境界値問題におけるガウスの積分について

別所正利　防衛大学校

内容

序言
1. Flaxの変分原理
2. ガウスの積分とその変形
3. 非対称核の場合
結言

以上

耐航性小委

昭和42年10月24日

序言

翼や波の理論で我々は常に境界値問題に直面している。数学的に考えると完全流体(非圧縮)を取扱う限り，これらはすべてラプラスの方程式に関する第2種の境界値問題に帰着するけれども普通のポテンシャル論の教科書に出ている例題は定常熱伝導の問題であつて我々の取扱うものと一点だけ大いに異なる。即ち全系のエネルギーがその場合は有限であるけれども我々のは無限大である。この為に解の唯一性等の証明は教科書通りにはゆかない。

一方境界値問題を積分方程式の形に書くのは容易なのであるが，その核函数は複雑なので種々考案をして近似解を求めるのであるが，この際どのような誤差の評価法が最も合理的なのであるかと言う点に関しては上述の事と関係して一つの疑問点である。

幸い翼理論においては Flax の変分原理なるものがあり，特に後者の疑点に対し，一条の光明をもたらすものと思われるので，これを紹介し，一方又同じような変分原理としてガウスの積分なるものを紹介して，この種の問題への手掛りとし同時に疑点を明らかにしたい。

1. Flaxの変分原理

A. H. Flax は揚力面の理論の境界値問題を Rayleigh-Ritz の方法に従って解く事を提唱し，次のような積分を考えた。

$$I = \iint_S \left(p\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \nu} + \tilde{p}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - p\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} \right) ds \,, \quad \cdots\cdots \quad (1.1)$$

ここに S は翼面，p は揚力分布，ν は翼下面において上向き法線，φ はあるポテンシャル，f は近似解，～印は主流を逆にした時の諸量とする。又

$$\left.\begin{aligned} f(P) &= \iint_S p(Q) K(P,Q)\, ds \,, \quad \tilde{f}(P) = \iint_S \tilde{p}(Q) \tilde{K}(P,Q)\, ds \\ \varphi(P) &= \iint_S p_0(Q) K(P,Q)\, ds \,, \quad \tilde{\varphi} = \iint \tilde{p}_0 \tilde{K}\, ds \,, \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

$$K(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{x-\xi}d\xi'\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r(P,Q')}\right),\quad \tilde{K}(P,Q)=\frac{-1}{2\pi}\int_{+\infty}^{x-\xi}d\xi'\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r(P,Q')}\right),\qquad (1.3)$$

$$P\equiv(x,y,z),\quad Q\equiv(\xi,\eta,\zeta),\quad Q'\equiv(\xi',\eta,\zeta)$$

又

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\nu}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial\nu}+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\nu}=0,\quad \text{on } S,\quad --\quad (1.4)$$

(1.3)の核を考慮すると、

$$\iint_S p\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\nu}dS=\iint_S \tilde{p}\frac{\partial f}{\partial\nu}dS,\quad ---\quad (1.5)$$

なる相反定理が成立つから、(1.1)の変分をとり、それを0とおくと

$$\delta I=\iint_S\left\{\delta p\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\nu}-\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\nu}\right)+\delta\tilde{p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}-\frac{\partial f}{\partial\nu}\right)\right\}dS=0,\quad ---\quad (1.6)$$

となり、δp, $\delta\tilde{p}$ を任意函数とすると、(1.6)はその境界条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=\frac{\partial f}{\partial\nu},\quad \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\nu}=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\nu},\quad --\quad (1.7)$$

と等価である。

このIの極値を

$$\text{ext.}\{I\}=D,\quad ----\quad (1.8)$$

とおくと、平板翼ではこれは誘導抗力に等しい。

さてこの原理に従えば、Rayleigh-Ritz式に適当な揚力分布を仮定して、(1.1)の積分の変分が0になるように近似解を決めればよい。~~この主 誘導抗力~~ 今新らしく、

$$D=\iint_S p_0\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\nu}dS,\quad -----\quad (1.9)$$

なる量を定義して、(1.1)との差をとり、相反定理を使えば

$$D-I\equiv\varepsilon=\iint_S(p_0-p)\frac{\partial}{\partial\nu}(\tilde{\varphi}-\tilde{f})\,dS,\quad ---\quad (1.10)$$

Dは~~xx~~定数と考えて差支えないからIの極値問題を考える事とεのこれを考える事は全く同じである。そしてεはやはり誘導抗力の形であるから、

$$\varepsilon\geq 0,\quad ---\quad (1.10)$$

となるとすると、Iは最大値としてDをとる事になる。つまり、(1.8)の極値とは最大値であって、この方法では誤差に基づく誘導抗力が最小になるように解を決めている訳である。

実際に計算を実行するにあたっては許容函数の選び方に注意が必要であるが、(1.7)の積分方程式そのまゝを取扱う方法に比して、近似の意味が明らかになる点において優れていると思われる。
さて波の場合にも花岡によって示されたように線型理論の立場に立つ限りは(1.5)の相反定理が成立つので上の方法を適用出来る事は明らかであり、この場合 D は大体造波抵抗であると考えられる。従ってこの方法では誤差の造波抵抗が極小になるような近似値を探す事になるのであるが、一方造波抵抗が等しくとも船型は異なり得る(線型理論でも同じであるが)と言う点に疑念が残る。又 Ursell & Ward によれば相反定理(1.5)は線型性の仮定の下に運動量~~積分~~から導かれると言われるがともかく(1.1)の形では船の場合適用が難かしい。~~この~~ この点花岡のようにグリーンの定理を使って相反定理を導く方が望ましい。

2. ガウスの積分とその変形

さて問題を簡単にする為にまず偏在しでかつ流体が無限に広がっている場合を考えて見よう。
ガウスはディリクレ問題を解く為に次のような積分を考えてその最小値として解が与えられるとした。

$$G = \iint_S (f - 2\varphi)\,\sigma\,ds\,, \quad \cdots\cdots \quad (2.1)$$

ここに

$$f(P) = \iint_S \sigma(Q)\,S(P,Q)\,ds_Q\,, \quad \varphi(P) = \iint_S \sigma_0(Q)\,S(P,Q)\,ds_Q\,, \quad (2.2)$$

$$S(P,Q) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{r(P,Q)}\,, \quad \cdots\cdots \quad (2.3)$$

又 φ は S 上で与えられた境界値とする。
相反定理は、σ_1, σ_2 に対応するポテンシャルを f_1, f_2 とすると

$$\iint_S \sigma_1 f_2\,ds = \iint_S \sigma_2 f_1\,ds\,, \quad \cdots\cdots \quad (2.4)$$

となる事は $S(P,Q)$ の対称性から明らかである。
今積分

$$E = \iint_S f\,\sigma\,ds\,, \quad \cdots\cdots \quad (2.5)$$

が有限確定であるとし

$$E_0 = \iint_S \varphi\,\sigma_0\,ds$$

とおいて $G-E_0$ を計算すると

$$G-E_0=\iint_S (f-\varphi)(\sigma_0-\sigma)\,ds \geq 0 \quad , \cdots (2\cdot6)$$

となるから $\sigma=\sigma_0$ となった時 $G=E_0$ となり、かつエネルギー積分(2·4)は常に正であるから、この方法では結局誤差のエネルギー積分が最も小さいような近似値をもとめる事を意味している。

ノイマン問題に対してはこの積分では都合が悪いので次のように変形して考えればよい。

さて、2重吹出しポテンシャルによる解を φ、任意の函数を f とする。つまり

$$f(P)=\iint_S \mu(Q)\frac{\partial}{\partial\nu_Q}S(P,Q)\,ds_Q, \quad \varphi(P)=\iint_S \mu_0\frac{\partial}{\partial\nu}S\,ds, \cdots (2\cdot7)$$

ただし ν は物体の領域 D に対して外向き法線とする。

相反定理は核函数の対称性

$$S(P,Q)=S(Q,P) \quad , --- (2\cdot8)$$

から前回同様

$$\iint_S \mu_1\frac{\partial f_2}{\partial\nu}\,ds=\iint_S \mu_2\frac{\partial f_1}{\partial\nu}\,ds, \cdots (2\cdot9)$$

となる。そこで

$$H=\iint_S \mu\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}-\frac{\partial f}{\partial\nu}\right)ds, \cdots (2\cdot10)$$

なる積分を与えられた境界値 $\partial\varphi/\partial\nu$ について考えればよい。

ここでグリーン函数 $S(P,Q)$ の可逆性(2·8)があれば(2·9)は常に成立つから、~~重~~ニュートンポテンシャルでなくとも H なる積分が確定すればこの方法は使える。e(2·1)の場合も勿論同様である。従って例えば前進運動のない船の動揺の問題ではこれらの方法が適用出来る。

そしてエネルギー積分は正ではない。即ち

$$f_+-f_-=4\pi\mu, \quad \frac{\partial f}{\partial\nu}\Big|_+=\frac{\partial f}{\partial\nu}\Big|_-, \text{ on } S \cdots (2\cdot11)$$

ここに添符号は S の D 側を +、反対側を − と示すものとする。

であるから、物体の占める領域を D とすると、

$$E = \iint_S \mu \frac{\partial f}{\partial \nu} ds = \iint_S f_+ \frac{\partial f}{\partial \nu} ds - \iint_S f_- \frac{\partial f}{\partial \nu} ds$$

$$= \iint_{D_+} (\nabla f_+)^2 d\tau + \iint_{D_-} (\nabla f_-)^2 d\tau \geq 0 , \quad \cdots (2.12)$$

従って m を任意函数, ε を小さい数とし,

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \mu_0 + \varepsilon m \\ v &= \iint_S m \frac{\partial}{\partial \nu} S \, ds \end{aligned}\right\} \quad \cdots (2.13)$$

とおくと (2.10) は

$$H = \iint_S (\mu_0 + \varepsilon m)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds$$

$$= \iint_S \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds - \varepsilon^2 \iint_S m \frac{\partial v}{\partial \nu} ds , \quad \cdots (2.14)$$

即ち

$$H \leq E_0 = \iint_S \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds , \quad \cdots (2.15)$$

となり, この場合は H の最大値がエネルギー積分 E_0 に一致する事になる。

一方でこのエネルギーは附加質量の運動エネルギーとして表わされるから, この原理は近似解による附加質量を最大もしくは最小にするように境界値問題を解く事になる。

この方法ではしかし核函数の特異性が強く積分の計算がむつかしい場合は多いと思われるが, そのような時は次の積分と実質的に同じ事になる。

$$G' = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \nu} (f - 2\varphi) ds , \quad \cdots (2.16)$$

$$H' = \iint_S f \left(2\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \frac{\partial f}{\partial \nu}\right) ds , \quad \cdots (2.17)$$

もちろん相反定理はなりたつものと考えている。

例えば今 D 内で正則な任意の互に独立で且つ完全な函数列 $[f_n]$ があるとし,

$$f = \sum_n a_n f_n , \quad \cdots (2.18)$$

の形に解が得られると仮定し, $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ が S 上で与えられているとして計算を進めて見よう。

今 $\iint_S f_n \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} dS = b_n$, $\iint_S f_n \frac{\partial f_m}{\partial\nu} dS = C_{n,m} = C_{m,n}$, ‥ (2.19)

なる積分が求まると (2.17)は

$$H' = 2\sum_n a_n b_n - \sum_n\sum_m a_n a_m C_{n,m} , \quad \cdots \quad (2.20)$$

となるから $\frac{\partial}{\partial a_n} H' = 0$ for $n = \cdots\cdots$

とすると 上式から

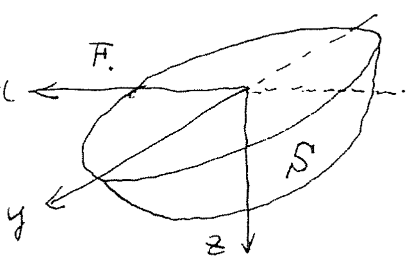
$$\left. \begin{aligned} & b_n - \sum_m a_m C_{n,m} = 0 \\ & Max.(H') = \sum_n a_n b_n \end{aligned} \right\} \quad \cdots \quad (2.21)$$

となって連立方程式をとけば解が求まり，また同時にエネルギー積分従って附加質量も計算出来る事になる。

前述のように前進速度の無い場合の船の動揺の問題に対しはこの方法がそのまま適用出来るが，この場合，積分(2.12)が負でないとは必ずしも言えないようなので，極値が最大か最小かはっきりしない事になる。

この辺の事情を少し調べる為に具体的にこの場合を考えて見よう。

さて速度ポテンシャルを



$$\left. \begin{aligned} & \varphi_c \cos\sigma t - \varphi_s \sin\sigma t = Re(\varphi e^{i\sigma t}) \\ & \varphi = \varphi_c + i\varphi_s \end{aligned} \right\} (2.22)$$

のように複素数の形に表わしておこう。

水面では

$$K\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 , \quad K = \frac{\sigma^2}{g} , \quad \cdots (2.23)$$

でありS上で $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ が与えられているものとする。

無限遠方に散波が出てゆくものとして，近似的に

$$\varphi \xrightarrow[Kr\gg 1]{} \sqrt{\frac{K}{2\pi i r}}\, e^{-Kz-iKr} H(K,\theta) , \quad \cdots \quad (2.24)$$

となるものとする。

相反定理は 水面条件と (2.8)の対称性から

$$\iint_S \varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial\nu} dS = \iint_S \varphi_2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu} dS , \quad \cdots (2.25)$$

従って(2.10)のHあるいは(2.17)のH'なる積分を考えればよく、又2次元の場合は流れ函数を使ってG, G'を利用する事も出来る。(この場合(2.25)のままではいけないので一寸注意して置く必要がある)

この場合φは複素数であるのでこれらの式は実部および虚部の二つの積分になし、一方は附加質量を、他方は減衰を極値としてもつ。

さてエネルギー積分はこの場合次のように変形される。

$$E = \frac{1}{2}\iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS \equiv M + iD \ , \quad ---- (2.26)$$

とおき、$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$を実とおいても一般性を損わないであろうから

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi_c}{\partial \nu} \ , \quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial \nu} = 0 \ , \quad --- (2.27)$$

但し上横棒は共軛値をとる意味とする。
とおくと。

$$2M = \iint_S \varphi_c \frac{\partial \varphi_c}{\partial \nu} dS = \frac{1}{2}\iint_S \left(\varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \nu} + \bar{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right) dS \ , \quad -- (2.28)$$

$$2D = \iint_S \varphi_s \frac{\partial \varphi_c}{\partial \nu} dS = \frac{1}{2i}\iint_S \left(\varphi \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \nu} - \bar{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right) dS \ , \quad -- (2.29)$$

となるが、先ずグリーンの定理によってDは

$$D = \frac{K}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(K,\theta)\overline{H(K,\theta)}\, d\theta \ \geq 0 \ , \quad --- (2.30)$$

となり負で無い事は明らかである。

次にMについては同様に、水面条件とグリーンの定理から

$$2M = \iiint_D \nabla\varphi \nabla\bar{\varphi}\, d\tau - K\iint_F \varphi\bar{\varphi}\, dS \ , \quad --- (2.31)$$

となる。右辺第1項は運動エネルギー第2項は水面のポテンシャルエネルギーで共に負ではないけれども其の差が負でないかどうかはわからない。特に正規波のみ存在する場合は両者は等しく従って$M=0$である。又この為に夫々の値は無限大であるけれども其の差が有限に止まり得るわけである。

このような訳で今の所$M \geq 0$は証明出来ないが特別な場合は~~解~~次のように解の一意性が証明出来る。

今境界条件の等しい解が二つあったとしてその差をφと

すると(2·28),(2·29)によって.

$$D = M = 0 \quad , \quad \text{------} \quad (2\cdot32)$$

更に(2·30)が成立つから恒等的に

$$H(K, \theta) = 0 \quad , \quad \text{for any } \theta . \quad \text{---} \quad (2\cdot33)$$

つまり波なしになる。

そうすると速度ポテンシャルは上下反対称な函数 m によって

$$\varphi = Km - \frac{\partial m}{\partial z} \quad , \quad \text{------} \quad (2\cdot34)$$

のように表現出来るから、これを(2·31)に代入して $m = 0|_F$ を考慮してグリーンの定理を使えば

$$2M = \iiint_D \left\{ K^2 \nabla m \nabla \bar{m} + \nabla \frac{\partial m}{\partial z} \nabla \frac{\partial \bar{m}}{\partial z} \right\} d\tau - K \iiint_D \frac{\partial}{\partial z} (\nabla m \nabla \bar{m}) \, d\tau$$

$$- K \iint_F \frac{\partial m}{\partial z} \frac{\partial \bar{m}}{\partial z} dS \quad , \quad \text{---} \quad (2\cdot35)$$

となるが F の上では $\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial y} = 0$ であるから、右辺第2、第3項はグリーンの定理によって結局

$$- \iint_S (\nabla m \nabla \bar{m}) \frac{\partial z}{\partial \nu} dS \quad , \quad \text{---} \quad (2\cdot36)$$

に等しい。従って図のように水に浮んでいて且つ常に

$$- \frac{\partial z}{\partial \nu} \geq 0$$

が成立つならば

$$M \geq 0 \quad , \quad \text{----} \quad (2\cdot37)$$

となるので(2·32)を考えると $M = 0$ 以外にありえないが、これは上式から $\nabla m \equiv 0$ 従って $\varphi =$ 常数 以外にありえない。

つまり解は常数を除いて一義的に決まる。

この証明では没水体もしくはバルヂのある船の場合はうまくない。又一般に(2·37)が成立つ事も言えないので H, G 等が最大か最小かの決め手がない。

もちろん物理的には附加質量が負になるとは考え難いので例えば H なる積分を使う時は附加質量の近似値は真の値より常に小さいと考えられるように思う。

(図のような場合は S を包み水面をきらない鉛直円筒を考えて φ を波と波なしにわければ(2·37)は大体言えるようである)

3. 非対称核の場合

前節の場合はグリーン函数が対称な場合を考えたので、これが非対称な場合はその形のまゝでは具合が悪く、1節のように逆向き流れを考えねばならない。

今流れが逆に流れてゆく核を考えて それを $S(P,Q)$ に対して $\tilde{S}(P,Q)$ と記す事にする。そうすると主流の方向がx軸に一致する時は x_P と x_Q を入れかえたものになる事は明らかである。

つまり
$$S(P,Q) = \tilde{S}(Q,P), \qquad \text{---} \quad (3.1)$$

そこで
$$f(P) = \iint_S \sigma S\,ds, \quad \tilde{f} = \iint \tilde{\sigma}\tilde{S}\,ds, \qquad \text{---} \quad (3.2)$$

とおくと、相反定理は
$$\iint_S \sigma(P)\tilde{f}(P)\,ds_P = \iiiint \sigma(P)\tilde{\sigma}(Q)\tilde{S}(P,Q)\,ds\,ds = \iint_S \tilde{\sigma}(Q) f(Q)\,ds, \quad \text{--} (3.3)$$

同様にして
$$f(P) = \iint_S \mu(Q)\frac{\partial}{\partial \nu_Q} S(P,Q)\,ds_Q, \quad \tilde{f} = \iint \tilde{\mu}\frac{\partial}{\partial \nu}\tilde{S}\,ds, \quad \text{--} (3.4)$$

とおくと
$$\iint \mu \frac{\partial}{\partial \nu}\tilde{\varphi}\,ds = \iint \tilde{\mu}\frac{\partial}{\partial \nu}\varphi\,ds, \quad \text{--} (3.5)$$

が成立つ。

従って例えば
$$J = \iint_S \left(\mu\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \nu} + \tilde{\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \mu\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu}\right) ds, \quad \text{--} (3.6)$$

を与えられた境界条件 $\frac{\partial f}{\partial \nu}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu}$ の下に変分すればよい。

薄翼理論の場合はこのまゝでは具合が悪いので (1.2) の函数を使って新らしく
$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \int_{+\infty}^{x} \frac{\partial f}{\partial \nu}\,ds, & \tilde{\Xi} &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu}\,ds, \\ \zeta &= \int_{\infty}^{x} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\,ds, & \tilde{\zeta} &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \nu}\,ds. \end{aligned}\right\} \quad \text{---} (3.7)$$

のような函数を導入すると、$\frac{\partial f}{\partial \nu}$ は翼面の傾斜として与えられるから、ξ はそのオフセットになり、これは与えられるものと考えてよい。

上の定義と (1.3) から相反定理は

$$\iint_S p\tilde{Z}\,ds = \iint_S \tilde{p} Z\,ds, \quad \cdots\cdots \quad (3.8)$$

よって

$$J' = \iint_S (p\tilde{\zeta} + \tilde{p}\zeta - p\tilde{Z})\,ds, \quad \cdots\cdots \quad (3.9)$$

な積分の変分をとれば

$$\delta J' = \iint_S \left[\delta p(\tilde{\zeta} - \tilde{Z}) + \delta\tilde{p}(\zeta - Z)\right] ds, \quad \cdots\cdots \quad (3.10)$$

となるから，これを０と~~おくと~~するには，

$$\zeta = Z, \quad \tilde{\zeta} = \tilde{Z}, \quad \cdots\cdots \quad (3.11)$$

でなければならない。 ~~しかしこの場合も~~ 従って p は与えられた ζ に対して一義的に決まってしまう。換言すれば p として後端の流出条件を満足するものをとると恒等的な０な函数しか得られない事になる。実際には ζ の傾斜が与えられるのであるから ζ はある常数だけ未定なわけであるから，(3.9)において，p は流出条件を満足しないものをとり，$\zeta = \mathrm{Const.}$ に対応する解をあらかじめ求めておいて，後で流出条件を満足するように加え合わせればよい。このような点は不便であるが積分核の特異性は(1.1)に比して低いのでその点、積分は楽であると考えられる。又この極値の意味は(1.1)に比して不明確であるが特に平板翼ではモーメントとなる事は式から明らかであろう。

最後に(2.25)の形もやはりグリーンの定理によって

$$\iint_S \varphi \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\nu}\,ds = \iint_S \tilde{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,ds, \quad \cdots\cdots \quad (3.12)$$

となるが，翼の場合は上述の場合と同じになり，少々工夫をしなければならない。

上式が成立てば

$$I = \iint_S \left(f\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\nu} + \tilde{f}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - f\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\nu}\right) ds, \quad \cdots\cdots \quad (3.13)$$

の極値問題を考えればよい事になる。

流体力学の問題では境界条件として法線微分が与えられるのが普通で，その為に又吹出し吸込み分布によって速度ポテンシャルを処理する場合が多く，例えば(3.6)は都合が悪い。

そのような時には上式を利用すればよい。
即ち

$$
\left.
\begin{aligned}
f &= \iint \sigma S\, ds, \quad & \tilde{f} &= \iint \tilde{\sigma} \tilde{S}\, ds, \\
\psi &= \iint \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} S\, ds, \quad & \tilde{\psi} &= \iint \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \nu} \tilde{S}\, ds, \\
F &= \iint \frac{\partial f}{\partial \nu} S\, ds, \quad & \tilde{F} &= \iint \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} \tilde{S}\, ds,
\end{aligned}
\right\} \quad \cdots\cdots (3.14)
$$

とおいて(3.13)に代入し、積分順序を変換すれば(可能として)

$$
I = \iint (\sigma \tilde{\psi} + \tilde{\sigma} \psi - \sigma \tilde{F})\, ds, \quad \text{---} \quad (3.15)
$$

となるから、この式でσの変分をとって計算をすればよい。

結言

以上のように境界値問題の積分方程式を解くに当って、変分原理を使えば、Rayleigh-Ritzの手法が適用出きて便利であり、又近似解と正解との誤差の意味が明確になり、又普通の場合不等式が成立つので、その物理量の近似値の誤差の正負がわかる。

この意味でFlaxの変分原理は境界値問題に新風をもたらしたものと言える。しかし排水量のある船の場合等に適用するには少々具合が悪い。このような場合にはしかしガウスの積分およびその変り形を使えば同じ様な手法がとれると言う事がわかった。

実際問題としてはFlaxも述べているように許容函数をどのようなものにとるか、核函数を如何に近似するか等と言う問題は難かしい。

又翼理論などでは二つの方法のどちらがより有効であるかと言う事も今後の問題として残されて居る。識者の批判を待つ次第である。

参考文献

1. A.H. Flax; J. Aeron. Sc. vol.19 (1952)
2. 花岡達郎; Proc. 9-th Japan Nat. Cong. for Appl. Mech. (1959)
3. F. Ursell & G.N. Ward; Q. J. M. & A.M., vol 3 pt. 3 (1950)
4. 井上正雄; "ポテンシャル論" 共立全書 38 ΣTAMП (1952)
5. 別所正利; 防大理工研究報告 3巻1号 昭和40年5月
 同. 3巻2号 〃 7月
 〃 3号 41年1月