考えておく)を w_2 としよう。



さらに近似解は任意定数をαとして.

$$w = w_1 + \alpha w_2, \quad \cdots \quad (3.3)$$

となるものとしこのαを変分原理によって定めよう。

なおこの事から次の関係がある。

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} m(w_1) \equiv m_1 = m_0 \\ q(w_1) \equiv q_1 = q_0 \end{array}\right\} \text{ on } C \\ \left.\begin{array}{l} m(w_2) \equiv m_2 = m_0 \\ q(w_2) \equiv q_2 = q_0 \end{array}\right\} \text{ on } \Delta C \end{array}\right\} \quad (3.4)$$

それ故.

$$I = E(w_1, w_1) + \alpha^2 E(w_2, w_2) + 2\alpha E(w_1, w_2) - 2\left\{E(w_0, w_1) + \alpha E(w_0, w_2)\right\} \quad \cdots (3.5)$$

但し
$$E(u, v) = \frac{1}{2}\int_{C+\Delta C}\left(m(u)\frac{\partial v}{\partial n} - q v\right) ds, \quad \cdots (3.6)$$

$$\therefore \frac{\partial I}{\partial \alpha} = 2\alpha E(w_2, w_2) + 2E(w_1, w_2) - 2E(w_0, w_2) = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{E(w_2, w_2)}\left[E(w_0 - w_1, w_2)\right], \quad \cdots (3.7)$$

$$\text{ext. } I = E(w_1 - 2w_0, w_1) - \frac{E^2(w_0 - w_1, w_2)}{E(w_2, w_2)}, \quad (3.8)$$

でこれは(3.1)から分かるように歪エネルギー(の近似値)である。

なおこの時

$$E(w_1, w_2) = E(w_2, w_1)$$

であるが

$$E(w_0, w_i) \neq E(w_i, w_0)$$

でない事に注意が必要である。

特にΔCが面積のない割れ目とすると、

$$E(w_1 - w_0, w_1) = \frac{1}{2}\int_{\Delta C}\left[m(w_0 - w_1)\frac{\partial w_1}{\partial n} - q(w_0 - w_1)w_1\right]ds$$

$$= 0$$

$$E(w_1 - w_0, w_2) = \frac{1}{2}\int_{\Delta C}\left[m(w_0 - w_1)\frac{\partial w_2}{\partial n} - w_2\, q(w_0 - w_1)\right]ds$$

$$E(w_1, w_1) = E(w_0, w_1) = \frac{1}{2}\int_{C}\left[m(w_0)\frac{\partial w_1}{\partial n} - q(w_0)w_1\right]ds,$$

$$E(w_2, w_2) = \frac{1}{2}\int_{C}\left[m(w_2)\frac{\partial w_2}{\partial n} - q(w_2)w_2\right]ds$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\Delta C}\left[m(w_0)\frac{\partial w_2}{\partial n} - q(w_0)w_2\right]ds,$$

等のようになる。

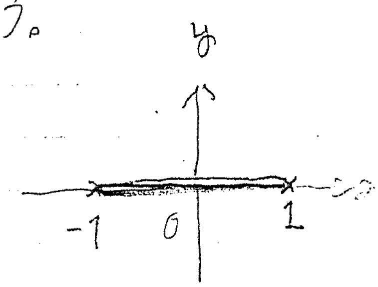
応力は

$$\sigma = \sigma_1 + \alpha\sigma_2$$

のように表現される。

4. 直線状割れ目

x軸の $|x| \leq 1$ が割れ目であるとしよう。



境界条件は (1.7) より

$$m(w) = -1, \quad q(w) = 0 \quad \text{for } |x| < 1, \tag{4.1}$$

で今は

$$\left.\begin{aligned} m(w(p)) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w(x, y), \\ q(w(p))\Big|_{y=+0} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

w は上下対称であると考えられるので (1.1) から

$$w(p) = \int_{-1}^{1} \left[n(x') S(p, Q) + \mu M_Q(S(p, Q)) \right] dx', \quad (4\cdot$$

の表現が適当であると考えられる。

そうすると

$$M_Q(S(p,Q)) = M_p(S(p,Q)) = \frac{1}{4\pi}\left[(1+\nu)\log R + \frac{1+\nu}{2} + \frac{(y-y')^2 + \nu(x-x')^2}{R^2}\right]$$

$$\xrightarrow[y'=y\to 0]{} \frac{1}{4\pi}\left[(1+\nu)\log|x-x'| + \frac{1+3\nu}{2}\right],$$

$$Q_p(S(p,Q)) = \frac{\partial}{4\pi\,\partial y}\left[(3-\nu)\log R + \frac{(y-y')^2 + (2-\nu)(x-x')^2}{R^2}\right]$$

$$\to \frac{1}{4\pi}\left[(3-\nu)\frac{(y-y')}{R^2} - \frac{2(y-y')\{(y-y')^2 + (2-\nu)(x-x')^2\}}{R^4}\right]$$

$$\to \frac{(1+\nu)}{4\pi}\frac{(y-y')}{R^2}, \quad \cdots \qquad (4\cdot$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log R = \frac{\xi}{R^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log R = \frac{1}{R^2} - \frac{2\xi^2}{R^4} = \frac{\eta^2 - \xi^2}{R^4}, \quad \xi = (x - x'), \ \eta =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log R = \frac{\xi^2 - \eta^2}{R^4}, \quad \frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\log R = \frac{2\eta}{R^4} + \frac{4\eta^3}{R^6} = \frac{2\eta(R^2 + 2\eta^2)}{R^6}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3}\log R = -\frac{2\eta(\xi^2 + 3\eta^2)}{R^6}$$

$$f=\frac{\nu\xi^2+\eta^2}{R^2}=\frac{(\nu-1)\xi^2}{R^2}+1=\frac{(1-\nu)\eta^2}{R^2}+\nu\ ,\quad \Delta f=\frac{8(1-\nu)}{R^6}\eta^2(\xi^2-\eta^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=-\frac{2(1-\nu)\eta^2\xi}{R^4}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}=-2(1-\nu)\left[\frac{\eta^2}{R^4}-\frac{4\eta^2\xi^2}{R^6}\right]=\frac{-2(1-\nu)\eta^2(\eta^2-3\xi^2)}{R^6}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2\partial \eta}=-2(1-\nu)\left[\frac{2\eta(\eta^2-3\xi^2)+2\eta^3}{R^6}-\frac{6\eta^3(\eta^2-3\xi^2)}{R^8}\right]\to -4(1-\nu)\eta\left(-\frac{3}{\xi^4}+\frac{18\eta^2}{\xi^6}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=+\frac{2(1-\nu)\xi^2\eta}{R^4}\ ,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=2(1-\nu)\left[\frac{\xi^2}{R^4}-\frac{4\xi^2\eta^2}{R^6}\right]=\frac{2(1-\nu)}{R^6}(\xi^2-3\eta^2)\eta^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3}=2(1-\nu)\left[\frac{2\eta\xi^2-\cancel{12}\eta^3}{R^6}-\frac{6(\xi^2-3\eta^2)\eta^3}{R^8}\right]\to 4(1-\nu)\eta\left(\frac{1}{\xi^4}-\frac{6\eta^2}{\xi^6}\right)$$

$$M_P(M_Q(S))=\frac{1+\nu}{4\pi}\left[\frac{\xi^2\eta^2}{R^4}(1-\nu)\right]+\frac{2(1-\nu)}{4\pi}\left[\frac{\eta^2(\xi^2-3\eta^2)-\nu\eta^2(\eta^2-3\xi^2)}{R^6}\right]$$

$$\to\frac{(1-\nu^2)}{4\pi}\frac{1}{\xi^2}$$

$$Q_P(M_Q(S))=\frac{1+\nu}{4\pi}\left[-\frac{2\eta(\xi^2-3\eta^2)}{R^6}+(2-\nu)\frac{2\eta(\xi^2-3\eta^2)}{R^6}\right]$$

$$+\frac{2(1-\nu)}{4\pi}\left[\frac{2\eta(\xi^2-6\eta^2)}{R^6}-\frac{6\eta^3(\xi^2-3\eta^2)}{R^8}-(2-\nu)\left\{\frac{2\eta(2\eta^2-3\xi^2)}{R^6}-\frac{6\eta^3(\eta^2-3\xi^2)}{R^8}\right\}\right]$$

$$\to\frac{1-\nu^2}{2\pi}\cdot\frac{\eta}{R^2}+\frac{1-\nu}{4\pi}\left(\frac{\eta}{\xi^4}\right)(7-3\nu)\qquad (4.5)$$

それ故 境界条件は、

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1+\nu}{4\pi}\int_{-1}^{1}\kappa(x')\log|x-x'|\,dx'+\frac{1-\nu^2}{4\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mu(x')}{(x-x')^2}\,dx'=-1,\\ &\frac{1+\nu}{4}\kappa(x)+\frac{1-\nu^2}{2}\mu(x)=0\end{aligned}\right\}\ (4.6)$$

[(4.5) 第2式の右辺第2項は省略した]

又別条件として $\int_{-1}^{1}\kappa(x')\,dx'=0$, --(4.7)

それ故

$$\int_{-1}^{1} \chi(x')\left[\log|x-x'| - \frac{1}{2}\frac{1}{(x-x')^2}\right]dx' = -\frac{4\pi}{1+\nu}, \quad (4.8)$$

又

$$\Delta w\Big|_{y=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\chi(x')\log|x-x'|\,dx', \quad \cdots (4.9)$$

(4.8) は又

$$\left(1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\int_{-1}^{1}\chi(x')\log|x-x'|\,dx' = -\frac{4\pi}{1+\nu}, \quad (4.10)$$

と解釈すれば

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+2\right)f(x) = 2a, \quad \cdots\cdots \quad (4.11)$$

の解は $f(x) = Ae^{\sqrt{2}ix} + Be^{-\sqrt{2}ix} + a$, (4.12)

となり，A, Bは任意定数であるが対称性と

(4.7)の条件からこれは定まる。

$$\cos(\sqrt{2}x) = J_0(\sqrt{2}) + 2\sum(-1)^n J_{2n}(\sqrt{2})\cos 2n\theta,$$
$(x = \cos\theta)$

$$\therefore\ f(x) = \frac{8\pi}{(1+\nu)J_0(\sqrt{2})}\sum_{n=1}(-)^n J_{2n}(\sqrt{2})\cos 2n\theta, \quad (4.13)$$

$$= \int_{-1}^{1}\chi(x')\log|x-x'|\,dx',$$

を解いて χ を求めればよい。
結果は誤りと思われる。