正

4.86

No. 一

Date 57.7.28

「自由表面をもつ一様半無限領域における2次元弾性波の放射散乱について」 別所

（肺手術一周年記念

内容

1. 場の方程式と境界条件

現象はすべて周期的である場合を考える事とし，その
すべての量は時間因子 $e^{i\omega t}$ を省略して複素表示
するものとする。（ωは円周波数）

u_1, u_2 を夫々 x, y 方向の変位とすると その方程式は
Δをラプラシアンとして，

$$(\Delta + k^2) u_i + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \qquad (1.1)$$

ここに

$$\gamma = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad (1.2)$$

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y$$

また

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \qquad (1.3)$$

ρは密度，Gは剛性率，νはポアソン比とする。
なお平面応力問題と考えるとνは上述のように
ポアソン比であるが，z一方向に無限に拡がっている2次元問題と考えるならば平面歪問題と
考えられ，その時のポアソン比σとνとの関係
はよく知られているように

$$\nu = \frac{\sigma}{1-\sigma}, \qquad (1.4)$$

さて回転ω（円周波数と関係ない事）

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}, \qquad (1.5)$$

を導入すれば(1.1)に代入して、

$$(\Delta + K^2)\gamma = 0$$
$$(\Delta + k^2)\omega = 0 \qquad (1.6)$$

$$K^2 = \frac{1-2\nu}{2} k^2 \qquad (1.7)$$

となって共にヘルムホルツの方程式を満たし、その解はよく知られている。

そこで γ と ω が分かっているとすると変位は(1.1)(1.2),(1.5)から

$$u_1 = -\frac{1}{K^2}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial \omega}{\partial y},$$
$$u_2 = -\frac{1}{K^2}\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial \omega}{\partial x}; \qquad (1.8)$$

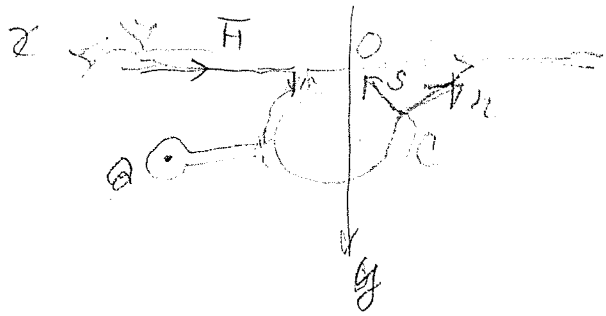
また応力成分は

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\gamma\right),$$
$$\sigma_y = 2G\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\gamma\right), \qquad (1.9)$$
$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right),$$

で与えられるから境界Cに沿って働く力の x, y 成分 t_1, t_2 は、

$$\frac{t_1}{G} \equiv T_1 = \frac{1}{G}\left(\sigma_x \frac{\partial y}{\partial s} - \tau_{xy}\frac{\partial x}{\partial s}\right) = -2\frac{\partial u_2}{\partial s} - \omega\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{2\gamma}{1-\nu}\frac{\partial x}{\partial n},$$
$$\frac{t_2}{G} \equiv T_2 = \frac{1}{G}\left(\tau_{xy}\frac{\partial y}{\partial s} - \sigma_y\frac{\partial x}{\partial s}\right) = 2\frac{\partial u_1}{\partial s} + \omega\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{2\gamma}{1-\nu}\frac{\partial y}{\partial n}, \qquad (1.10)$$

座標系は右図のように
x軸が自由表面に一致する
ようにとるものとする。



特に自由表面の条件は上式から

$$2\frac{\partial u_2}{\partial x} - \omega = 0, \quad -2\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{2}{1-\nu}\gamma = 0,$$

となるから (1.2), (1.5) を代入すれば変位に対しては

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad \left.\nu\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \qquad (1.11)$$

γとωに対しては (1.8) を代入して

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{k^2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial x\partial y}+\frac{2}{k^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\omega=0. \\ &-\frac{2}{k^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}+\frac{2}{K^2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}+\frac{k^2}{K^2}\gamma=0 \end{aligned}\right\} \text{for } y=0. \qquad (1.12)$$

境界値問題は次の2種類が考えられる。

i) 放射問題　Cが与えられたモードで振動して波を放射する問題でC上の変位が与えられる。

ii) 散乱問題　与えられた入射波に対してCが波を散乱する場合であるが、今の場合

まず入射波に問題がある。
と言うのは無限領域では入射波として平面波を考えればよいが，自由表面がある場合は充分遠方まで伝播する平面波はレーリー波のみである。
しかし実用上の問題を考えると，縦波，横波も考えに入れるべきだと考えられ，それを考慮するためには震源を物体から有限の距離におかねばならない。
しかし震源の局部的攪乱を考えたのでは問題が複雑になりすぎるしまたそれ自身よくわからないので以下ではそのような局部的攪乱は考えている物体まで届かないで波だけが届くものとする。　これは震源が極く近くになければ充分許されるであろう。
次にC上の境界条件は変位が0とする。
実際にはCが振動する訳であるが，その振動によって波を放射するのであるから，その分は

i)の放射問題として取扱う。

∴ Cの振動変位はこのような散乱問題から得られるC上の強制力，放射問題から得られる抗力とCの内部の力学的性質によってきまる反力とを等置してつまり運動方程式を解いて始めて求められる。

iii) 空孔問題　Cの内部が空孔である時は上述の場合の特殊な極限でCの内部からの反力は無いから，波による強制力と放射による抗力を等置すればよい，つまりC上で力が0となるようにすればよいけれども，この場合は普通行われるように最初からその条件で境界値問題を解けば簡単であるのは言うまでもあるまい。

2. 縦波, 横波の表現と変位

γ, ωはヘルムホルツ方程式の解であるから附録Aのような関数を導入し, Q=(x, y)点を図1のようにCと自由表面Fで囲まれた領域D内の点としてグリーンの定理を適用すればよく知られてるような次のような表現が出来る。

$$\gamma(Q)=\int_C\left[\gamma(P)\frac{\partial}{\partial n}L(P,Q)-\frac{\partial\gamma}{\partial n_P}L(P,Q)\right]ds_P+\int_{+\infty}^{-\infty}\left[\gamma(P)\frac{\partial L}{\partial y}(P,Q)-\frac{\partial\gamma}{\partial y}L(P,Q)\right]_{y=0}(-dx),\quad(2.1)$$

$$\omega(Q)=\int_C\left[\omega\frac{\partial M(P,Q)}{\partial n}-\frac{\partial\omega}{\partial n}M(P,Q)\right]ds_P+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\omega\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial\omega}{\partial n}M(P,Q)\right]_{y=0}dx,\quad(2.2)$$

F上では、(1.12), (A.3)の関係があるからこれを代入し部分積分すると(2.1)右辺第2項では、

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}L\right)dx=-\left(\frac{k}{h}\right)^4\int_{-\infty}^{\infty}\left[\omega\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial\omega}{\partial y}N\right]dx.$$

となるが、Nは領域内で正則であるから、これと

C上の積分に変更すれば 法線の方向に留意して

$$\gamma(Q) = \int_C \left[\gamma \frac{\partial}{\partial n} L(p,Q) - \frac{\partial \gamma}{\partial n} L(p,Q) \right] ds(p)$$

$$+ \left(\frac{K}{k}\right)^4 \int_C \left[\omega(p) \frac{\partial}{\partial n} N(p,Q) - \frac{\partial \omega}{\partial n} N(p,Q) \right] ds(p), \quad (2.3)$$

又同様にして

$$\omega(Q) = \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} M(p,Q) - \frac{\partial \omega}{\partial n} M(p,Q) \right] ds(p)$$

$$+ \left(\frac{k}{K}\right)^4 \int_C \left[\gamma(p) \frac{\partial}{\partial n} O(p,Q) - \frac{\partial \gamma}{\partial n} O(p,Q) \right] ds, \quad (2.4)$$

あるいは (A.13) の関係を使えば

$$\gamma(Q) = \int_C \left[\gamma \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right] L(p,Q)\, ds_p$$

$$+ \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right] O(Q,p)\, ds_p, \quad (2.3')$$

$$\omega(Q) = \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right] M(p,Q)\, ds_p$$

$$+ \int_C \left[\gamma \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right] N(Q,p)\, ds_p, \quad (2.4')$$

になる。

(1.2), (1.5), (1.8)を使って上の表現を u_1, u_2, τ_1, τ_2 のC上の値で表わす事を考える。

上式にこれらを代入すると、例えば
(部分積分)

$$\int_C \left(\gamma \frac{\partial L}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} L\right) ds$$

$$= \frac{K^2}{k^2}\int_C \left[\tau_1 \frac{\partial L}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial L}{\partial y} + u_1\left(2\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial y} + k^2 L \frac{\partial x}{\partial n}\right) + u_2\left(-2\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial x} + k^2 L \frac{\partial y}{\partial n}\right)\right] ds,$$

$$\int_C \left(\omega \frac{\partial M}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} M\right) ds$$

$-\left(\frac{K}{k}\right)^2$

$$= \int_C \left[-\tau_1 \frac{\partial M}{\partial y} + \tau_2 \frac{\partial M}{\partial x} + u_1\left(2\frac{\partial^2 M}{\partial s \partial x} - k^2 M \frac{\partial y}{\partial n}\right) + u_2\left(2\frac{\partial^2 M}{\partial s \partial y} + k^2 M \frac{\partial x}{\partial n}\right)\right] ds,$$

となるので

$$\gamma(Q) = \frac{K^2}{k^2}\int_C \left[\tau_1\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \tau_2\left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\right) + u_1\left\{2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\right) + k^2\left(L\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{K^2}{k^2}N\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\} + u_2\left\{2\frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\right) + k^2\left(L\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{K^2}{k^2}N\frac{\partial x}{\partial n}\right)\right\}\right] ds, \quad (2.5)$$

$$\omega(Q)=\int_C\Big[\tau_1\Big(-\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x}\Big)+\tau_2\Big(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\Big)$$

$$+u_1\Big\{2\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\Big)-k^2\Big(M\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{k^2}{K^2}O\frac{\partial x}{\partial n}\Big)\Big\}$$

$$+u_2\Big\{2\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x}\Big)+k^2\Big(M\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{k^2}{K^2}O\frac{\partial y}{\partial n}\Big)\Big\}\Big]ds, \tag{2.6}$$

これを(1.8)に代入すると変位の表現を得る。

それを

$$u_j(Q)=\int_C\big[u_1\tau_{1j}(P,Q)+u_2\tau_{2j}(P,Q)-\tau_1(P)u_{1j}(P,Q)-\tau_2u_{2j}(P,Q)\big]ds(P), \tag{2.7}$$

と書く事にすると

$$u_{11}(P,Q)=\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\Big)+\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial y'}\Big(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x}\Big),$$

$$u_{12}(P,Q)=\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial y'}\Big(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\Big)-\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x}\Big)$$

$$u_{21}(P,Q)=\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\Big)-\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial y'}\Big(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\Big)$$

$$u_{22}(P,Q)=\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial y'}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\Big)+\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\Big)$$

(2.8)

$$T_{11}(P,Q) = -\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial x'}\left(\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\right)+k^2\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial n}-\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial N}{\partial x'}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial y'}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\right)-k^2\left(\frac{\partial M}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial n}\right)\right\},$$

$$T_{12}(P,Q) = -\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial y'}\left(\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\right)+k^2\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial x'}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\right)-k^2\left(\frac{\partial M}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial n}\right)\right\},$$

$$T_{21}(P,Q) = -\frac{1}{k^2}\left\{-2\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial x'}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\right)+k^2\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial n}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial y'}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x}\right)+k^2\left(\frac{\partial M}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\},$$

$$T_{22}(P,Q) = -\frac{1}{k^2}\left\{-2\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial y'}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\right)+k^2\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial n}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial x'}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x}\right)+k^2\left(\frac{\partial M}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\},$$

$$\cdots\cdots (2\cdot 9)$$

P点が Γ上にあれば

$$T_{ij}(P,Q)\Big|_{y=0} = 0 , \qquad (2\cdot 10)$$

O.K.

また (1・11) の条件を満たす関係がある。

([illegible])

[illegible]

P on F (y = 0)

$$T_{11} = \frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial x'}\left(L_y + \frac{K^2}{k^2}N_x\right) + \frac{K^2}{k^2}N_{x'}$$

$$- \frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y'}\left(M_x + \frac{k^2}{K^2}O_y\right) - \cancel{k^2} M_{y'}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{2}{k^2}L_{xy} + \frac{2K^2}{k^2}N_{xx} + \frac{K^2}{k^2}N\right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{2}{k^2}M_{xx} + M + \frac{2}{K^2}O_{xy}\right] = 0$$

$$T_{12} = + \frac{1}{k^2}\left[+2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y'}\left(L_y + \frac{K^2}{k^2}N_x\right) + K^2 N_{y'}\right]$$

$$+ \frac{1}{k^2}\left[+2\frac{\partial^2}{\partial x \partial x'}\left(M_x + \frac{k^2}{K^2}O_y\right) + k^2 M_{x'}\right]$$

$$= \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial y'}\left[L_{xy} + \frac{K^2}{k^2}N_{xx} + \frac{K^2}{2}N\right]$$

$$+ \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{k^2}{K^2}O_{xy} + M_{xx} + \frac{k^2}{2}M\right] = 0$$

$$T_{21} = - \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left[L_{xx} - \frac{K^2}{k^2}N_{xy} + \frac{k^2}{2}L\right]$$

$$+ \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial y'}\left[-M_{xy} + \frac{k^2}{K^2}O_{xx} + \frac{k^4}{2K^2}O\right] = 0$$

$$T_{22} = - \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial y'}\left[L_{xx} - \frac{K^2}{k^2}N_{xy} + \frac{k^2}{2}L\right]$$

$$- \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left[-M_{xy} + \frac{k^2}{K^2}O_{xx} + \frac{k^4}{2K^2}O\right] = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} u_{ij} &= u_{ij}^{(0)} + u'_{ij} \\ \tau_{ij} &= \tau_{ij}^{(0)} + \tau'_{ij} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \qquad (2.11)$$

とおいて 肩符(0)のついたものを無限領域の値とする。

即ち

$$\left.\begin{aligned} u_{11}^{(0)} &= -\frac{i}{4k^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}H_0^{(2)}(KR)\right], \\ u_{12}^{(0)} = u_{21}^{(0)} &= \frac{i}{4k^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)\right], \\ u_{22}^{(0)} &= -\frac{i}{4k^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}H_0^{(2)}(KR)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{11}^{(0)} &= \frac{i}{4}\left[\frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial}{\partial y}H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial}{\partial x}H_0^{(2)}(KR)\right] \\ &\quad - \frac{i}{2k^2}\frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y}\left[H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)\right], \\ \tau_{12}^{(0)} &= -\frac{i}{4}\left[\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y}H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x}H_0^{(2)}(KR)\right] \\ &\quad - \frac{i}{2k^2}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}H_0^{(2)}(KR)\right], \\ \tau_{21}^{(0)} &= \frac{i}{4}\left[+\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x}H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y}H_0^{(2)}(KR)\right] \\ &\quad + \frac{i}{2k^2}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}H_0^{(2)}(KR)\right], \\ \tau_{22}^{(0)} &= \frac{i}{4}\left[\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial}{\partial x}H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial}{\partial y}H_0^{(2)}(KR)\right] \\ &\quad + \frac{i}{2k^2}\frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y}\left[H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)\right], \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

3. 境界積分方程式について

境界値問題を解くには境界上で(2.7)を積分方程式と見立てて解けばよい。

しかしその為には(2.8), (2.9)の8つの核関数の計算が必要である。

これを簡略化するには(の内部で正則な $u_j^{(in)}$, $T_j^{(in)}$ を考えて

$$\sum_i \int_C \left(u_i^{(in)} T_{ij} - T_i^{(in)} u_{ij} \right) ds = 0 \quad , \quad \cdots (3.1)$$

となるから、例えば

$$\left.\begin{aligned} T_j^{(in)} + T_j &= 0 && \text{on } C \\ u_j^{(in)} + u_j &= U_j && \text{on } C \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

とすると

$$u_j(Q) = \sum_i \int_C U_i T_{ij}(P, Q)\, ds_P \quad , \quad (3.3)$$

又

$$\left.\begin{aligned} u_j^{(in)} + u_j &= 0 \\ T_j^{(in)} + T_j &= T_j \end{aligned}\right\} \text{ on } C \quad (3.4)$$

とすると

$$u_j(Q) = -\sum_i \int T_i u_{ij}(P, Q)\, ds_P \quad , \quad (3.5)$$

(3.3)を利用する時は C上では始から(3.2)によって

T_jが与えられているから (3.3)から U_jがわかれば C上の

でとuがわかる事になる。

なお B.I.E.としては (3.3)に (3.2)を代入して

$$U_j(Q) - u_j^{(in)}(Q) = \sum_i \int_C U_i T_{ij}(P,Q)\, ds(P), \qquad (3.6)$$

として計算する。

一方 (3.5)による時は T_jが求まっても τ_jは未だわからないから (3.5)に (1.10)の演算をして τ_jを求めなければならない。

今それを求めて見よう。

$$\left.\begin{aligned} \gamma_j(P,Q) &= \frac{\partial u_{j1}}{\partial x'} + \frac{\partial u_{j2}}{\partial y'} \\ \omega_j(P,Q) &= \frac{\partial u_{j2}}{\partial x'} - \frac{\partial u_{j1}}{\partial y'} \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{j1} &= -\omega_j \frac{\partial y'}{\partial n'} + \frac{2}{K^2}\gamma_j \frac{\partial x'}{\partial n'} - 2\frac{\partial u_{j2}}{\partial s'} \\ \tau_{j2} &= \omega_j \frac{\partial x'}{\partial n'} + \frac{2}{K^2}\gamma_j \frac{\partial y'}{\partial n'} + 2\frac{\partial u_{j1}}{\partial s'} \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

(2.8)からまず

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{K^2}{k^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\right) \\ \gamma_2 &= -\frac{K^2}{k^2}\left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

$$\omega_1 = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x},$$
$$\omega_2 = -\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\right) \quad \cdots\cdots (3.10)$$

これは (2.5), (2.6) に一致する。

$$\tau_{11}' = -\omega_1 \frac{\partial y'}{\partial n'} + \frac{k^2}{K^2}\gamma_1 \frac{\partial x'}{\partial n'} - 2\frac{\partial u_{12}}{\partial s}$$
$$= -\frac{\partial y'}{\partial n'}\left(M_y - \frac{k^2}{K^2}O_x\right) - \frac{\partial x'}{\partial n'}\left(L_x - \frac{K^2}{k^2}N_y\right)$$
$$-\frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(L_x - \frac{K^2}{k^2}N_y\right) - \frac{\partial}{\partial x'}\left(M_y - \frac{k^2}{K^2}O_x\right)\right]$$

$$\tau_{12}' = \quad (3.11)$$

$$\tau_{21}' =$$

$$\tau_{22}' =$$

結局 $\tau_{ij}(P,Q) = \tau_{ij}(Q,P) \quad \cdots\cdots (3.12)$

となるので この場合は始めから (2.7) を解くのと手間は変らない事になる。

しかし特に C が自由表面の一部である時は (2.10)

によって.

$$u_j(Q) = -\sum_{i} \int \tau_i \, u_{ij}(x, Q)\, dx \ , \quad \cdots\cdots \qquad (3.13)$$

となり, これを与えられた u_j について解いて直接 τ が求められる。

次に以下にその積分表示を示す。

$$u_{11} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \cos p(x-x')\,dp\Big[-\frac{p^2}{k^2}\Big\{ -\frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-K^2}} + e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')}A \Big\}$$

$$-\frac{K^2}{k^4}p\sqrt{p^2-k^2}\,e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'-\sqrt{p^2-k^2}y}C + \frac{p^2-k^2}{k^2}\Big\{ \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')}B \Big\}$$

$$+\frac{p}{K^2}\sqrt{p^2-k^2}\,e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'-\sqrt{p^2-K^2}y}D \Big]$$

$$u_{12} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \sin p(x-x')\,dp\Big[\frac{p}{k^2}\sqrt{p^2-K^2}\Big\{ -\frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-K^2}} + e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')}A \Big\}$$

$$+\frac{p}{k^2}\sqrt{p^2-k^2}\Big\{ \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')}B \Big\}$$

$$-\frac{K^2}{k^2}\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\,e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'-\sqrt{p^2-k^2}y}C + \frac{p^2}{K^2}e^{\sqrt{p^2-k^2}y'-\sqrt{p^2-K^2}y}D \Big]$$

$$u_{21} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \sin p(x-x')\,dp\Big[-\frac{p}{k^2}\sqrt{p^2-K^2}\Big\{ e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)} + e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'+y)}A \Big\}$$

$$-\frac{p}{k^2}\sqrt{p^2-k^2}\Big\{ -\frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'+y)}B \Big\}$$

$$+\frac{K^2}{k^4}p^2 e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'-\sqrt{p^2-k^2}y}C - \frac{1}{K^2}\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2}\,e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'-\sqrt{p^2-K^2}y}D \Big]$$

$$u_{22} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \cos p(x-x')\,dp\Big[\frac{p^2-K^2}{k^2}\Big\{ \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-K^2}} + e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'+y)}A \Big\}$$

$$+\frac{p^2}{k^2}\Big\{ -\frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')}B \Big\}$$

$$-\frac{K^2}{k^4}p\sqrt{p^2-K^2}\,e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'-\sqrt{p^2-K^2}y}C + \frac{p}{K^2}\sqrt{p^2-K^2}\,e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'-\sqrt{p^2-K^2}y}D \Big]$$

$\boxed{y=0}$

$$p^2\sqrt{p^2-k^2}\left(\frac{k^2}{2}\right)$$

$$u_{11} = \frac{1}{\pi k^2}\int \frac{\cos p(x-x')\,dp}{-k^2\Delta}\Big[\Big\{\cancel{p^4}\sqrt{p^2-k^2} + p^2\sqrt{p^2-k^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'} + \sqrt{p^2-k^2}\Big\{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 + p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\cos p(x-x')\,dp}{\Delta}\sqrt{p^2-k^2}\Big[p^2 e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'} + \left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$u_{12} = \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty \frac{\sin p(x-x')}{\Delta}\,dp\Big[\Big\{p^3\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2} + p\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'} + \Big\{p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 + p^3\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin p(x-x')\,dp}{\Delta}\,p\Big[\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\,e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'} + \left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$-\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\frac{k^2}{2}$$

$$u_{21} = \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty \frac{\sin p(x-x')}{\Delta}\,dp\,p\Big[\Big\{-\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 - p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'} - \Big\{p^2\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2} + \left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\Big\}e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin p(x-x')}{\Delta}\,dp\cdot p\Big[\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'} + \sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2}\,e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$\frac{k^2}{2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)$$

$$u_{22} = \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty \frac{\cos p(x-x')}{\Delta}\,dp\,\sqrt{p^2-K^2}\Big[\Big\{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 + p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'} + \Big\{p^4 + p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$\frac{k^2}{2}\,p^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\cos p(x-x')}{\Delta}\,dp\,\sqrt{p^2-K^2}\Big[\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'} + p^2 e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$\boxed{y = y' = 0}$

$$u_{11} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \cos p(x-x')dp \cdot \left[\frac{p^2}{k^2}\frac{2p^2\sqrt{p^2-k^2}}{\Delta} + \frac{\sqrt{(p^2-k^2)}}{k^2}\frac{2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\Delta} + 4p^2\sqrt{p^2-k^2}\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)}{k^2\Delta} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty \frac{\cos p(x-x')}{\Delta} dp \sqrt{p^2-k^2}\left[p^4 + \left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 + 2p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right) \right]$$

$$\left(p^2 + \frac{k^2}{2} - p^2\right)^2 = \frac{k^4}{4}$$

$$= \frac{k^2}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\cos p(x-x')}{\Delta}\sqrt{p^2-k^2}\,dp \quad //$$

$$u_{12} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \sin p(x-x')dp \cdot \left[\frac{p}{k^2}\sqrt{p^2-k^2}\,\frac{2p^2\sqrt{p^2-k^2}}{\Delta} + \frac{p}{k^2}\cancel{\sqrt{\ }}\times\frac{2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\Delta} + \frac{2p^3\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)}{k^2\Delta} + 2\frac{p}{k^2\Delta}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty \frac{\sin p(x-x')}{\Delta}dp\; p\left[p^2\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2} + \left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 + \left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2} + p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right) \right]$$

$$\frac{k^2}{2}\left[\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2} + \left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \sin p(x-x')\frac{dp}{\Delta}\cdot p\left[\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right) + \sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\right] \quad //$$

$$u_{21} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \sin p(x-x')dp\left[-\frac{2p}{k^2\Delta}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 - \frac{2p^3\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}}{k^2\Delta} - \frac{2p^3}{k^2\Delta}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right) - \frac{2p}{k^2\Delta}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2} \right]$$

$$= \frac{-1}{\pi k^2}\int_0^\infty \sin p(x-x')dp\,p\cdot\left[\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 + p^2\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2} + p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right) + \left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sqrt{\ \ } \right]$$

$$= -u_{12} \quad //$$

$$u_{22} = \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty \frac{\cos p(x-x')dp}{\Delta}\sqrt{p^2-K^2}\left[\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 + p^4 + 2p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right) \right]$$

$$= \frac{k^2}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\cos p(x-x')\,dp\sqrt{p^2-K^2}}{\Delta} \quad //$$

これらの式において $k, K \to 0$ の時は 静的弾性論の値に一致しなければならない。

その時 前頁の積分の値は 被積分関数の $p \gg 1$ の値で大体決まると考えられ $\Delta \longrightarrow -\frac{1+\nu}{4}k^2p^2$ であり、また

$$\int_0^\infty e^{-py+ipx}\,dp = \frac{i}{x+iy}$$

を積分して

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-py}}{p}(\cos px-1)\,dp &= -\log|x-iy|\\ \int_0^\infty \frac{e^{-py}}{p}\sin px\,dp &= -\tan^{-1}\frac{y}{x}\end{aligned}\right\}$$

であるから $y=y'=0$ においては

$\frac{2(1+\nu)}{1+\nu}$

$$\left.\begin{aligned}u_{11} &\longrightarrow \frac{-1}{\pi(1+\nu)}\log|x|\\ u_{12}=-u_{21} &\longrightarrow \frac{-\left(\frac{K}{k}\right)^2}{(1+\nu)\pi}\times\begin{cases}0 & \text{for } x>x'\\ \pi & \text{for } x<x'\end{cases}\\ u_{22} &\longrightarrow \frac{-1}{\pi(1+\nu)}\log|x|\end{aligned}\right\}$$

これは $k \to 0$ の極限に一致する。

静的弾性論の極限値

$y=0 \qquad \theta' = -\theta, \quad R = R'$

$$u_{11} = \frac{2}{\pi} l_g R - \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'}(2y'\theta) = \frac{2}{\pi} l_g R + \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{2y'^2}{R^2}$$

$$u_{12} = +\frac{2}{\pi}\theta - \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y'}\left\{(x-x') l_g \frac{R}{R'} + y'(\theta-\theta')\right\}$$

$$u_{21} = -\frac{2}{\pi}\theta - \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'}(x-x')(2\theta)$$

$$+\frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1+\nu}{2\pi}(x-x') l_g \frac{R}{R'}\right\}$$

$$u_{22}\Big|_{y'} = \frac{2}{\pi} l_g R + \frac{1-\nu^2}{4\pi}(1+y')\frac{2y'}{R^2} + \frac{(1+\nu)^2}{2\pi}\frac{y'^2}{R^2}$$

$$u_{12} = \frac{2}{\pi}\theta - \frac{1+\nu}{\pi}\theta = \frac{1-\nu}{\pi}\theta$$

$$u_{21} = -\frac{2}{\pi}\theta + \frac{1+\nu}{\pi}\theta + \frac{1+\nu}{\pi}(x-x')\frac{y'}{R^2} - \frac{1+\nu}{\pi}(x-x')\frac{y'}{R^2}$$

$$= -u_{12}$$

$$u_{22} = \frac{2}{\pi} l_g R + \frac{1+\nu}{\pi} \frac{y'^2}{R^2}$$

4 遠場の表現

附録Aの漸近展開を2節の式に代入すればよいが、ここでは γ, ω の別の表現から求めて見よう。

その為に(2.3), (2.4)に(A.6), (A.7)を代入して積分順序を変更し、コッチン関数 G, $\bar{H}$ を次のように導入すると、

$$
\left.\begin{aligned}
G(p) &= \int_C \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n} - \gamma \frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ipX - \sqrt{p^2-k^2}\,Y}\, ds, \\
\bar{H}(p) &= \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ipX - \sqrt{p^2-k^2}\,Y}\, ds,
\end{aligned}\right\} \quad (4.1)
$$

こゝに X, Y は C の中心(任意)からの座標とする

また

$$
\left.\begin{aligned}
G^*(p) &= \int_C \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n} - \gamma \frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ipX + \sqrt{p^2-k^2}\,Y}\, ds, \\
\bar{H}^*(p) &= \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ipX + \sqrt{p^2-k^2}\,Y}\, ds,
\end{aligned}\right\} \quad (4.2)
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma(Q) = \gamma_0(Q) &- \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')} A(p)\,dp \cdot \left[e^{-ip(x'-x)} G(p) + e^{ip(x'-x)} G(-p) \right] \\
&- \frac{\left(\frac{k}{\nu}\right)^4}{4\pi i}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y' - \sqrt{p^2-k^2}\,y} C(p)\,dp \cdot \left[e^{-ip(x'-x)} \bar{H}(p) - e^{ip(x'-x)} \bar{H}(-p) \right].
\end{aligned} \quad (4.3)
$$

($\sqrt{p^2-k^2}$ の側々 k の時の値は $\pm i\sqrt{k^2-p^2}$ for $\mathrm{Im}(p) \gtrless 0$
或いは $p = k\cos\varphi$ とおく時は $\varphi \gtrless 0$
こうすると $\bar{H}^*$, G^* は別に分けて定義する事となる。)

$$\omega(Q) = \omega_0(Q) - \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-k_0^2}\,(y+y')} B(p)\,dp \cdot \left[e^{-ip(x'-x)} \overline{H}(p) + e^{ip(x'-x)} \overline{H}(-p) \right]$$

$$- \frac{\left(\frac{\beta}{K}\right)^4}{4\pi i}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y - \sqrt{p^2-k_0^2}\,y'} D(p)\,dp \left[e^{-ip(x'-x)} G(p) - e^{+ip(x'-x)} G(-p) \right], \quad (44)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0(Q) &= \frac{i}{4}\int_C \left(\gamma \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n}\right) H_0^{(1)}(KR)\,ds, \\ \omega_0(Q) &= \frac{i}{4}\int_C \left(\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n}\right) H_0^{(1)}(k_0R)\,ds. \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0(Q) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,(y'-y)}\,dp}{\sqrt{p^2-K^2}} \left[e^{-ip(x'-x)} G^*(p) + e^{ip(x'-x)} G^*(-p) \right] \quad \text{for } y' > y, \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,(y-y')}\,dp}{\sqrt{p^2-K^2}} \left[e^{-ip(x'-x)} G(p) + e^{ip(x'-x)} G(-p) \right], \quad \text{for } y > y' \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_0(Q) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-k_0^2}\,(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k_0^2}}\,dp \left[e^{-ip(x'-x)} \overline{H}^*(p) + e^{ip(x'-x)} \overline{H}^*(-p) \right] \quad \text{for } y' > y \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-k_0^2}\,(y-y')}\,dp}{\sqrt{p^2-k_0^2}} \left[e^{-ip(x'-x)} \overline{H}(p) + e^{ip(x'-x)} \overline{H}(-p) \right] \quad \text{for } y > y' \end{aligned}\right\}$$

ここに (x, y) は C の中心の座標とする。 (47)

これらの表現から附録Aと同様にして漸近展開を得る事が出来るが それは次の4つの項にわける事が出来る。

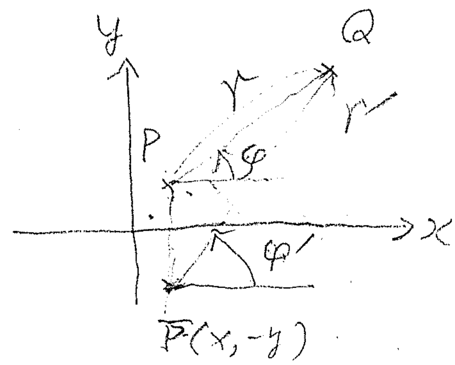
$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \gamma_0 + \gamma_K + \gamma_k + \gamma_R \\ \omega = \omega_0 + \omega_k + \omega_K + \omega_R \end{array}\right\} \quad (4.8)$$

γ_0, ω_0は(4.5)〜(4.7)であり，γ_K, ω_kは自由表面に関する鏡像による項，γ_k, ω_Kは夫々の干渉項，γ_R, ω_Rはレーリー波に関する項である。

まず

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_0(Q) \longrightarrow \dfrac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}} G^*(k\cos\varphi) \\ \omega_0(Q) \longrightarrow \dfrac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}} F^*(k\cos\varphi) \end{array}\right\} (4.9)$$

for $\pi > \varphi > 0$



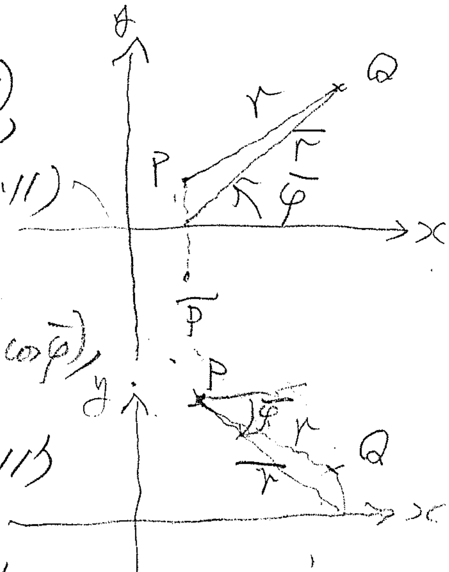
$$\left.\begin{array}{l} \gamma_0(Q) \longrightarrow \dfrac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}} G(k\cos\varphi) \\ \omega_0(Q) \longrightarrow \dfrac{e^{ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}} F(-k\cos\varphi) \end{array}\right\} (4.9')$$

for $-\pi < \varphi < 0$

$$\gamma_K(Q) \longrightarrow \frac{-\sqrt{i}\, e^{-iKr'}}{2\sqrt{2\pi K r'}} A(K\cos\varphi')\, K\sin\varphi'\, G(K\cos\varphi'),$$

$$\omega_k(Q) \longrightarrow \frac{-\sqrt{i}\, e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi k r'}} B(k\cos\varphi')\, k\sin\varphi'\, \bar{H}(k\cos\varphi'), \qquad (4.10)$$

次に γ_k, ω_K は y と y' の相対位置によって大変複雑になるが、ここでは実際上必要な（y又はy'が0に近い）次の２つの場合のみ考える。



$$\gamma_k \longrightarrow -\frac{\mathrm{sgn}(x'-x)\left(\frac{K}{k}\right)^4 e^{-iK\bar{r} - \sqrt{K^2\cos^2\bar\varphi - k^2}\, y}}{2\sqrt{2\pi i K\bar{r}}} C(K\cos\bar\varphi)\, K\sin\bar\varphi\, \bar{H}(K\cos\bar\varphi),$$

for $y' \gg y \fallingdotseq 0$, (4.11)

$$\gamma_k \longrightarrow -\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 \mathrm{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i k\bar{r}}} e^{-ik\bar{r} - \sqrt{k^2\cos^2\bar\varphi - K^2}\, y'} C(k\cos\bar\varphi)\, k\sin\bar\varphi\, \bar{H}(k\cos\bar\varphi),$$

for $y \gg y' \fallingdotseq 0$, (4.11)

$$\omega_K \longrightarrow -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4 \mathrm{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i k\bar{r}}} e^{-ik\bar{r} - \sqrt{k^2\cos^2\bar\varphi - K^2}\, y} D(k\cos\bar\varphi)\, k\sin\bar\varphi\, G(k\cos\bar\varphi),$$

for $y' \gg y \fallingdotseq 0$

$$\omega_K \longrightarrow -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4 \mathrm{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i K\bar{r}}} e^{-iK\bar{r} - \sqrt{K^2\cos^2\bar\varphi - k^2}\, y'} D(K\cos\bar\varphi)\, K\sin\bar\varphi\, G(k\cos\bar\varphi),$$

for $y \gg y' \fallingdotseq 0$ (4.12)

のようになって この現在 $y' \gtrless y$ で波の性質が変る。

最後にレーリー波に関する部分は留数分で、

$$A'(K_R),\ B',\ C',\ D' = \lim_{p\to\pm K_R} (p-K_R)A(p)$$

とすると．

$$\gamma_R \to \frac{i}{2} A'(K_R) \frac{e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2-k^2}(y+y')}}{G(\pm K_R)}$$

$$\pm \frac{\left(\frac{k}{k_t}\right)^4}{2} C'(K_R) \frac{e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2-k_t^2}\,y - \sqrt{K_R^2-k^2}\,y'}}{F(\pm K_R)}, \quad \cdots \quad (4.13)$$

$$\omega_R \to \frac{i}{2} B'(K_R) \frac{e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2-k_t^2}(y+y')}}{F(\pm K_R)}$$

$$\pm \frac{\left(\frac{k_t}{k}\right)^4}{2} D'(K_R) \frac{e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2-k^2}\,y - \sqrt{K_R^2-k_t^2}\,y'}}{G(\pm K_R)},$$

$+$ sgn for $x'>x$, $-$ sgn for $x'<x$.

最も簡単な場合としてまず

$$G(K\cos\varphi) = G^{*}(K\cos\varphi) = G(k\cos\bar{\varphi}) = G(\pm K_R) = G(0), \quad \bar{H} = 0 \qquad (4.14)$$

つまりP点における無指向性のぼう張収縮源を考えると、

$$\gamma_0 \to \frac{e^{-iKr}}{2\sqrt{2\pi iKr}}\, G(0),$$

$$\gamma_K \to -\frac{-\sqrt{i}\, e^{-iKr'}}{2\sqrt{2\pi Kr'}}\, A(K\cos\varphi') K\sin\varphi'\, G(0),$$

$$\gamma_{kR} \xrightarrow[y' \fallingdotseq 0]{} 0,$$

$$\gamma_R \to \frac{i}{2} A'(K_R)\, e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2-K^2}(y+y')}\, G(0), \qquad (4.15)$$

$$\omega_0 \to 0, \quad \omega_k \to 0$$

$$\omega_K \xrightarrow[y \fallingdotseq 0]{} -\frac{\left(\frac{i}{K}\right)^4 \mathrm{sgn}(x'-x)\, e^{-iKr - \sqrt{K^2\cos^2\bar{\varphi} - k_R^2}\, y'}}{2\sqrt{2\pi iKr}}\, D(k\cos\bar{\varphi}) K\sin\bar{\varphi}\, G(0)$$

$$\omega_R \to \pm \frac{\left(\frac{i}{K}\right)^4}{2} D'(K_R)\, e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2-K^2}\, y - \sqrt{K_R^2-K^2}\, y'}\, G(0),$$

同様にして

$$\left.\begin{aligned} \bar{H} &= \bar{H}(0) \\ G &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (4.16)$$

つまり無指向性の剪断振動とすれば

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_0 = \gamma_K = 0 \\
&\gamma_k \xrightarrow[y' \doteq 0]{} -\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i k r}} e^{-ikr - \sqrt{k^2\cos^2\varphi - K^2}\, y'} C(k\cos\varphi)\, k\sin\varphi\, \bar{H}(0), \\
&\gamma_R \longrightarrow \pm \frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4}{2} C'(K_R) e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2}\, y - \sqrt{K_R^2 - K^2}\, y'} \bar{H}(0), \\
&\omega_0 \longrightarrow \frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}} \bar{H}(0), \\
&\omega_k \longrightarrow -\frac{\sqrt{i}\, e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi k r'}} B(k\cos\varphi')\, k\sin\varphi'\, \bar{H}(0), \\
&\omega_K \longrightarrow 0 \\
&\omega_R \longrightarrow \frac{i}{2} B'(K_R) e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2}\,(y + y')} \bar{H}(0)
\end{aligned}\right\} (4.17)$$

5. インピーダンス，波の強制力，可逆定理

振動の規準化された変位モードを u_j，その速度振幅を I，とすると それによる境界力は $GI\tau_j/i\omega$ であるから媒質が物体に及ぼす一般力 V は

$$V = -\frac{GI}{i\omega}\int_C \tau_j u_j\,ds \quad , \cdots\cdots (5.1)$$

となる。

それ故

$$V = IZ, \quad \cdots \quad (5.2)$$

と書いて Z をインピーダンスとすると

$$Z = i\frac{G}{\omega}\int_C \tau_j u_j\,ds, \quad \cdots\cdots (5.3)$$

次に n 番目の変位モードを $u_j^{(n)}$，速度振幅を I_n，規準化境界力を τ_j
m 番目のを夫々，$u_j^{(m)}$，$\tau_j^{(m)}$，I_m とすると

m 番目の振動による n 方向の一般力 $V_{m,n}$ は

$$V_{m,n} = -\frac{GI_m}{i\omega}\int \tau_j^{(m)} u_j^{(n)}\,ds$$

$$= I_m Z_{m,n} \quad \cdots\cdots (5.4)$$

$$Z_{m,n} = \frac{iG}{\omega}\int_C \tau_j^{(m)} u_j^{(n)}\,ds, \quad (5.5)$$

これは相互インピーダンスである。

そこでグリーンの定理より明らかに

$$\int_C \left(T_j^{(m)} u_j^{(n)} - T_j^{(n)} u_j^{(m)} \right) ds = 0 , \quad \cdots (1.6)$$

となるから

$$Z_{m,n} = Z_{n,m} , \quad \cdots (5.7)$$

となり，可逆性が成立する。

次に物体が2つあっても(1.6)は成立つから，今Sを振動源としCに及ぼす力を考えよう。

Sの振動による変位を$u_j^{(s)}$，境界力を$G T_j^{(s)}$とおこう。

Cはこの波を反射散乱するからそれを$u_j^{(d)}$，$G T_j^{(d)}$とおこう。

Cに働く一般力は

$$V_s = -G \int_C \left(T_j^{(s)} + T_j^{(d)} \right) u_j \, ds , \quad \cdots (5.8)$$

所で

$$\int_C T_j^{(d)} u_j \, ds = \int_C T_j u_j^{(d)} ds , \quad \cdots (5.9)$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(d)} &= -u_j^{(s)} \quad \text{on } C , \\ u_j &= 0 \quad \text{on } S , \end{aligned} \right\} (5.10)$$

と定義すると

$$V_s = -G\int_C \left(T_j^{(S)} u_j - T_j u_j^{(S)}\right) ds\,, \quad\cdots\quad (5.11)$$

また(5.6)で積分範囲をCとSとおいたものを使うと．

$$V_S = +G\int_S \left(T_j^{(S)} u_j - T_j u_j^{(S)}\right) ds\,, \quad\cdots\quad (5.12)$$

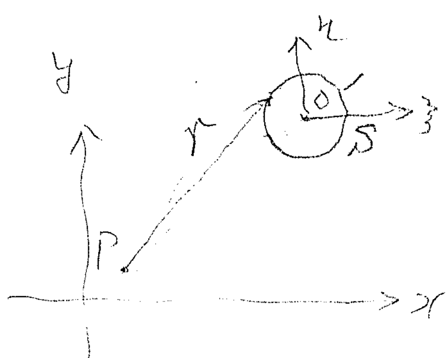
なる可逆性が成立する。

所で2つの物体が充分離れていると（互の反射等は無視すると）前節の漸近展開が成立つから，上式はもっと具体的に書き下せる。

まず(5.12)を4節の式により部分積分して γ, ω に変換すると

$$V_S = Gk^2\int_S \left[\frac{1}{K^4}\left(\gamma\frac{\partial\gamma^{(S)}}{\partial n} - \gamma^{(S)}\frac{\partial\gamma}{\partial n}\right) + \frac{1}{k^4}\left(\omega\frac{\partial\omega^{(S)}}{\partial n} - \omega^{(S)}\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)\right] \times ds\,, \quad (5.13)$$

又 S の中心を O′ とすると



$$r = r_0 + \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi\,,$$

となるので

$$\left.\begin{aligned} G_S^{*(s)}(p) &= \int_S \left(\frac{\partial \gamma^{(s)}}{\partial n} - \gamma^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ip\xi + \sqrt{p^2-k^2}\,\eta}\, ds, \\ \overline{H}_S^{*}(p) &= \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ip\xi + \sqrt{p^2-k^2}\,\eta}\, ds, \end{aligned}\right\} \quad (5.14)$$

とおくと (4.8)に対応して V_S は 8項から成る。

$$V_S = k^2 G\left[\frac{1}{K^4}(v_0 + v_K + v_R + v_R) + \frac{1}{k^4}(w_0 + w_R + w_K + w_F)\right], \quad (5.15)$$

$$v_0 = \int_S \left(\frac{\partial \gamma^{(s)}}{\partial n} - \gamma^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right)\gamma_0\, ds = \frac{e^{-iKr}}{2\sqrt{2\pi i K r}}\, G^*(K\cos\varphi)\, G_S^*(K\cos\overline{\varphi+\pi}),$$

$$v_K = \int_S \left(\frac{\partial \gamma^{(s)}}{\partial n} - \gamma^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right)\gamma_K\, ds = \frac{-\sqrt{i}\, e^{-iKr'}}{2\sqrt{2\pi i K r}}\, A(K\cos\varphi)\, K\sin\varphi'\, G(K\cos\varphi') \times \times G_S^*(K\cos\overline{\varphi+\pi}),$$

$$v_R = \int_S \left(\frac{\partial \gamma^{(s)}}{\partial n} - \gamma^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right)\gamma_R\, ds = -\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i K \overline{r}}}\, e^{-iK\overline{r} - \sqrt{K^2\cos^2\overline{\varphi} - k^2}\, y}\, C(K\cos\overline{\varphi})\, K\sin\overline{\varphi} \times \times \overline{F}(K\cos\overline{\varphi})\, G_S^*(K\cos\overline{\varphi+\pi})$$

$$v_R = \int_S \left(\frac{\partial \gamma^{s}}{\partial n} - \gamma^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right)\gamma_R\, ds = \frac{i}{2} A'(K_R)\, e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2-k^2}\,y - \sqrt{K_R^2-k^2}\,y'}\, G(\pm K_R)\cdot G_S(\mp K_R)$$
$$\pm \frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4}{2}\, C'(K_R)\, e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2-k^2}\,y - \sqrt{K_R^2-k^2}\,y'}\, \overline{F}(\pm K_R)\, G_S(\mp K_R),$$

(5.16)

$$w_0 = \int_S \left(\frac{\partial \omega_s}{\partial n} - \omega^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right)\omega_0\, ds = \frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}}\, \overline{H}^*(k\cos\varphi)\,\overline{H}_S^*(k\cos\overline{\varphi+\pi}),$$

$$w_k = \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right)\omega_k\, ds = \frac{-\sqrt{i}\, e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi k r'}}\, B(k\cos\varphi')\, k\sin\varphi'\, \overline{H}(k\cos\varphi') \times$$
$$\times\, \overline{H}_S^*(k\cos\overline{\varphi'+\pi}),$$

$$w_K = \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right)\omega_K\, ds = -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i k \overline{r}}}\, e^{-ik\overline{r} - \sqrt{k^2\cos^2\overline{\varphi} - K^2}\, y}\, D(k\cos\overline{\varphi})\, k\sin\overline{\varphi} \times$$
$$G(k\cos\overline{\varphi})\, \overline{F}_S^*(k\cos\overline{\varphi+\pi}),$$

$$w_R = \frac{i}{2} B'(K_R)\, e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2}\,(y+y')}\, \overline{H}(\pm K_R)\,\overline{F}_S(\mp K_R)$$
$$\pm \frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4}{2} D'(K_R)\, e^{\mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2 - K^2}\, y - \sqrt{K_R^2 - k^2}\, y'}\, G(\pm K_R)\, F_S(\mp K_R),$$

以上 (5.17)

なお

$$G_S(p) = \int_S \left(\frac{\partial \gamma^{(s)}}{\partial n} - \gamma^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ip\xi - \sqrt{p^2 - K^2}\,\eta}\, ds,$$

$$\overline{F}_S(p) = \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)}\frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ip\xi - \sqrt{p^2 - k^2}\,\eta}\, ds, \qquad (5.14')$$

$y \to 0$ ならば $r = r' = \overline{r}$, $\varphi = \varphi' = \overline{\varphi}$ となるので大分簡単になり，また前節の (4.14), (4.15) のような場合は v_0, v_k, v_K, v_R が 0 となる。又逆に (4.12)(4.13) の場合は $w_0 \sim w_R$ が 0 となる。

これは水波理論におけるハスキントの関係と呼ばれるものの一般的場合である。

r が充分大きければ v_R と w_R だけ残り，よく知られたハスキントの関係である。

$\varphi=\varphi'=\bar{\varphi}\fallingdotseq 0$ となると $\left(\begin{array}{l}\bar{F}^*(k)=\bar{F}(k)\\ G^*(K)=G(K)\end{array}\right)$

$$
\left.\begin{array}{l}
1\fallingdotseq i\,A(K\cos\varphi)\,K\operatorname{ch}\varphi\\
1\fallingdotseq i\,B(k\cos\varphi)\,k\operatorname{ch}\varphi\\
C(K\cos\varphi)\,K\operatorname{sh}\varphi\fallingdotseq 0\\
D(k\cos\varphi)\,k\operatorname{sh}\varphi\fallingdotseq 0
\end{array}\right\}
$$

となるので v_R, w_R のみとなる。

これは又 $r\gg 1$ でも同じであす。($r\gg 1$ ならば $\varphi\fallingdotseq 0$)

簡単の為に $r=r'=\bar{r}$，$\varphi=\varphi'=\bar{\varphi}$ とし，G, G_s ／ $\bar{H}, \bar{H}_s$ が無指向性ならば（$\overset{\text{又}}{y}=0$）

$$V_s = \frac{\rho\omega^2}{K^4}\left[\frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i kr}}\left\{(1-iA(K\cos\varphi))G(0)G_s(0) - \mathrm{sgn}(x'-x)\left(\frac{K}{k_R}\right)^4 C(K\cos\varphi)K\sin\varphi\, G_s(0)\bar{H}(0)\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{e^{\mp ik_R(x'-x)-\sqrt{k_R^2-K^2}\,y'}}{2} G_s(0)\left\{iA'G(0) \pm \left(\frac{K}{k_R}\right)^4 C'\bar{H}(0)\right\}\right]$$

$$+ \frac{\rho\omega^2}{k^4}\left[\frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i kr}}\left\{(1-iB(k\cos\varphi))\bar{H}(0)\bar{H}_s(0) - \mathrm{sgn}(x'-x)\left(\frac{k}{K}\right)^4 D(k\cos\varphi)k\sin\varphi\, G(0)\bar{H}_s(0)\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{e^{\mp ik_R(x'-x)-\sqrt{k_R^2-k^2}\,y'}}{2}\left\{iB'\bar{H}(0) \pm \left(\frac{k}{K}\right)^4 D'G(0)\right\}\bar{H}_s(0)\right] \qquad (5.18)$$

Date

6. 放射動力と減衰抵抗

Cが振動（モード）u_y，亜度振幅 I によって単位時間に放射するエネルギー，放射動力，Wは

$$W = \frac{G}{4i\omega} I \bar{I} \int_C (u_y \bar{\tau}_y - \bar{u}_y \tau_y)\, ds , \quad \cdots (6.1)$$

で与えられる。

一方 (5.3) のインピーダンスの実部Rは u_yを実とすると

$$R = \mathrm{Re}\{Z\} = \frac{iG}{2\omega} \int_C (\tau_y \bar{u}_y - u_y \bar{\tau}_y)\, ds , \quad (6.2)$$

と書けるから (6.1)は

$$W = \frac{R}{2} I \bar{I} , \quad \cdots (6.3)$$

となり，放射動力は抵抗Rのなす仕事である。
（実効値をとれば $W = R|I|^2$ となる）

(6.1) 右辺の積分はグリーンの定理により（自由表面で $\tau_y = 0$ を考慮すると）充分大きい半円上の積分によって評価出来る。
そこでは漸近展開 (4.18) 以下の式が成立ち
また $r \doteqdot r' \doteqdot \bar{r}$ ，$\bar{\theta} \doteqdot \theta' \doteqdot \theta$ と考えられるから
この積分は縦波，横波，レーリー波によるものの3成分に分けられる。

$$W = W_K + W_k + W_R, \qquad (6.4)$$

縦波と横波については(4.8),(4.10)式から充分遠方では

$$\left.\begin{aligned} u_r &\fallingdotseq -\frac{1}{K^2}\frac{\partial \gamma}{\partial r}, \quad u_\varphi \fallingdotseq -\frac{1}{k^2}\frac{\partial \omega}{\partial r}, \\ \tau_r &\fallingdotseq \frac{k^2}{K^2}\gamma, \quad \tau_\varphi \fallingdotseq \omega \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

となるので

$$\int_\Gamma (u_1\bar{\tau}_1 + u_2\bar{\tau}_2 - \bar{u}_1\tau_1 - \bar{u}_2\tau_2)\,ds$$

$$= r\int_\Gamma (u_r\bar{\tau}_r + u_\varphi\bar{\tau}_\varphi - \bar{u}_r\tau_r - \bar{u}_\varphi\tau_\varphi)\,d\varphi$$

$$= r\int_\Gamma \left[-\frac{k^2}{K^4}\left(\gamma\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial r} - \bar{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right) + \frac{1}{k^2}\left(\omega\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial r} - \bar{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\right] d\varphi$$

となり，(4.8)〜(4.13)を代入すると，

$$W_K = \frac{G I\bar{I}}{4\omega}\left(\frac{k^2}{K^4}\right)\frac{1}{\cancel{4}\pi}\int_0^\pi \Big| G^*(K\cos\varphi) - iA(K\cos\varphi)K\sin\varphi\,G(K\cos\varphi)$$
$$- \operatorname{sgn}(x'-x)\left(\frac{K}{k}\right)^4 e^{-\sqrt{K^2\cos^2\varphi - k^2}\,y}\, C(K\cos\varphi)K\sin\varphi \times$$
$$\times \bar{H}(K\cos\varphi)\Big|^2 d\varphi, \qquad (6.6)$$

$$G = \frac{\rho\omega^2}{k^2}$$

$$W_k = \frac{\rho\omega I\bar{I}}{\cancel{16}\pi k^4}\int_0^\pi \Big| F^*(k\cos\varphi) - iB(k\cos\varphi)k\sin\varphi\,\bar{H}(k\cos\varphi)$$
$$- \left(\frac{k}{K}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)\, e^{-\sqrt{k^2\cos^2\varphi - K^2}\,y}\, D(k\cos\varphi)k\sin\varphi\, G(k\cos\varphi)\Big|^2 d\varphi, \qquad (6.7)$$

Date

レーリー波については $|x'-x| \gg 1$ の検査面上で y 方向に積分すればよい。

結果は附録に示すように、

$$W_R = \frac{\rho\omega}{2} I\bar{I} \frac{g(\nu)}{k^4}\left[a^+\overline{a^+} + a^-\overline{a^-}\right], \qquad (6.8)$$

$$a^\pm = \frac{1}{2}\left[A' G(k_R) e^{-\sqrt{k_R^2-k^2}\,y} \mp i\left(\frac{k}{K}\right)^4 C' \bar{H}(k_R) e^{-\sqrt{k_R^2-k^2}\,y}\right], \qquad (6.9)$$

特に $G^+(k\cos\varphi) = G(k\cos\varphi) = G(0)$, $\bar{H} = 0$ ならば

$$\left.\begin{aligned}
W_K &= \frac{\rho\omega}{8\pi K^4} I\bar{I} |G(0)|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|1 - iA(K\cos\varphi) K\sin\varphi\right|^2 d\varphi, \\
W_k &= \frac{\rho\omega}{8\pi K^4} I\bar{I} |G(0)|^2 \left(\frac{k}{K}\right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|e^{-\sqrt{k^2\cos^2\varphi - K^2}\,y} D(k\cos\varphi) k\sin\varphi\right|^2 d\varphi, \\
W_R &= \frac{\rho\omega}{4} I\bar{I} \frac{|G(0)|^2}{k^4} e^{-2\sqrt{k_R^2-K^2}\,y} |A'(k_R)|^2 g(\nu),
\end{aligned}\right\} (6.10)$$

$G = 0$, $\bar{H} = \bar{H}(0)$ ならば

$$\left.\begin{aligned}
W_K &= \frac{\rho\omega I\bar{I}}{8\pi k^4} \left(\frac{K}{k}\right)^4 |\bar{H}(0)|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|e^{-\sqrt{K^2\cos^2\varphi - k^2}\,y} C(K\cos\varphi) K\sin\varphi\right|^2 d\varphi, \\
W_k &= \frac{\rho\omega I\bar{I}}{8\pi} \frac{|\bar{H}(0)|^2}{k^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|1 - iB(k\cos\varphi) k\cos\varphi\right|^2 d\varphi, \\
W_R &= \frac{\rho\omega}{4} I\bar{I} \frac{|\bar{H}(0)|^2}{k^4} g(\nu) |D'|^2 e^{-2\sqrt{k_R^2-k^2}\,y},
\end{aligned}\right\} (6.11)$$

それぞれ (6.10) の場合は

$$W = \frac{\rho\omega}{8}\frac{I\bar{I}}{K^4}\left|G(0)\right|^2\left(Q_{KK} + Q_{KR}e^{-2\sqrt{k_R^2-K^2}y}\right), \quad (6.12)$$

(6.11) の場合は

$$W = \frac{\rho\omega}{8}\frac{I\bar{I}}{k^4}\left|H(0)\right|^2\left(Q_{kk} + Q_{kR}e^{-2\sqrt{k_R^2-k^2}y}\right), \quad (6.13)$$

と書け、その値は附録に示す。

なお、条件が無限に拡がっている場合は

$$Q_{KK} = Q_{kk} = 1, \qquad Q_{KR} = Q_{kR} = 0, \quad (6.14)$$

である。

なお、

$$\left.\begin{aligned} Q_K &= Q_{KK} + Q_{KR}e^{-2\sqrt{k_R^2-K^2}y} \\ Q_k &= Q_{kk} + Q_{kR}e^{-2\sqrt{k_R^2-k^2}y} \end{aligned}\right\} \cdots (6.15)$$

7. 物体の振動, 吸収動力, 伝達動力

振源Sの振動により,
境界Cで囲まれた物体が一つの振動モードU_jのみで振動する場合を考えよう。

速度振巾をIとし, インピーダンスをZ, 物体自身のインピーダンスをZ_i, 強制力((5.15)で与えられる)をV_sとすると運動方程式は

$$(Z+Z_i)I = V_s \,, \qquad (7.1)$$

所で

$$\left.\begin{aligned} Z &= R + iX \\ Z_i &= R_e + iX_i \end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

ここにR_eは附加減衰抵抗(あるいは内部抵抗)と書けるから吸収動力は

$$W_{ab} = \frac{R_e}{2} I\bar{I} = \frac{R_e}{2} \frac{V_s\bar{V_s}}{|R+R_e+i(X+X_i)|^2} \,, \qquad (7.3)$$

でありその最大値は所謂共役整合の時最大である

つまり $X+X_i=0$, $R=R_e$, (7.4)

その値は

$$\mathrm{Max}(W_{ab}) = \frac{V_s\bar{V_s}}{8R} \,, \qquad (7.5)$$

なおR_eが0の時は, 入力エネルギーは放射エネルギーと等しくなり, その値は同調時$(X+X_i=0)$に

$$W_T = \frac{R}{2} I \bar{I} = \frac{V_s \overline{V_s}}{2R} \qquad \text{---------} \qquad (7.6)$$

となる。

そして振源Sの放射動力をW_sとするとW_aはCに伝達された動力と見なす事も出来るから，その効率は

$$\frac{W_{aa}}{W_s} = \eta \qquad \text{---------} \qquad (7.7)$$

で与えられる。

従って

$$\mathrm{Max.}\,\eta = \frac{V_s \overline{V_s}}{8 R W_s} \qquad \text{---------} \qquad (7.8)$$

今簡単の為に振源は無指向性で$G_s = 0$とするとW_sは(6.13)で与えられる。

また$\overline{R}$の$\overline{F}$もGも無指向性とすると(5.18)により

$$V_s = \mp \frac{\rho \omega I_s}{i k^4} \overline{F_s}(0) \Big[\frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}} \Big\{ (1 - iB(k\cos\varphi)) \overline{F}(0) - sg(x'-x)\left(\frac{\kappa}{k}\right)^2 D\, k \sin\varphi\, \overline{G}(0) \Big\} + \frac{e^{\mp i k_0 (x - x') - \sqrt{k_0^2 - k^2}\, y'}}{2} \left(i B' \overline{F}(0) \pm \left(\frac{\kappa}{k}\right)^2 D' G(0) \right) \Big], \qquad (7.9)$$

こゝに(5.18)はI_sが陽に出ていないのでこゝではそれを外に出してある。

上式で
また $G(0)$を無視すると (6.3) と (6.13) から

$$R = \frac{\rho\omega}{4k^4}\left|\bar{H}(0)\right|^2 Q_k \quad , \qquad (7.10)$$

また $$W_s = \frac{\rho\omega I_s \bar{I_s}}{8k^4}\left|\bar{H}_s(0)\right|^2 Q_k \quad , \qquad (7.11)$$

これらを (7.8) に代入すると

$$\mathrm{Max}\,\eta = \frac{\rho^2\omega^2 I_s\bar{I_s}\left|\bar{H}_s(0)\right|^2\left|\bar{H}(0)\right|^2}{8k^8 \cdot \frac{\rho^2\omega^2}{32k^8} I_s\bar{I_s}\left|\bar{H}_s\bar{H}\right|^2 Q_k^2} \cdots$$

$$= \frac{4}{Q_k^2}\left|\frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}}\left(1-iB(k\cos\varphi)\right)+\frac{i}{2}B' e^{\mp ik(r-x)-\sqrt{k^2}y'}\right|^2 , \qquad (7.12)$$

$r \gg 1$ で $\varphi \doteqdot 0$ ならば右辺第1項は小さくて

$$\mathrm{Max}\,\eta = \frac{|B'|^2}{Q_k}e^{-2\sqrt{k^2-k^2}\,y'} \quad , \qquad (7.13)$$

y'はSの中心のy座標である。

一般には大変複雑になるがいずれにしてもそれはゴッチン関数 F, G と r, φ, また振源の深さの関数となる。

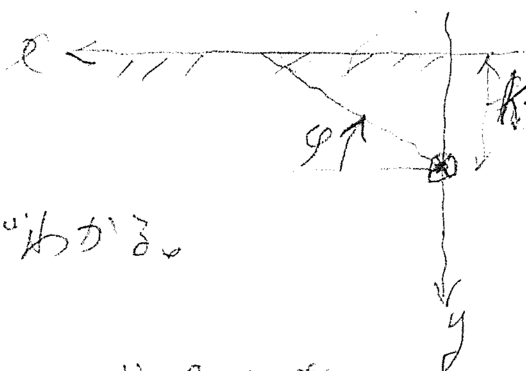
8. 計算例

震源の一つの代表例として(4.16)の場合を考えて見よう。

それによる地表面の変位を幾つかの深さについて計算した例を図に示す(未)

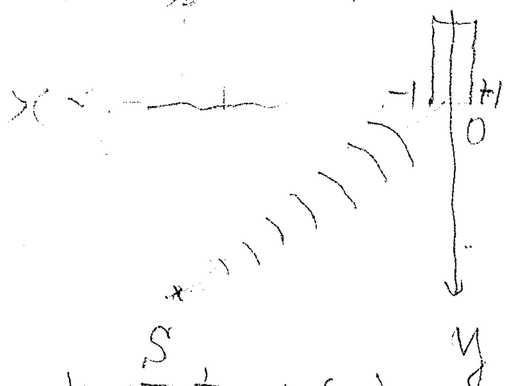
計算には(4.3)~(4.9)の表現を用いるが近似的には(4.17)から(1.8)により変位を求める。

これらの図から φが −30°~−60°の範囲を除けば殆どレーリー波のみとなる事がわかる。



次に今度は地表に建物がある場合を考えよう。

建物の振動は一様梁と見なせるとし各断面は変形せず、又垂直方向にも変形しないと仮定しよう。



そうすると地面に接する所での変形は3つに分けて考えられる。

i) 左右動（肩添字 1 で示す）

$$u_1^{(1)} = 1, \quad u_2^{(1)} = 0 \quad \text{for} \quad |x| \leq 1, \quad (8.1)$$

それに対するインピーダンスは (5.3) により

$$Z_{11} = \frac{\rho\omega}{ik^2}\int_{-1}^{1}\tau_1^{(1)}dx, \quad \cdots\cdots \quad (8.2)$$

ii) 上下動（肩添字 2 で示す）

$$u_1^{(2)} = 0, \quad u_2^{(2)} = 1, \quad \text{for} \quad |x| \leq 1, \quad (8.3)$$

$$Z_{22} = \frac{\rho\omega}{ik^2}\int_{-1}^{1}\tau_2^{(2)}dx, \quad \cdots\cdots \quad (8.4)$$

iii) 回転動（肩添字 3 で示す）

$$u_1^{(3)} = 0, \quad u_2^{(2)} = x \quad \text{for} \quad |x| \leq 1, \quad (8.5)$$

$$Z_{33} = \frac{\rho\omega}{ik^2}\int_{-1}^{1}\tau_2^{(3)}x\,dx, \quad \cdots\cdots \quad (8.6)$$

$$Z_{31} = \frac{\rho\omega}{ik^2}\int_{-1}^{1}\tau_1^{(3)}dx, \quad \cdots\cdots \quad (8.7)$$

一方 i) から

$$Z_{13} = \frac{\rho\omega}{ik^2}\int_{-1}^{1}\tau_2^{(1)}x\,dx, \quad \cdots\cdots \quad (8.8)$$

(5.5) により

$$Z_{31} = Z_{13}, \quad \cdots\cdots \quad (8.9)$$

今振動の速度振巾をまた I_1, I_2, I_3 とし、
強制力を V_1, V_2, V_3 とすると運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} I_1(Z_{11}+Z_{11}^{(i)}) + I_3(Z_{13}+Z_{13}^{(i)}) &= V_1 \\ I_2(Z_{22}+Z_{22}^{(i)}) &= V_2 \\ I_1(Z_{31}+Z_{31}^{(i)}) + I_3(Z_{33}+Z_{33}^{(i)}) &= V_3 \end{aligned}\right\} \quad (8.10)$$

$Z_{ij}^{(i)}$ は附録Dに示す連物のインピーダンスである。

なお $\quad Z_{22}^{(i)} = i\omega(2\omega l) \quad , \quad \ldots \quad (8.11)$

これを解けばよいわけである。

特に連物の固有振動数つまり

$$\Delta_1\Delta_2 = (\mathrm{ch}\,a\cos a)^2 - (\mathrm{sh}\,a\sin a)^2 = 0 \quad , \quad (8.12)$$

のときでは $Z^{(i)}$ は無限大となり、I_1, I_3 共に0となるから
$\Delta_1\Delta_2 \to 0$ として
(D.7)に代入すると $\xi(x)$ は有限な値となる。

附録A　L, M, N, O 関数

$$(\Delta + K^2)\begin{Bmatrix} L(P,Q) \\ O(P,Q) \end{Bmatrix} = 0$$

$$(\Delta + k^2)\begin{Bmatrix} M(P,Q) \\ N(P,Q) \end{Bmatrix} = 0 \qquad (A\cdot 1)$$

$$(\Delta' + K^2)\begin{Bmatrix} L(P,Q) \\ N(P,Q) \end{Bmatrix} = 0$$

$$(\Delta' + k^2)\begin{Bmatrix} M(P,Q) \\ O(P,Q) \end{Bmatrix} = 0 \qquad (A\cdot 2)$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y'}\right)^2,$$

$$P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y'),$$

$$L_{xy}(P,Q) + \left(\frac{K^2}{2} + \frac{K^2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) N(P,Q) = 0$$

$$N_{xy}(P,Q) - \left(\frac{k^2}{2K^2} + \frac{k^2}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) L(P,Q) = 0 \qquad (A\cdot 3)$$

for $y = 0$

$$O_{xy}(P,Q) + \frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) M(P,Q) = 0$$

$$M_{xy}(P,Q) - \frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) O(P,Q) = 0$$

for $y = 0$, $(A\cdot 4)$

L, Mは領域内に特異性を有し

$$L(P,Q) = \frac{i}{4}H_0^{(2)}(KR) + L'(P,Q)$$

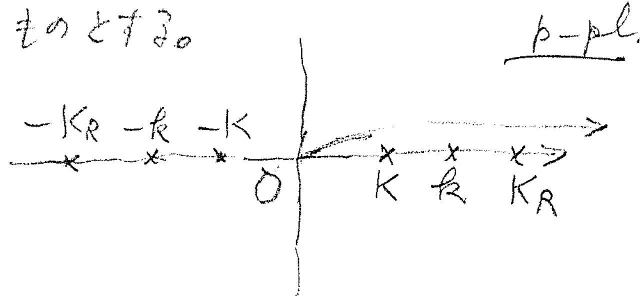
$$M(P,Q) = \frac{i}{4}H_0^{(2)}(kR) + M'(P,Q) \qquad (A\cdot 5)$$

$R = \overline{PQ}$

L′, M′, N, Oは領域内で正則とする。

$$\frac{i}{4}H_0^{(2)}(KR) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,|y'-y|}\,dp\,\cos p(x-x')}{\sqrt{p^2-K^2}}, \quad \cdots\ (A\cdot 6)$$

積分路は右図の如く採るものとする。



なお以後 $x'=0$ とおく。
今(A·1),(A·2)を考えて

$$L'(p,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')}\cos px\,A(p)\,dp,$$

$$M' = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')}\cos px\,B(p)\,dp,$$

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'-\sqrt{p^2-k^2}y}\sin pX\,C(p)\,dp,$$

$$O = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-K^2}y-\sqrt{p^2-k^2}y'}\sin px\,D(p)\,dp. \quad (A\cdot 7)$$

とおき(A·3),(A·4)の条件を考えると

$$\frac{p\sqrt{p^2-K^2}}{\sqrt{p^2-K^2}} + A(p)\sqrt{p^2-K^2}\,p + \frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)C(p) = 0$$

$$-p\sqrt{p^2-k^2}\,C(p) - \frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\left[\frac{-1}{\sqrt{p^2-K^2}} + A(p)\right] = 0$$

$$-p\sqrt{p^2-k^2}\,D + \frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{p^2-k^2}} + B\right) = 0$$

$$+p + p\sqrt{p^2-k^2}\,B - \frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)D = 0$$

$$\left.\begin{aligned} p\sqrt{p^2-K^2}\,A + \frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)C &= -p. \\ +\frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)A + p\sqrt{p^2-k^2}\,C &= \frac{k^2}{K^2}\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)}{\sqrt{p^2-K^2}} \end{aligned}\right\}(A\cdot 8)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)B - p\sqrt{p^2-k^2}\,D &= \frac{K^2}{k^2}\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)}{\sqrt{p^2-k^2}} \\ p\sqrt{p^2-k^2}\,B - \frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)D &= -p \end{aligned}\right\}(A\cdot 9)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ A &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\sqrt{p^2-K^2}} + p^2\sqrt{p^2-k^2}\right] = \frac{-1}{\sqrt{p^2-K^2}} + \frac{2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\Delta\sqrt{p^2-K^2}} \\ C &= \frac{-1}{\Delta}\left[\frac{k^2}{K^2}p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right) + \frac{k^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)p\sqrt{p^2-K^2}}{K^2\sqrt{p^2-K^2}}\right] \\ &= -\frac{2k^2}{\Delta K^2}p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right), \end{aligned}\right\}(A\cdot 10)$$

$$\Delta = \left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 - p^2\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2},$$

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{2K^2}{k^2\Delta}p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right) = -\frac{K^4}{k^4}C \\ B &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\sqrt{p^2-k^2}} + p^2\sqrt{p^2-K^2}\right] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{p^2-k^2}} + \frac{2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\Delta\sqrt{p^2-k^2}} \end{aligned}\right\}(A\cdot 11)$$

毛利忠

$$L(P,Q) = \frac{i}{4}\left\{H_0^{(2)}(KR) + H_0^{(2)}(KR')\right\}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')}\cos px}{\Delta\sqrt{p^2-K^2}}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 dp, \quad R' = \sqrt{x^2+(y+y')^2}$$

$$M(P,Q) = \frac{i}{4}\left\{H_0^{(2)}(kR) + H_0^{(2)}(kR')\right\}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')}\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2\cos px}{\Delta\sqrt{p^2-k^2}}\,dp,$$

$$N(P,Q) = -\frac{k^2}{\pi K^2}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-K^2}y' - \sqrt{p^2-k^2}y}\,p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sin px\,\frac{dp}{\Delta},$$

$$O(P,Q) = \frac{K^2}{\pi k^2}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-K^2}y - \sqrt{p^2-k^2}y'}\,p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sin px\,\frac{dp}{\Delta},$$

(A.12)

NとOを比較すると

$$\left(\frac{k}{K}\right)^4 O(P,Q) = N(Q,P), \quad \cdots \quad (A.13)$$

またQ点が自由表面上にある時は次式の関係がある。

$$L_{x'y'}(P,Q) + \frac{k_1^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) O(P,Q) = 0$$

$$O_{x'y'}(P,Q) - \frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) L(P,Q) = 0$$

(A.14) for $y'=0$

$$N_{x'y'}(P,Q) + \frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) M(P,Q) = 0$$

$$M_{x'y'}(P,Q) - \frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) N(P,Q) = 0$$

(A.15) for $y'=0$

i) 積分表示，Δの性質.

ii) $k \to 0$

iii) $x \to \infty$

i) 積分表示.

(A.12) の表現は数値積分に向いてないので少し変形しよう。

まず Δ は $p=\pm K_R$ に零点をもつ。

$$\Delta = \left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 - p^2\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}$$

$$\xrightarrow[p\to K_R]{} (p^2-K_R^2)\,k^2 A(K_R) \qquad , \quad \cdots\cdots \quad (A.16)$$

ν	σ	$\left(\frac{K}{k}\right)^2$	K_R/k	A
1/2	1/3	1/4	1.072	
1/3	1/4	1/3	1.088	

$\nu = \frac{\sigma}{1-\sigma}$, $\left(\frac{K}{k}\right)^2 = \frac{1-\nu}{2}$

なお $(P/k)^2 = x$ として

$$A = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta}{k^4}\right)\Bigg|_{x=(K_R/k)^2} = (2x-1) - \sqrt{x-1}\sqrt{x-\tfrac{1-\nu}{2}} - \frac{x}{2}\left(\frac{\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}}{\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}}\right)$$

$$= (2x-1) - \frac{1}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}}\left\{2(x-1)\left(x-\frac{1-\nu}{2}\right) + x\left(x-\frac{1-\nu}{2}\right) + x(x-1)\right\}$$

$$2x^2 - \frac{3-\nu}{\ }x + 1-\nu \quad + 2x^2 - x\left(\frac{3-\nu}{2}\right) + \frac{1-\nu}{2}$$

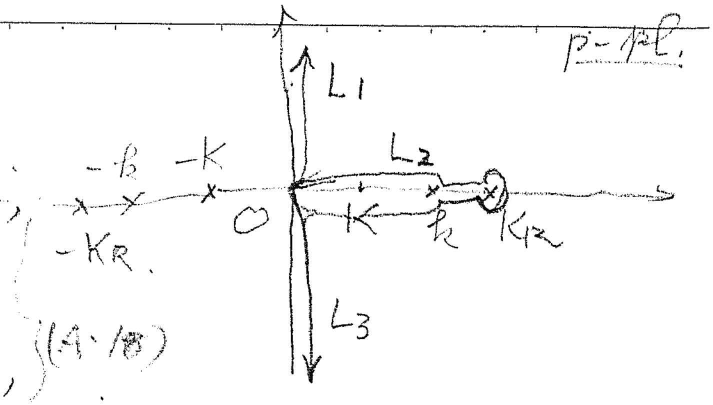
$$= (2x-1) - \frac{2x^2-\frac{3}{2}(3-\nu)x + \frac{3}{2}(1-\nu)}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}} =$$

$$= (2x-1) - \frac{x\left\{2x^2-\frac{3}{2}(3-\nu)x + \frac{3}{2}(1-\nu)\right\}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \quad , \quad (A.17)$$

$\because$ $\Delta=0$ なる $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = x\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}$

さてこれらの積分を今

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\gamma y}\cos px\,\frac{F}{\Delta}\,dp,$$



$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\gamma y}\sin px\,\frac{F}{\Delta}\,dp, \end{aligned}\right\}(A\cdot 18)$$

で代置させて、積分表示を考えよう。

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ipx-\gamma y}\frac{F}{\Delta}\,dp + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-ipx-\gamma y}\frac{F}{\Delta}\,dp.$$

と書けるが 以後 $x>0$ $(y>0)$ と考えよう。

そうして図のような積分路を考えると

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} e^{ipx-\gamma y}\frac{F}{\Delta}\,dp + \frac{1}{2\pi}\int_{L_2+L_3} e^{-ipx-\gamma y}\frac{F}{\Delta}\,dp$$

と変形すると

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} e^{ipx-\gamma y}\frac{F}{\Delta}\,dp + \frac{1}{2\pi}\int_{L_3}\frac{e^{-ipx-\gamma y}F}{\Delta}\,dp.$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{i}{2\pi}\int_0^\infty e^{-mx-\gamma(im)y}\frac{F(im)}{\Delta(im)}\,dm + \frac{-i}{2\pi}\int_0^\infty e^{-mx-\gamma(-im)y}\frac{F(-im)}{\Delta(-im)}\,dm, \\ &\Delta(im) = \left(\frac{k^2}{2}+m^2\right)^2 - m^2\sqrt{(m^2+k^2)(m^2+K^2)}, \\ &\qquad = \Delta(-im) \end{aligned}\right\}(A\cdot 19)$$

K_R の周りの留数は (A・16) により

$$I_2 = -i \frac{e^{-iK_R x - \gamma(K_R) y} \overline{H}(K_R)}{2K_R k^2 A(K_R)} , \quad \cdots\cdots \quad (A\cdot 20)$$

その他の積分は　$p = k\cos\theta$ とおいて

$$I_3 = \frac{+i}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ikx\cos\theta - \gamma(k\cos\theta)y}\,\overline{H}(k\cos\theta)\,k\sin\theta\,d\theta}{\Delta(k\cos\theta)} , \quad (A\cdot 21)$$

$$\Delta(k\cos\theta) = k^4\left[\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 - i\cos^2\theta\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta - \frac{1-\nu}{2}}\right]$$

$$= k^4\left[\left(\frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2 - i\sin\theta\cos^2\theta\sqrt{\cos^2\theta - \frac{1-\nu}{2}}\right] \quad \text{for } \cos^2\theta > \frac{1-\nu}{2},$$

$$= k^4\left[\left(\frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2 \pm \sin\theta\cos^2\theta\sqrt{\frac{1-\nu}{2} - \cos^2\theta}\right]$$

for $\cos^2\theta < \frac{1-\nu}{2}$, $(+)$ for $\theta > 0$, $(-)$ for $\theta < 0$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 , \quad \cdots\cdots \quad (A\cdot 22)$$

(A・17) に代入すると

$$L'' = L - \frac{i}{4}\left\{H_0^{(1)}(KR') + H_0^{(2)}(KR')\right\}$$

$$= \frac{i}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-mx} \cos\left\{\sqrt{k^2 - K^2}(y+y')\right\} \frac{\left(m^2 + \frac{k^2}{2}\right)^2 dm}{\Delta(im)\sqrt{m^2+K^2}}$$

$$+ \frac{\left(K_R^2 - \frac{k^2}{2}\right)^2 e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - K^2}(y+y')}}{2ik^2 K_R A(K_R)\sqrt{K_R^2 - K^2}}$$

$$+ \frac{k}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ikx\cos\theta - (y+y')\sqrt{k^2\cos^2\theta - K^2}} \left(\frac{k^2}{2} - k^2\cos^2\theta\right)^2 k\sin\theta\,d\theta}{\Delta(k\cos\theta)\sqrt{k^2\cos^2\theta - K^2}} , \quad (A\cdot 23)$$

$$\sqrt{k^2\cos^2\theta - K^2} = i\sqrt{K^2 - k^2\cos^2\theta} \quad \text{for } K > k\cos\theta,\ \theta>0,$$
$$\qquad\qquad -i\sqrt{K^2-k^2\cos^2\theta} \quad \text{for } K > \cos\theta,\ \theta<0, \Big\}$$

$$M'' = M - \frac{i}{4}\left\{H_0^{(1)}(kR) + H_0^{(1)}(kR')\right\}$$

$$= \frac{i}{\pi}\int_0^\infty e^{-mx}\cos\{\sqrt{m^2+k^2}(y+y')\}\frac{(m^2+\frac{k^2}{2})^2\,dm}{\Delta(im)\sqrt{m^2+k^2}}$$

$$+ \frac{(K_R^2-\frac{k^2}{2})^2\, e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2-k^2}(y+y')}}{2i\,K_R\,k^2 A(K_R)\sqrt{K_R^2-k^2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ik(x\cos\theta + \overline{y+y'}\sin\theta)}\frac{(\frac{k^2}{2}-k^2\cos^2\theta)^2\,d\theta}{\Delta(k\cos\theta)}, \qquad \text{(A.24)}$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-mx}\frac{dm}{\Delta(im)}\left[\bar{F}(im)e^{-g(im)y} + \bar{F}(-im)e^{-g(-im)y}\right],$$

$$J_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(K_R)} e^{-ipK-gy}\frac{\bar{H}(K)}{\Delta}dp = \frac{\bar{H}(K_R)\,e^{-iK_R x - g(K_R)y}}{2K_R\,k^2 A(K_R)},$$

$$J_3 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx\cos\theta - g(k\cos\theta)y}\frac{\bar{H}(k\cos\theta)\,k\sin\theta\,d\theta}{\Delta(k\cos\theta)},$$

(A.25)

$$N(P,Q) = -\frac{k^2}{2\pi i K^2}\int_0^\infty \frac{e^{-mx}\,dm}{\Delta(im)}\left[e^{-i\sqrt{m^2+k^2}\,y - i\sqrt{m^2+K^2}\,y'}\, im\left(\frac{k^2}{2}+m^2\right) - im\left(\frac{k^2}{2}+m^2\right) e^{i\sqrt{\ } + i\sqrt{\ }} \right]$$

$$N(P,Q) = \frac{ik^2}{\pi K^2}\int_0^\infty e^{-mx}\, m\left(\frac{k^2}{2}+m^2\right) \sin\left(\sqrt{m^2+k^2}\,y + \sqrt{m^2+K^2}\,y'\right)\frac{dm}{\Delta(im)}$$

$$- \frac{i\left(\frac{k^2}{2}-K_R^2\right)}{2K^2 A(K_R)}\, e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2-K^2}\,y' - \sqrt{K_R^2-k^2}\,y}$$

$$+ \frac{ik^2}{2\pi K^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx\cos\theta - \sqrt{k^2\cos^2\theta-K^2}\,y' - iky\sin\theta}\, k\cos\theta\left(\frac{k^2}{2}-k^2\cos^2\theta\right)\frac{k\sin\theta}{\Delta(k\cos\theta)}\,d\theta, \qquad (A.26)$$

$$O(P,Q) = -\frac{K^2}{\pi k^2}\int_0^\infty e^{-mx}\, m\left(\frac{k^2}{2}+m^2\right)\sin\left\{\sqrt{m^2+k^2}\,y' + \sqrt{m^2+K^2}\,y\right\}\frac{dm}{\Delta(im)}$$

$$+ \frac{K^2\left(\frac{k^2}{2}-K_R^2\right)}{2k^4 A(K_R)}\, e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2-K^2}\,y - \sqrt{K_R^2-k^2}\,y'}$$

$$- \frac{iK^2}{2\pi k^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx\cos\theta - iky'\sin\theta - \sqrt{k^2\cos^2\theta-K^2}\,y}\, k^4\cos\theta\left(\frac{1}{2}-\cos^2\theta\right)\frac{\sin\theta\,d\theta}{\Delta(k\cos\theta)}, \qquad (A.27)$$

iii) k が小さい時，あるいは x, y が小さい時は

これらの積分は p-平面で p の大きい所の値で決定される。　またハンケル関数の部分はよくわかっているから除いて考えよう。

(A·7), (A·10), (A·11) から

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Delta \xrightarrow[p > k \to 0]{} -\frac{k^2-K^2}{2}p^2 = -\frac{1+\nu}{4}k^2p^2, \\
&A + \frac{1}{\sqrt{p^2-K^2}} \longrightarrow -\frac{8}{1+\nu}\frac{p}{k^2}, \\
&B + \frac{1}{\sqrt{p^2-k^2}} \longrightarrow -\frac{8}{1+\nu}\frac{p}{k^2}, \\
&C \longrightarrow -\frac{16}{(1+\nu)}\frac{p}{(1-\nu)k^2}, \\
&D \longrightarrow +4\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{p}{k^2},
\end{aligned}
\right\} \quad (A·28)
$$

となるが

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-py+ipx}\,dp = \frac{y+ix}{x^2+y^2}, \\
&\int_0^\infty e^{-py+ipx}\,p\,dp = \frac{(y^2-x^2)+2ixy}{(x^2+y^2)^2},
\end{aligned}
\right\}
$$

であるから (A·7) より

$$\left.\begin{aligned}
L'' &\longrightarrow +\frac{4\{(x-x')^2-(y+y')^2\}}{\pi(1+\nu)k^2 R'^4}, \\
M'' &\longrightarrow \frac{4\{(x-x')^2-(y+y')^2\}}{\pi(1+\nu)k^2 R'^4}, \\
N &\longrightarrow -\frac{16(x-x')(y+y')}{\pi(1-\nu^2)(R')^4 k^2}, \\
O &\longrightarrow \frac{4(1-\nu)(x-x')(y+y')}{\pi(1+\nu)k^2(R')^4},
\end{aligned}\right\} \quad (A\cdot 29)$$

iii) 漸近展開

(A.23) ～ (A.27) の積分表示において，x, y が充分大きいとすると右辺第1項の積分はすべて $O\left(\frac{1}{R}\right)$ 以下の項であるから無視出来るので結局第3項の積分を評価(定常点法によって)すればよい。

その為には定常点の近くで次の積分がわかればよい

$$I = \int \overline{F}(\theta)\, e^{-ik(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, d\theta \ , \qquad (?) \tag{A.30}$$

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\frac{\pi}{2} > \varphi > 0$

の場合のみ考えよう。

まず I については $x\cos\theta + y\sin\theta = r\cos(\theta - \varphi)$ であるから

$\frac{\pi}{2} > \theta = \varphi > 0$ が定常点であるから

$$I = e^{-ikr}\, \overline{F}(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{+\frac{i}{2}kr\,t^2}\, dt = \sqrt{\frac{2\pi i}{kr}}\, \overline{F}(\varphi)\, e^{-ikr}, \tag{A.31}$$

(A.23)の場合は $k\cos\theta$ を $K\cos\theta'$ とおきかえれば上と同じになる。(pの実軸上 (k, K) の区間には定常点はない)

$$L'' \longrightarrow \frac{(K_R^2-\frac{k^2}{2})^2}{2ik^2 K_R A(K_R)\sqrt{K_R^2-K^2}} e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-K^2}y+iK_R x'-\sqrt{K_R^2-K^2}y'}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi i K r}}\frac{(\frac{k^2}{2}-K^2\cos^2\varphi)}{\Delta(K\cos\varphi)} e^{-iKr+iK(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)}$$

$$M'' \longrightarrow \frac{(K_R^2-\frac{k^2}{2})^2}{2iK_R k^2 A(K_R)\sqrt{K_R^2-k^2}} e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-k^2}y+iK_R x'-\sqrt{K_R^2-k^2}y'}$$

$$+\frac{k^4(\frac{1}{2}-\cos^2\theta)^2}{\sqrt{2\pi i k r}\;\Delta(k\cos\varphi)} e^{-ikr+ik(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)}$$

$$N \longrightarrow -\frac{(\frac{k^2}{2}-K_R^2)}{2K^2A(K_R)} e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-k^2}y+iK_R x'-\sqrt{K_R^2-K^2}y'}$$

$$+\frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi k r}}\cdot\frac{k^6}{K^2}\cdot\frac{(\frac{1}{2}-\cos^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(k\cos\varphi)} e^{-ikr+ikx'\cos\varphi-\sqrt{k^2\cos^2\varphi-K^2}y'}$$

$$O \longrightarrow \frac{K^2(\frac{k^2}{2}-K_R^2)}{2k^4A(K_R)} e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-K^2}y+iK_R x'-\sqrt{K_R^2-k^2}y'}$$

$$-\frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi K r}}\frac{K^4}{k^2}\frac{(\frac{k^2}{2}-K^2\cos^2\theta)}{\Delta(K\cos\varphi)} e^{-iKr+iKx'\cos\varphi-\sqrt{K^2\cos^2\varphi-k^2}y'}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Delta(K\cos\varphi) = (\tfrac{k^2}{2}-K^2\cos^2\varphi)^2 \pm K^2\cos^2\varphi\sin\varphi\sqrt{k^2-K^2\cos^2\varphi},$$

$$\begin{pmatrix} + & \text{for} & \varphi>0 \\ - & \text{for} & \varphi<0 \end{pmatrix}$$

N, L (A-32)

((注意)) N と O は y' 通りで 横波, 縦波 交替する

なお

$$\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) \longrightarrow \frac{i\sqrt{i}}{2\sqrt{2\pi k r}} e^{-ikr + ik(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi)},$$

$$\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR') \longrightarrow \frac{i\sqrt{i}}{2\sqrt{2\pi k r}} e^{-ikr + ik(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)},$$

附録 B　レーリー波の放射エネルギー

(3.6), (3.7) より x の正方向に進むレーリー波は

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{i}{2}A'G + \frac{C'}{2}\left(\frac{k}{K}\right)^4 \bar{H}\right)e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - K^2}\,y}, \\ w &= \left(\frac{i}{2}B'\bar{H} + \frac{D'}{2}\left(\frac{k}{K}\right)^4 G\right)e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - k^2}\,y}, \end{aligned} \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned} A' &= 2\frac{\left(\frac{k^2}{2} - K_R^2\right)^2}{\Delta'\sqrt{K_R^2 - K^2}}, \quad B' = \frac{2\left(\frac{k^2}{2} - K_R^2\right)^2}{\Delta'\sqrt{K_R^2 - k^2}}, \\ C' &= \frac{2k^2 K_R\left(K_R^2 - \frac{k^2}{2}\right)}{\Delta' K^2}, \quad D' = -\frac{2K_R\left(K_R^2 - \frac{k^2}{2}\right)K^2}{\Delta' k^2}, \\ \Delta' &= \lim_{p \to K_R}\left(\frac{\Delta(p)}{p - K_R}\right), \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$\begin{aligned} B'/A' &= \sqrt{K_R^2 - K^2}\Big/\sqrt{K_R^2 - k^2}, \quad \frac{B'}{C'} = +\frac{\left(K_R^2 - \frac{k^2}{2}\right)}{\sqrt{K_R^2 - k^2}\,K_R}\left(\frac{K}{k}\right)^2 \\ C'/A' &= -B'/D' = \left(\frac{k}{K}\right)^2\frac{K_R\sqrt{K_R^2 - K^2}}{K_R^2 - \frac{k^2}{2}}, \\ D'/C' &= -(K/k)^4, \quad D'/A' = -\left(\frac{K}{k}\right)^2\left(\frac{K_R\sqrt{K_R^2 - K^2}}{K_R^2 - \frac{k^2}{2}}\right) \end{aligned} \quad (B.3)$$

それ故今

$$\begin{aligned} v &= i\,a\,e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - K^2}\,y} \\ w &= b\,e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - k^2}\,y} \end{aligned} \quad (B.4)$$

とおくと

$$\begin{aligned} a &= \frac{A'}{2}\left(G - i\frac{D'}{A'}\bar{H}\right) \\ b &= -\frac{C'}{2}\left(G - i\frac{D'}{A'}\bar{H}\right) \\ a/b &= (A'/D')\left(\frac{K}{k}\right)^4 = -A'/C' \end{aligned} \quad (B.5)$$

$$u_1\Big|_{y=0} = -\frac{1}{K^2}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial \omega}{\partial y}\Big|_{y=0} = \left(-\frac{a}{K^2}K_R - \frac{\sqrt{K_R^2-k^2}}{k^2}b\right)e^{-iK_R x}$$

$$u_2\Big|_{y=0} = +i\left[\frac{\sqrt{K_R^2-K^2}}{K^2}a + \frac{K_R}{k^2}b\right]e^{-iK_R x}$$

$$u_1\Big|_0 = -a\frac{K_R}{K^2}\left(1 - \frac{K^2\sqrt{K_R^2-k^2}}{k^2 K_R}\frac{k^2}{K^2}\frac{K_R\sqrt{K_R^2-K^2}}{K_R^2-\frac{k^2}{2}}\right)e^{-iK_R x}$$

$$= -\frac{a k^2}{2K^2 K_R}e^{-iK_R x},$$

$$u_2\Big|_0 = \frac{i\sqrt{K_R^2-K^2}a}{K^2}\left(1 - \frac{K_R^2 K^2}{k^2\sqrt{K_R^2-K^2}}\frac{k^2}{K^2}\frac{\sqrt{K_R^2-k^2}}{K_R^2-\frac{k^2}{2}}\right)e^{-iK_R x} \qquad (B.6)$$

$$= -i\frac{\sqrt{K_R^2-K^2}\,k^2 a}{2K^2\left(K_R^2-\frac{k^2}{2}\right)}e^{-iK_R x},$$

$$u_2/(iu_1) = \frac{\sqrt{K_R^2-K^2}\,K_R}{\left(K_R^2-\frac{k^2}{2}\right)},$$

さて、ある断面を通じて x の正方向に伝わる単位時間の エネルギー

は

$$W_{\text{R}} = \frac{\rho\omega^3}{4ik^2}\int_0^\infty\left(u_1\overline{T_1} + u_2\overline{T_2} - \overline{u_1}T_1 - \overline{u_2}T_2\right)dy, \qquad (B.7)$$

$$u_1\overline{T_1} - \overline{u_1}T_1 + u_2\overline{T_2} - \overline{u_2}T_2 = 2\left(\overline{u_1}u_2 - u_1\overline{u_2}\right)_y + -$$
$$+ \frac{k^2}{K^2}\left(u_1\overline{\gamma} - \overline{u_1}\gamma\right) + \left(u_2\overline{\omega} - \omega\overline{u_2}\right)$$
$$= 2\left(\overline{u_1}u_2 - u_1\overline{u_2}\right)_y + \frac{k^2}{K^4}\left(\gamma\overline{\gamma}_x - \overline{\gamma}\gamma_x\right) + \frac{1}{k^2}\left(\omega\overline{\omega}_x - \overline{\omega}\omega_x\right)$$
$$+ \frac{1}{K^2}\left(\gamma\omega - \gamma\overline{\omega}\right)_y$$

であるから

$$\frac{W_{R}}{\left(\frac{\rho}{4}\omega^3 a\bar{a}\right)} = \frac{K_R}{K^4\sqrt{K_R^2-K^2}}\left(1+\frac{K_R^2-K^2}{K_R^2-k_R^2}\right) - \frac{\sqrt{K_R^2-K^2}\,(2K_R^2+k_R^2)}{K^4 K_R\left(K_R^2-\frac{k_R^2}{2}\right)}, \quad (B.8)$$

$$\frac{W_R}{\frac{\rho}{2}\omega^3 \frac{a\bar{a}}{k_R^4}} = \alpha - \beta,$$

$$\alpha = \frac{K_R}{2\sqrt{K_R^2-K^2}}\left(1+\frac{K_R^2-K^2}{K_R^2-k_R^2}\right)\left(\frac{k_R}{K}\right)^4$$

$$\beta = \frac{\sqrt{K_R^2-K^2}\left(K_R^2+\frac{k_R^2}{2}\right)}{\cancel{4}\,K_R\left(K_R^2-\frac{k_R^2}{2}\right)}\left(\frac{k_R}{K}\right)^4$$

$$Q_{RK} = \frac{W_{RK}}{\frac{\rho}{8}\omega^3\frac{|G|^2}{K^4}} = 2\times 4\left(\frac{K}{k_R}\right)^4(\alpha-\beta)\left(\frac{A'}{2}\right)^2$$

xの正負両方向の波があるから2倍

$$Q_{Rk} = \frac{W_{Rk}}{\frac{\rho}{8}\omega^3\frac{|F|^2}{k_R^4}} = 2\times 4\,(\alpha-\beta)\left(\frac{D'}{2}\right)^2$$

([illegible])

レーリー波と円筒発散波のエネルギーの比率を計算して見よう。

まず無指向性の縦波のみあるとすると(6.3)を2つに分けて(B.9)の定義を使い

$$\frac{W}{\frac{\rho}{8}\omega^3 \frac{|G|^2}{K^4}} = Q_K = Q_{KK} + Q_{kK} \qquad \text{(B.10)}$$

$$Q_{KK} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[|1 - iAK\sin\varphi|^2 + \left(\frac{k}{K}\right)^4 |Dk\sin\varphi|^2 \right] d\varphi, \qquad \text{(B.11)}$$

横波のみとすると同様にして

$$\frac{W}{\frac{\rho}{8}\omega^3 \frac{|H|^2}{k^4}} = Q_k = Q_{kk} + Q_{Kk} \qquad \text{(B.12)}$$

$$Q_{kk} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[|1 - iBk\sin\varphi|^2 + \left(\frac{K}{k}\right)^4 |CK\sin\varphi|^2 \right] d\varphi, \qquad \text{(B.13)}$$

無限に拡がっている場合は $Q_K = Q_k = 1$ となる。

	$\nu = \frac{1}{2}$ $\sigma = 1/3$	$\nu = 1/3$ $\sigma = 1/4$	
K_R	1.0724	1.0877	
K_R^2	1.1500	1.1830	
$\sqrt{K_R^2 - k^2}/k_R$	.3873	.4278	
$\sqrt{K_R^2 - K^2}/k_R$	.9487	.9218	
K^2/k_R^2	1/4	1/3	
Δ'/k_R^3	−1.5243	−1.2504	
$A'/2$	−.2922	−.4047	
$B'/2$	−.7157	−.8721	
$C'/2$	−1.8292	−1.7823	
$D'/2$	.1143	.1980	
C'/D'	16	9	
$-b/a = C'/A' = -B'/D'$	6.261	4.404	
B'/A'	2.4495	2.1547	
u_2/iu_1	1.5654	1.4678	
α	63.302	29.963	
β	35.927	18.794	
$\alpha - \beta$	27.375	11.169	
$(\alpha-\beta)(\frac{A'}{2})^2$	2.3373	1.8293	
$(\alpha-\beta)(\frac{D'}{2})^2$	.3576	.4379	
$\times 4 \times 2$	2.8608 (53%)	3.5032 (57%)	Q_{RR}
$\times 4 \times \frac{9}{16}$	1.1687 (56%)	1.6260 (68%)	Q_{RK}
	1.0336	1.0215	Q_{Rk}
	.9097	.7650	Q_{KK}
	3.8944	4.5247	$Q_{Rk} + Q_{RR}$
	2.0784	2.3910	$Q_{Kk} + Q_{RK}$

(K/k)**2   0,2500

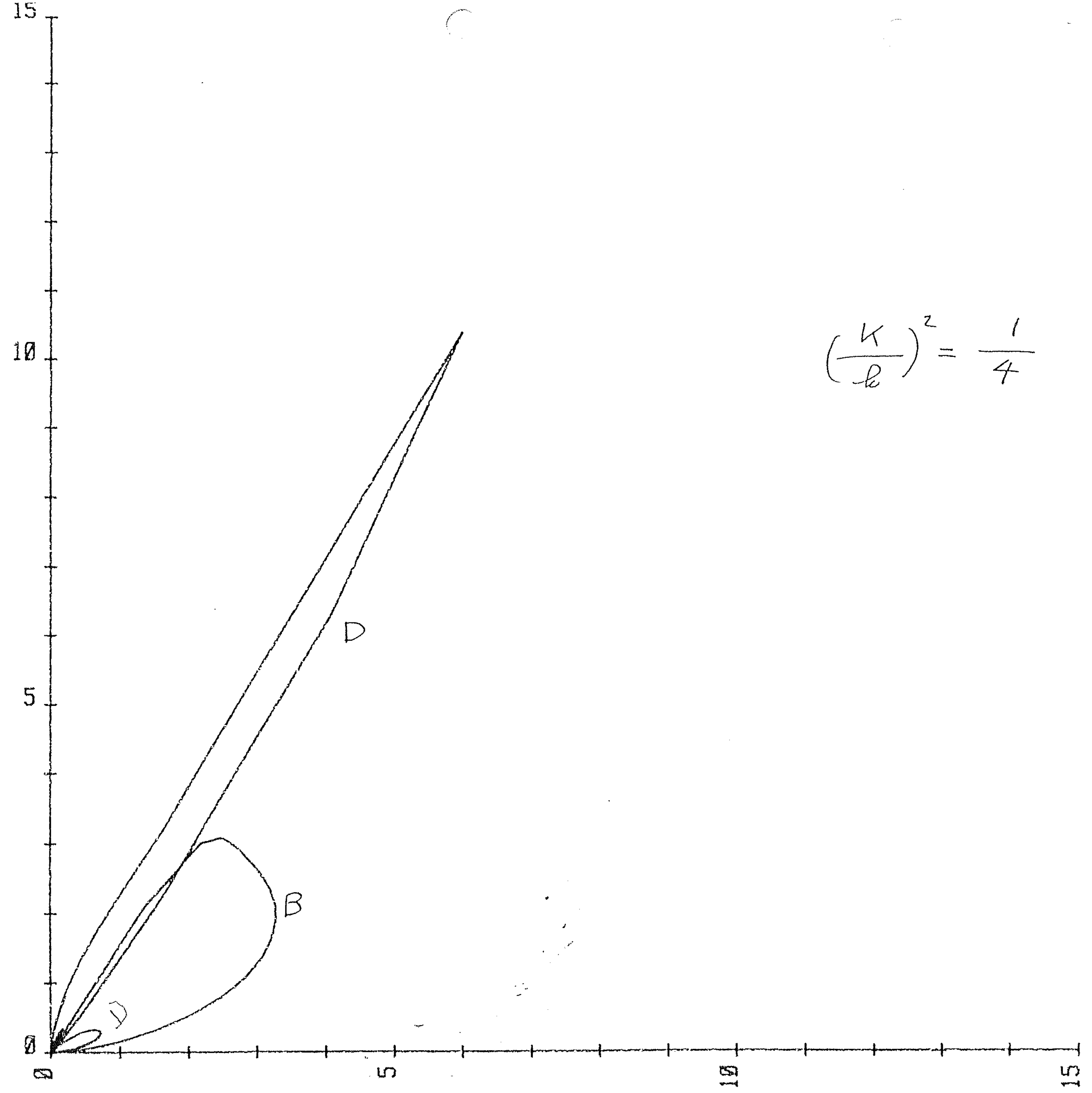
N	Theta	$[1-iAKsinX]^2$	$[1-iBksinX]^2$	$[CksinX]^2$	$[DKsinX]^2$
1	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	3,00	0,02724	0,12888	0,00915	0,04276
3	6,00	0,08919	0,48529	0,03061	0,15880
4	9,00	0,16295	0,99348	0,05796	0,31741
5	12,00	0,23381	1,56465	0,08739	0,48276
6	15,00	0,29345	2,12462	0,11675	0,62513
7	18,00	0,33795	2,62535	0,14485	0,72563
8	21,00	0,36622	3,04332	0,17103	0,77560
9	24,00	0,37894	3,37264	0,19483	0,77382
10	27,00	0,37774	3,61798	0,21589	0,72372
11	30,00	0,36482	3,78947	0,23386	0,63158
12	33,00	0,34255	3,89974	0,24837	0,50579
13	36,00	0,31337	3,96228	0,25908	0,35728
14	39,00	0,27958	3,99088	0,26566	0,20175
15	42,00	0,24331	3,99928	0,26783	0,06544
16	45,00	0,20645	4,00000	0,26544	0,00000
17	48,00	0,17060	3,99864	0,25845	0,12337
18	51,00	0,13702	3,96652	0,24697	0,74110
19	54,00	0,10669	3,71611	0,23131	2,68901
20	57,00	0,08024	2,51146	0,21193	7,50921
21	60,00	0,05800	0,00000	0,18947	12,00000
22	63,00	0,04003	0,37988	0,16473	3,62690
23	66,00	0,02613	0,31796	0,13854	2,54395
24	69,00	0,01593	0,21607	0,11220	1,91067
25	72,00	0,00889	0,12830	0,08648	1,42288
26	75,00	0,00441	0,06619	0,06254	1,01236
27	78,00	0,00185	0,02848	0,04137	0,66475
28	81,00	0,00060	0,00934	0,02387	0,38248
29	84,00	0,00012	0,00189	0,01081	0,17295
30	87,00	0,00001	0,00012	0,00273	0,04371
31	90,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

QK 0,76498
Qk 1,02148

(K/k)**2 0,3333

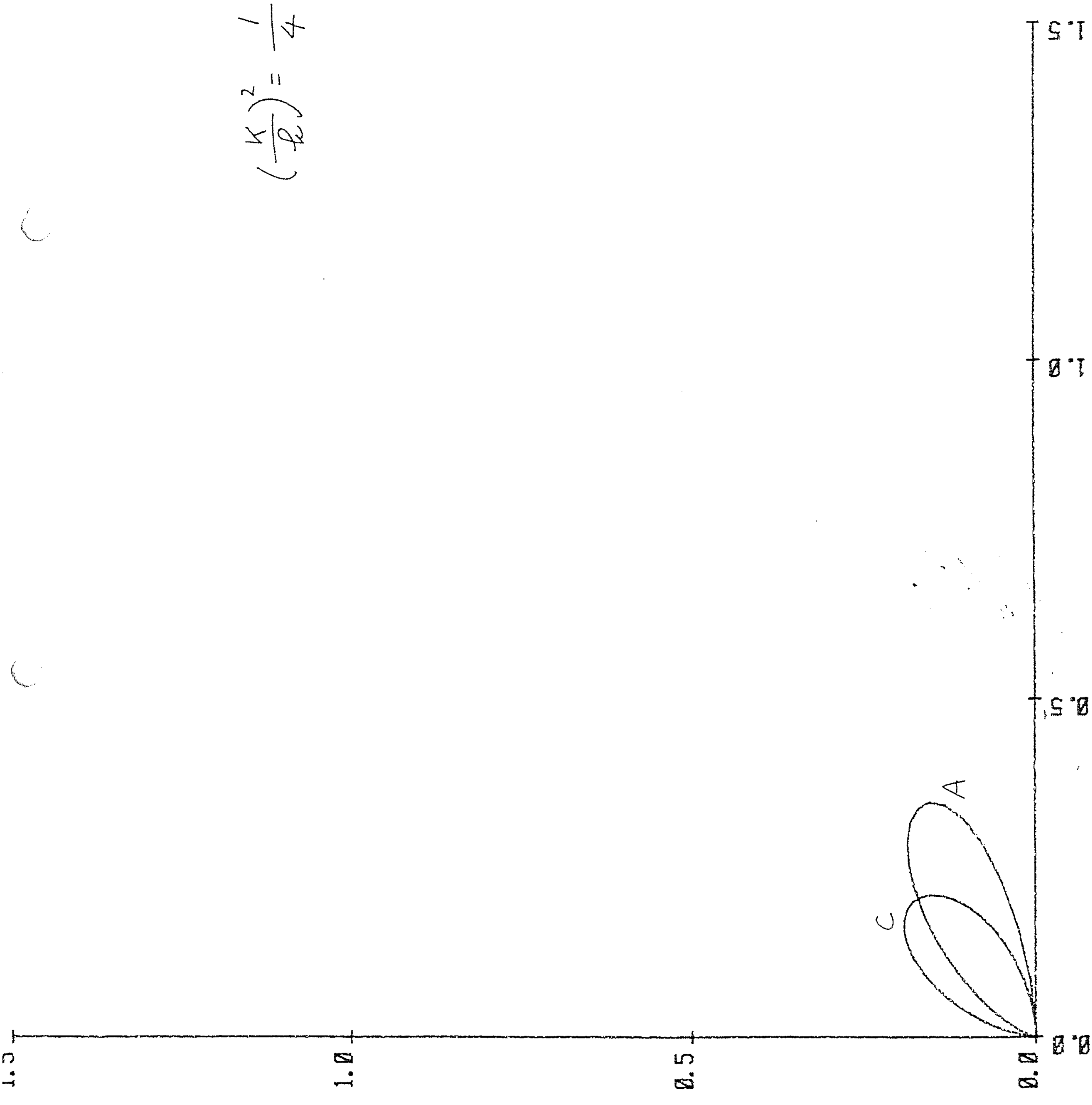
N	Theta	[1-iAKsinX]	[1-iBksinX]	[CksinX]	[DKsinX]
1	0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	3,00	0,20457	0,11492	0,02589	0,04292
3	6,00	0,51737	0,43655	0,06790	0,16100
4	9,00	0,77844	0,90519	0,10842	0,32673
5	12,00	0,96324	1,44690	0,14540	0,50610
6	15,00	1,07836	1,99467	0,17976	0,66844
7	18,00	1,13605	2,50000	0,21255	0,79180
8	21,00	1,14797	2,93465	0,24439	0,86370
9	24,00	1,12398	3,28694	0,27540	0,87954
10	27,00	1,07234	3,55652	0,30527	0,84015
11	30,00	1,00000	3,75000	0,33333	0,75000
12	33,00	0,91298	3,87785	0,35868	0,61621
13	36,00	0,81654	3,95261	0,38023	0,44888
14	39,00	0,71534	3,98809	0,39689	0,26369
15	42,00	0,61342	3,99900	0,40759	0,09035
16	45,00	0,51429	4,00000	0,41143	0,00000
17	48,00	0,42083	3,99764	0,40777	0,21318
18	51,00	0,33532	3,92288	0,39627	1,70693
19	54,00	0,25939	2,50000	0,37699	14,20820
20	57,00	0,19404	1,14658	0,35041	4,35579
21	60,00	0,13965	1,00000	0,31738	3,00000
22	63,00	0,09603	0,74406	0,27918	2,45084
23	66,00	0,06250	0,50748	0,23740	2,04505
24	69,00	0,03801	0,31849	0,19387	1,67098
25	72,00	0,02117	0,18151	0,15058	1,30770
26	75,00	0,01049	0,09141	0,10959	0,96067
27	78,00	0,00439	0,03874	0,07288	0,64453
28	81,00	0,00141	0,01258	0,04223	0,37626
29	84,00	0,00028	0,00253	0,01917	0,17175
30	87,00	0,00002	0,00016	0,00485	0,04363
31	90,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

QK 0,90972
Qk 1,03366

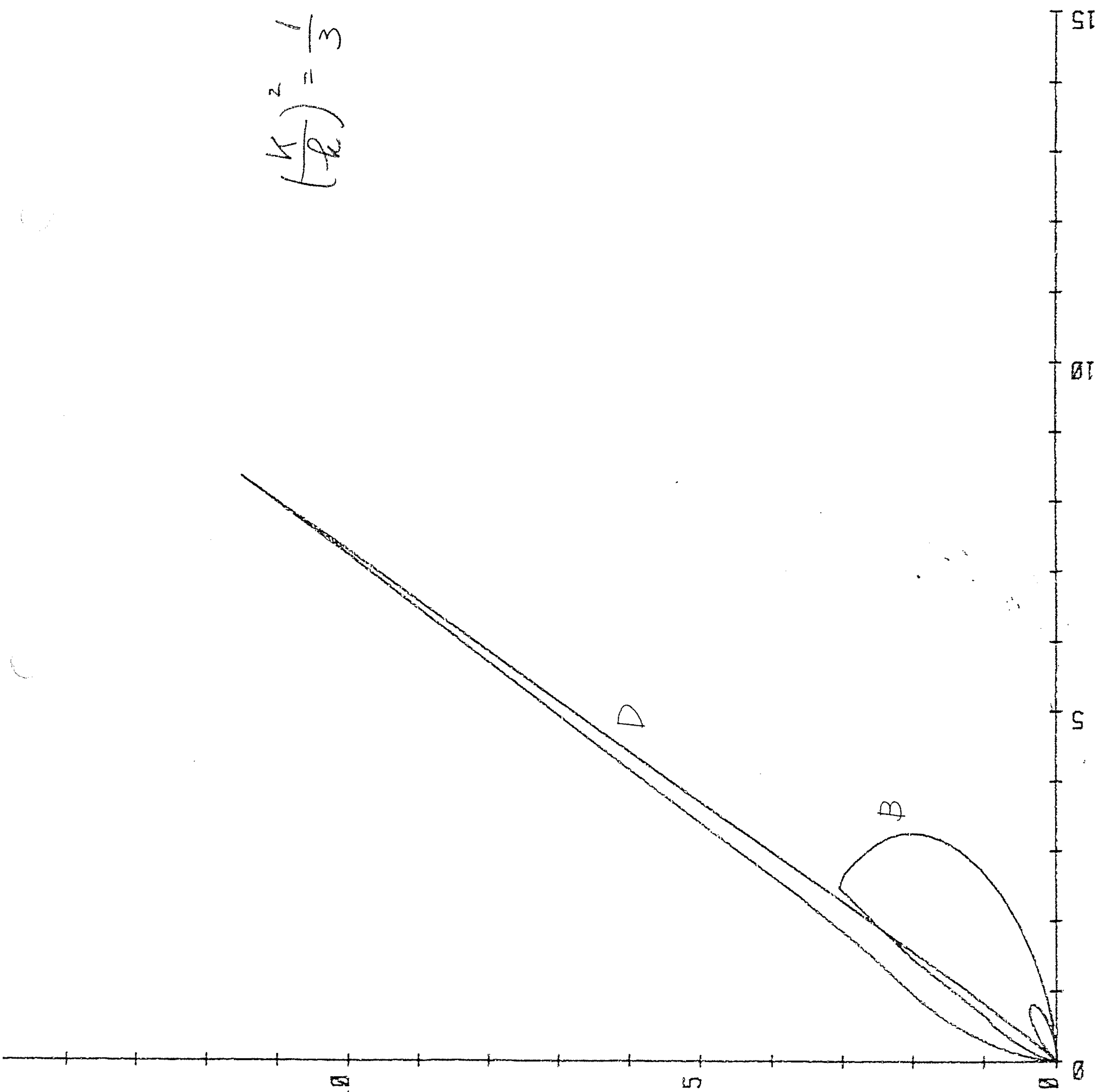


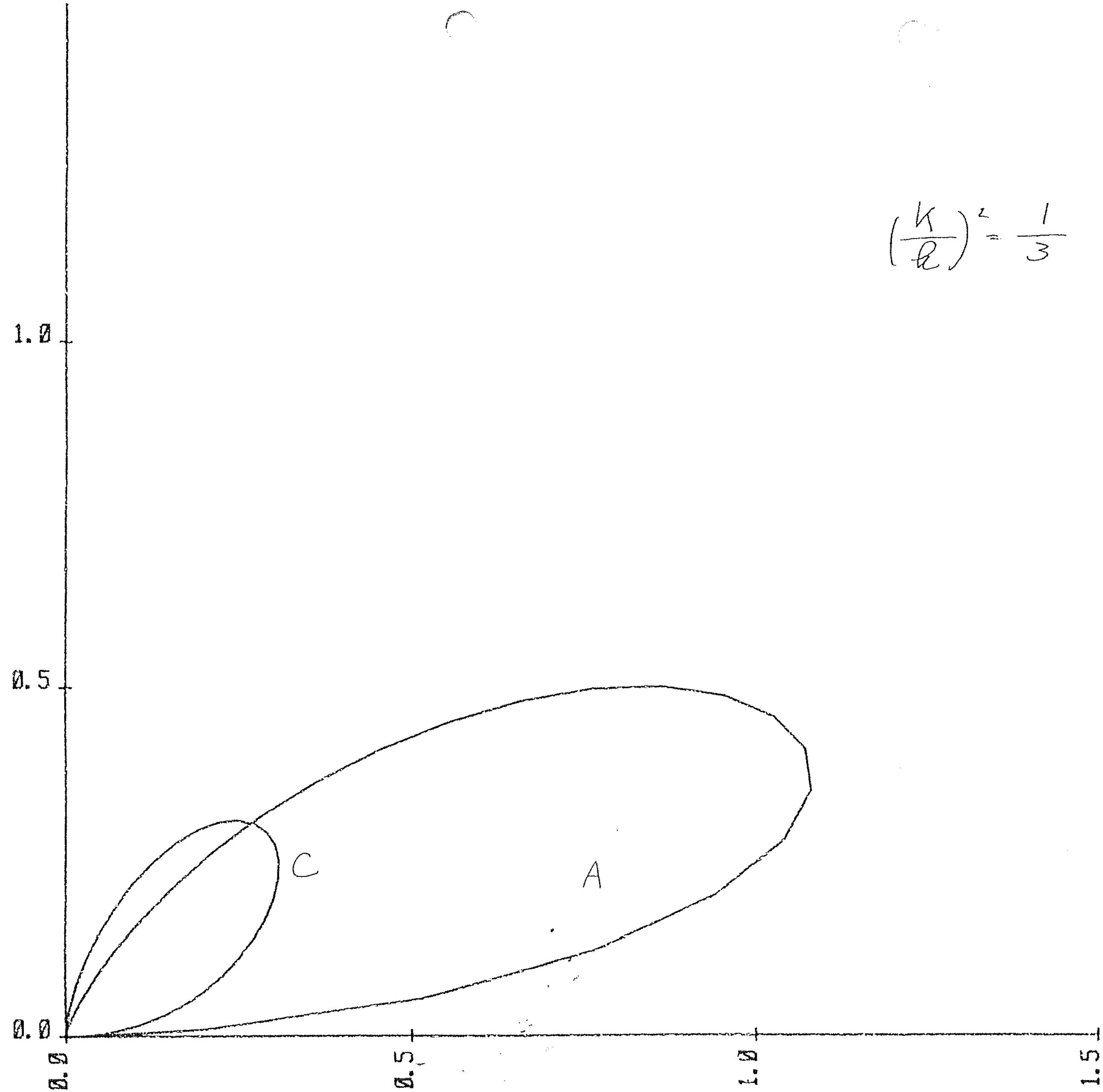
B-8

B-9



B-10





$\left(\frac{K}{k}\right)^2 = \frac{1}{3}$
1.0
0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
C
A

附録 C　コッチン関数

(4.1) に (1.2), (1.5), (1.8), (1.10) を代入して

部分積分すると

まず

$$G(p) = \int_C \Big[-k^2 \left(u_1 \frac{\partial x}{\partial n} + u_2 \frac{\partial y}{\partial n}\right) E$$

$$- \frac{k^2}{\kappa^2} \omega \left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial E}{\partial y}\right)$$

$$- \gamma \left(\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial E}{\partial y}\right) \Big] ds,$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\partial y}{\partial n}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial n}$$

$$\gamma \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{k^2}{\kappa^2} \omega \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{k^2}{\kappa^2}\left(\tau_1 + 2\frac{\partial u_2}{\partial s}\right).$$

$$\gamma \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{k^2}{\kappa^2} \omega \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{k^2}{\kappa^2}\left(\tau_2 - 2\frac{\partial u_1}{\partial s}\right).$$

$$\therefore\ G(p) = \frac{k^2}{\kappa^2}\int_C \Big[-\kappa^2\left(u_1\frac{\partial x}{\partial n} + u_2\frac{\partial y}{\partial n}\right)E - \left(\tau_1 + 2\frac{\partial u_2}{\partial s}\right)E_x - \left(\tau_2 - 2\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)E_y \Big] ds$$

$$= \frac{k^2}{\kappa^2}\int_C \Big[-\tau_1 E_x - \tau_2 E_y + u_1\left(2E_{xs} - \kappa^2\frac{\partial x}{\partial n}E\right) + u_2\left(-2E_{ys} - \kappa^2\frac{\partial y}{\partial n}E\right)\Big] ds, \quad \text{(C-1)}$$

$$E = e^{ipx - \sqrt{p^2 - \kappa^2}\, y},$$

$$F(p) = \int_C \Big[-\kappa^2\left(u_1\frac{\partial x}{\partial s} + u_2\frac{\partial y}{\partial s}\right)E' + \frac{\kappa^2}{k^2}\gamma\left(\frac{\partial x}{\partial s}E_x' + \frac{\partial y}{\partial s}E_y'\right) - \omega\left(\frac{\partial x}{\partial n}E_x' + \frac{\partial y}{\partial n}E_y'\right)\Big] ds$$

$$= \int_C \Big[-\kappa^2\left(u_1\frac{\partial x}{\partial s} + u_2\frac{\partial y}{\partial s}\right)E' + \left(\tau_1 + 2\frac{\partial u_2}{\partial s}\right)E_y' - \left(\tau_2 - 2\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)E_x'\Big] ds$$

$$= \int_C \Big[\tau_1 E_y' - \tau_2 E_x' + u_1\left(+\kappa^2\frac{\partial y}{\partial n}E' - 2E_{xs}'\right) + u_2\left(-\kappa^2\frac{\partial x}{\partial n}E' - 2E_{ys}'\right)\Big] ds, \quad \text{(C-2)}$$

G^*, $\overline{F}^*$ についても同様である。

C が自由表面の一部である時は (3.13) に対応して

u_1, u_2 の項はなくなり

$$G(p) = +\frac{k^2}{k_2^2}\int_{-1}^{1}\left(T_1\overline{E}_x + T_2\overline{E}_y\right)dx, \qquad (C.3)$$

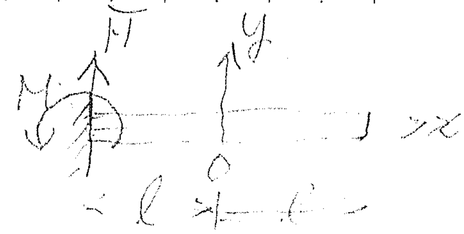
$$\overline{F}(p) = \int_{-1}^{1}\left(T_2\overline{E}'_x - T_1\overline{E}'_y\right)dx, \qquad (C.4)$$

$$\overline{E} = e^{ipx-\sqrt{p^2-k^2}\,y}, \quad \overline{E}' = e^{ipx-\sqrt{p^2-k_2^2}\,y},$$

等となる。

附録D 一様梁のインピーダンス

右図のように一端自由で他端が（円周波数ωで）上下方向に振巾ηで、傾斜角がθで振動している時、その剪断力はF、モーメントがMであるとしよう。



振動方程式はよく知られているように、yを撓みとすると

$$EI\frac{d^4y(x)}{dx^4} - \frac{w}{g}\omega^2 y(x) = 0, \quad \cdots \quad (D.1)$$

但し I は断面2次モーメント、E はヤング率、w は単位長さの重量である。

この解は

$$y(x) = C_1 \operatorname{sh} a\xi + C_2 \operatorname{ch} a\xi + C_3 \sin a\xi + C_4 \cos a\xi \quad (D.2)$$

但し

$$a = \sqrt[4]{\frac{w\omega^2 l^4}{EIg}}, \qquad \xi = x/l \quad \cdots \quad (D.3)$$

先ず

$$\eta = y(-l) = -C_1 \operatorname{sh} a + C_2 \operatorname{ch} a - C_3 \sin a + C_4 \cos a,$$

$$\theta = \frac{dy(-l)}{dx} = \frac{1}{l}\left.\frac{dy}{d\xi}\right|_{-1} = \frac{a}{l}\left[C_1 \operatorname{ch} a - C_2 \operatorname{sh} a + C_3 \cos a - C_4 \sin a\right] \quad (D.4)$$

他端では自由であるから

$$\left.\begin{aligned} C_1 \operatorname{sh} a + C_2 \operatorname{ch} a - C_3 \sin a - C_4 \cos a = 0 \\ C_1 \operatorname{ch} a + C_2 \operatorname{sh} a - C_3 \cos a + C_4 \sin a = 0 \end{aligned}\right\} \quad (D.5)$$

この4つの式を辺々加減して

$$\left.\begin{aligned} -2C_1 \,\mathrm{sh}\, a + 2C_4 \cos a &= \eta \\ 2C_1 \,\mathrm{ch}\, a + 2C_4 \sin a &= l\theta/a \\ 2C_2 \,\mathrm{ch}\, a - 2C_3 \sin a &= \eta \\ -2C_2 \,\mathrm{sh}\, a + 2C_3 \cos a &= l\theta/a \end{aligned}\right\} \cdots (D.6)$$

これから直ちに

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2\Delta_1}\left(-\eta \sin a + \frac{l\theta}{a}\cos a\right) \\ C_2 &= \frac{1}{2\Delta_2}\left(\eta \cos a + \frac{l\theta}{a}\sin a\right) \\ C_3 &= \frac{1}{2\Delta_2}\left(\eta \,\mathrm{sh}\, a + \frac{l\theta}{a}\mathrm{ch}\, a\right) \\ C_4 &= \frac{1}{2\Delta_1}\left(\eta \,\mathrm{ch}\, a + \frac{l\theta}{a}\mathrm{sh}\, a\right) \end{aligned}\right\} (D.7)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \mathrm{ch}\, a \cos a + \mathrm{sh}\, a \sin a \\ \Delta_2 &= \mathrm{ch}\, a \cos a - \mathrm{sh}\, a \sin a \end{aligned}\right\} \cdots (D.8)$$

これから

$$M = EI \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-l} = \frac{EI}{l^2}\left.\frac{d^2y}{d\xi^2}\right|_{\xi=-1}$$

$$= \frac{EI a^2}{l^2}\left[-C_1 \,\mathrm{sh}\, a + C_2 \,\mathrm{ch}\, a + C_3 \sin a - C_4 \cos a\right]$$

$$H = EI \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=-l} = \frac{EI}{l^3}a^3\left[C_1 \,\mathrm{ch}\, a - C_2 \,\mathrm{sh}\, a - C_3 \cos a - C_4 \sin a\right]$$

(D.9)

(D.7)を代入して整理すると

$$M = \frac{EIa^2}{2l^2\Delta_1\Delta_2}\left[\eta\, sh2a\, sin2a + \frac{l\theta}{a}(ch2a\, sin2a - sh2a\, cos2a)\right],$$

$$F = -\frac{EIa^3}{2l^3\Delta_1\Delta_2}\left[\eta(sh2a\, cos2a + ch2a\, sin2a) + \frac{l\theta}{a} sh2a\, sin2a\right]$$

(D.10)

それ故今

$$\left.\begin{aligned} F &= i\omega\eta Z_{11}^{(i)} + i\omega\theta Z_{13}^{(i)} \\ M &= -i\omega\eta Z_{31}^{(i)} - i\omega\theta Z_{33}^{(i)} \end{aligned}\right\} \cdots (D.11)$$

のようにインピーダンスを定義すると

$$\left.\begin{aligned} Z_{11}^{(i)} &= \frac{i}{\omega}\frac{EIa^3}{2l^3}\left(\frac{sh2a\, cos2a + ch2a\, sin2a}{\Delta_1\Delta_2}\right), \\ Z_{13}^{(i)} &= \frac{i}{\omega}\frac{EIa^2}{2l^2\Delta_1\Delta_2} sh2a\, sin2a, \end{aligned}\right\} (D.12)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{31}^{(i)} &= +\frac{iEIa^2}{\omega\cdot 2l^2\Delta_1\Delta_2} sh2a\, sin2a = Z_{13}^{(i)} \\ Z_{33}^{(i)} &= +\frac{iEIa}{2\omega l\Delta_1\Delta_2}(ch2a\, sin2a - sh2a\, cos2a), \end{aligned}\right\} (D.13)$$

$\alpha \to 0$ とすると

$$\left.\begin{aligned}
Z_{11}^{(1)} &\fallingdotseq \frac{2i}{\omega}\frac{EI\alpha^4}{l^3} = \frac{2i}{\omega}\frac{lw}{g}\omega^2 = \frac{i\omega}{g}(2wl), \\
Z_{33}^{(1)} &\fallingdotseq +\frac{iEI\alpha}{\omega l}\times\frac{4}{5}\alpha^3 = +i\omega\frac{4}{5}\frac{wl^3}{g} \\
Z_{13}^{(1)} &= +Z_{31}^{(1)} \fallingdotseq \frac{2i}{\omega}\frac{EI\alpha^4}{l^2} = \frac{2i\omega}{g}(wl^2),
\end{aligned}\right\} \quad (D.14)$$

となって慣性力に一致する。