

回流水槽吹出口の理論への試み

別紙に利

内容

序

1. 重力を無視した場合 I
(無限水深)
2. 同上 II
(有限水深)
3. 重力を考えた場合 I
(無限水深)
4. 同上 II
(有限水深)

終り

附録: "水面に半無限覆板がある場合の流況"

昭和48年 5月27日

序

風洞の吹出口形状については多くの理論的研究があるようであるが回流水槽については筆者は未だ見ることがない。

又風洞の場合は噴流断面の速度分布が問題であろうが水槽の場合はむしろ自由表面の波が重要でこの面に注意が集まり、これは波おさえ板で波を消す事が出来るので吹出口形状そのものにあまり興味を向かなくて済む。

さらに風洞の場合は円形断面が普通であるのに水槽では角形断面になるのも理論的取扱いは不向きである。

(かたがら回流水槽の使用も普及し又大差、高速のものも豊富を考へる時、この辺で理論的考察を試みる事は当を得ないと思われ。

この事は特に吹出口形状について痛感される事である。さてこの邊にはまず数学的模型を作りおぼろげな三次元的に考へると重力を無視しても大変な問題であるからまず二次元問題として考へる事にしよう。勿論今の所は粘性などは無視する。

二次元問題としても吹出口の絞り口が角型になると重力を考へた場合は未だ大変面倒な問題であるので、今直ちに何かを得ようとするには線型理論を頼らざるを得ず、結果として吹出口形状の傾斜は充分小さいと仮定する事にする。

こうすれば既にある理論で充分である。この時現象を支配する特性値は水深と流速 V から出来るフルード数 V/\sqrt{gH} であるからこの値によって又理論は別がれる。

現在よく使われているものでは一般に $V/\sqrt{gH} < 1$ であるから水深は充分深いと考へてよいが換言すれば重力の影響は無視出来る。

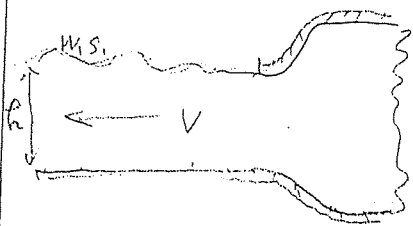
もう一つの極限は $V/\sqrt{gH} \gg 1$ の場合である。

この場合は重力の影響を無視してもよいが水深の影響は無視出来ない。

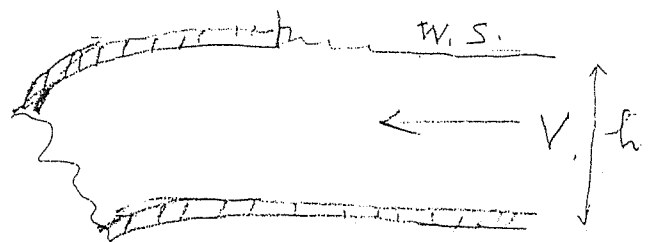
しかし水深 0.4m , $V = 2\text{m/sec}$ で $V/\sqrt{gh} = 1$ であるから現実には常に重力の影響は無視し得ないであろう。

次に吹出口と吸込には別々に取扱える、つまり干渉のないものとする。

そうすると下図のようなモデルが出来る。

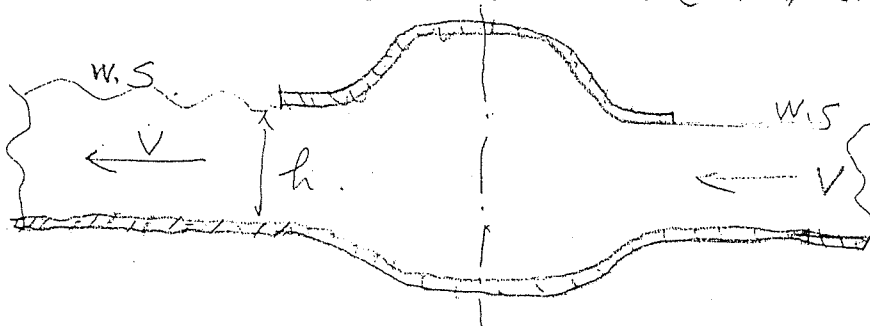


吹出口



吸込口

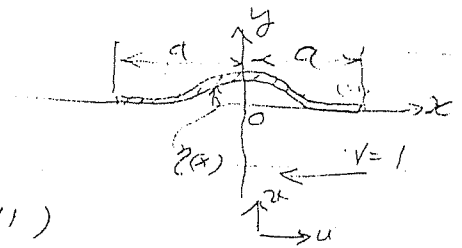
これ等のモデルは半無限に続くので数学的に困難が予想されるがその時は下図のように上図の両者をつなげる、もしくは前後対象なものと考えればよい。



以下簡単な重力を無視し得る場合からその理論式を書き並べて簡単な考察をする。

1. 重力を無視した場合(I) (無限水深)

最初の最も簡単な場合として右図のような場合を考えよう。



速度ポテンシャルを φ とし重力を無視

すると
$$\varphi_c(x, 0) = 0 \quad \text{for } |x| > a, \quad (1)$$

$$v(x, 0) = -\varphi_x(x, 0) = -\eta_x(x) = \frac{1}{2} \eta_x(x, 0), \quad \text{for } |x| < a, \quad (2)$$

又圧力は
$$p(x, y) = -\rho \varphi_x(x, y), \quad \dots (3)$$

又
$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

$$w(z) = \frac{df}{dz} = -u + i v \quad \dots (4)$$

としよう。

これはよく知られた問題で高速における滑走板の線型化模型である。

解は

$$\left. \begin{aligned} w_1(z) &= \frac{i}{\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\eta(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi, \\ w_2(z) &= \frac{i \sqrt{z^2 - a^2}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\eta(\xi) d\xi}{z - \xi} \sqrt{a^2 - \xi^2} \\ w_0(z) &= \frac{i}{\sqrt{z^2 - a^2}} \end{aligned} \right\} (5)$$

のようになる。 w_0 は斉次解, w_1, w_2 は $z = \pm a, z = \infty$ での正則性によって決まるもので"どちらでもよい"が、その差は $w_0(z)$ の定数倍となる。

又 $w_0(z)$ は $z = \pm a$ における飛沫のポテンシャルである事はよく知られている。

一方問題の性質から

$$\int_{-a}^a \eta_x(x) dx < \infty, \quad \dots (6)$$

は明らかである。

さて $z = -a$ で Kutta の流出条件を満足する解は w_2 とする
 がこれは無限遠点で一般には好意的に無限大となり、Green の解の線型モデルである。

これを理解するには (5) の表示よりも圧力分布ル形式の方が便利
 である。

$$w(z) = \frac{1}{i\pi\rho} \int_{-a}^a \frac{p(\zeta) d\zeta}{z-\zeta}, \quad \dots (7)$$

この w_0 に対応する p_0 は

$$p_0(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}, \quad \dots (8)$$

である。

流出条件は $p(-a) = 0, \quad \dots (9)$

無限遠で 0 とするには $\int_{-a}^a p(\zeta) d\zeta = 0, \quad \dots (10)$

となる。(10) は

吹出口と逆らしい条件は無限遠で $\psi = 0$
 吹出口で飛沫のとは反対向きであるから (9), (10) が正しい
 条件であり、これを (5) 式について考えれば

飛沫のない条件 (S.F.C)

$$\int_{-a}^a \eta(\zeta) \frac{(\zeta = a)}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}} d\zeta = 0, \quad \dots (11)$$

無限遠の条件

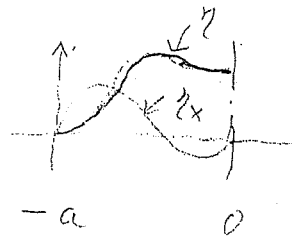
$$\int_{-a}^a \eta_x(\zeta) d\zeta < \infty, \quad \dots (12)$$

となる。

S.F.C. を満たす形状の特徴は "何れも"

$$\eta_x(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} (5x^2 - 3a^2), \quad \dots (13)$$

を考慮して判るように拡大部分に "二重"
 がある事である。



以上の議論は右図のよう半無限形状
について平行に展開出来、(5)に対応して

$$w_0(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$w_1(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z}} \int_0^1 \frac{\gamma(x, \zeta)}{z-\zeta} \sqrt{\zeta} d\zeta, \quad (13)$$

$$w_2(z) = \frac{-\sqrt{z}}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(x, i\zeta)}{z-\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}, \quad (13)$$

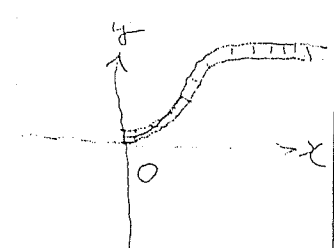
整な条件は

$$\int_0^{\infty} \gamma_x(\zeta) \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = 0, \quad \text{S.F.C.} \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \gamma_x(\zeta) d\zeta < \infty, \quad \text{Cond. at } \infty \quad (15)$$

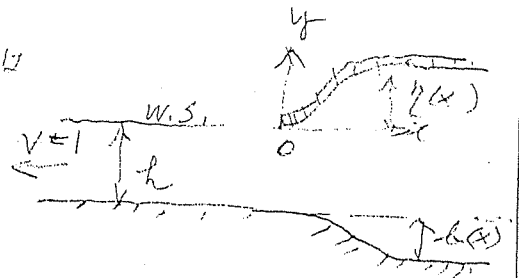
$$\begin{aligned} \text{例として} \quad \gamma_x &= \sqrt{\zeta} (1-2\zeta) \quad \left. \begin{array}{l} \text{for } \zeta < 1 \\ 0 \end{array} \right\} \text{for } \zeta > 1 \\ \gamma(x) &= \frac{2x^3}{3} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}, \quad \text{for } x < 1 \\ &= \frac{2}{15}, \quad \text{for } x > 1 \end{aligned} \quad (16)$$

のよう条件のがある。



2, 重力を無視した場合(II) (有限水深)

久, b_x が積分可能とすると
無限遠で適当な速度ポテンシャル



$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{\pi}{h}z} - 1}} \left[\int_0^{\infty} \frac{a_x(\xi) \sqrt{e^{\frac{\pi}{h}\xi} - 1}}{e^{\frac{\pi}{h}\xi} - e^{\frac{\pi}{h}z}} d\xi + i \int_0^{\infty} \frac{b_x(\xi) \sqrt{e^{\frac{\pi}{h}\xi} + 1}}{e^{\frac{\pi}{h}\xi} + e^{\frac{\pi}{h}z}} d\xi \right], \dots (1)$$

とすると, S.F.C. は

$$\int_0^{\infty} \frac{a_x(\xi) \sqrt{e^{\frac{\pi}{h}\xi} - 1}}{\sqrt{e^{\frac{\pi}{h}\xi} - 1}} d\xi = \int_0^{\infty} \frac{-b_x(\xi) d\xi}{\sqrt{e^{\frac{\pi}{h}\xi} + 1}} = 0, \dots (2)$$

である。

これは圧力分布で表わされる

$$w(z) = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \frac{p(\xi) e^{\frac{\pi}{h}\xi}}{e^{\frac{\pi}{h}\xi} - e^{\frac{\pi}{h}z}} d\xi + \frac{1}{hi} \int_0^{\infty} \frac{P(\xi) e^{\frac{\pi}{h}\xi}}{e^{\frac{\pi}{h}\xi} + e^{\frac{\pi}{h}z}} d\xi, (3)$$

但し $P(\xi)$ は底の圧力である。

この時は S.F.C. は

$$P(0) = 0, \dots (4)$$

である。

圧力を表わす (3) 式を積分して $\psi(0) = -\psi(x)$ を計算すればよいわけである。

3. 重力を考えた場合 (I) (無限水深)

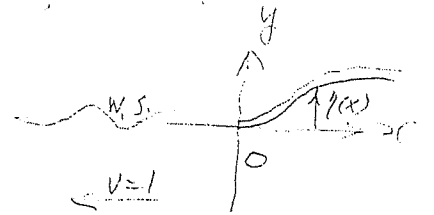
この場合は水面で

$$\varphi_x(x, 0) + g\eta(x) = -\frac{p(x)}{\rho}, \quad \dots (1)$$

$$\varphi_y|_{y=0} = \eta_x(x) = -\eta_x|_{y=0}, \quad \dots (2)$$

従って $\text{Re} \left\{ \frac{df}{dz} + i\sigma f \right\} = -P(z)/\rho, \quad (3) \quad (\sigma = g/V^2)$

与えられた形状に對する速度ポテンシャルは附録1の3が大變面) 位で普通は与えられてゐる*
=2のようなものが便利であらう。



$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} P(\zeta) \int (\sigma(\zeta - z)) d\zeta, \quad \dots (4)$$

但し

$$S(\sigma z) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\mu z}}{k - \sigma - \mu i} d\mu, \quad (5)$$

をとりと無限遠の条件として

$$\int_0^{\infty} P(\zeta) d\zeta < \infty, \quad (6)$$

で高かばよく、又 S.F.C. は

$$P(0) = 0, \quad \dots (7)$$

この場合は波がなかりなりの波無1条件(W.F.C)が必零で、その点には μ とする関数を導入して

$$\frac{d^2}{dx^2} \mu(x) + \sigma^2 \mu(x) = p(x), \quad \dots (8)$$

のまうに μ が与えらるるとすると W.F.C は

$$\mu(0) = \mu'(0) = 0, \quad \dots (9)$$

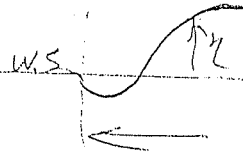
* Wehausen: Handb. d. Physik (1960)

従って (7) の S.F.C と合すると

$$\mu(0) = \mu_x(0) = \mu_{xx}(0) = 0, \dots (10)$$

のような $\mu(x)$ から導かれる形状を採用すれば、はたらく飛沫も出ない。

このような形状の特徴は右図のように
出口の所に凹みがあり、これが速度
によって変化することである。つまり
この部分が油おさえ板に相当すると考えられる。



なお形状を計算するに付 (8) に代えて最初から $m(z)$ なる関数を導入し

$$f(z) = \frac{d}{dz} m(z) - i\sigma m(z), \dots (11)$$

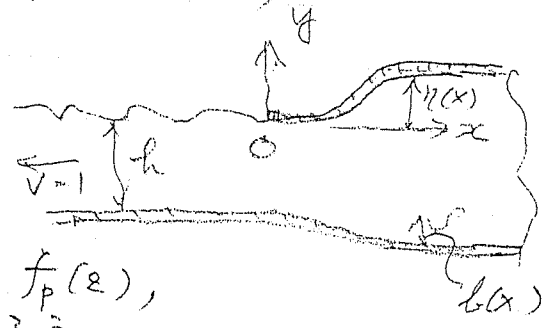
$$m(z) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}, \dots (12)$$

とておくと簡単である。

* 筆者; Mem. D. A. vol. 4 (1967)

4. 重力を考えた場合(II) (有限水深)

この場合も Wehausen, (Lamb)に
ある解は



底面オフセット $b(x)$
の与えられた場合, $f_B(z)$;
水面で圧力の与えられた場合 $f_P(z)$,
"あるか"今はそれで充分であろう。

又目的は存在し条件を満たすものであるので
積分の不定定は今は考えない。

さて Text はよければ

$$f_B(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi) \frac{\delta \sin k(z-\xi) + ik \cos k(z-\xi)}{k \cosh kh - \delta \sinh kh} d\xi, \quad \dots (1)$$

$$f_P(z) = \frac{1}{\pi P} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) \frac{\sin k(z-\xi) + ih}{k \cosh kh - \delta \sinh kh} d\xi, \quad (2)$$

$$\text{Re} \left\{ \frac{d f_B}{dz} + i \delta f_B \right\} \Big|_{y=0} = 0, \quad \dots (3)$$

$$\text{Im} \{ f_P \} \Big|_{y=-ih} = 0, \quad \dots (4)$$

と取っている。

今はこの2つを合わせたものを考えるよりはよい。
当然 $p(x)$, $b(x)$ は積分可能としてかくと問題は
S.F.C. と W.F.C. となり, 先ず S.F.C. は

$$p(0) = 0, \quad \dots (5)$$

W.F.C. はこの場合少し面倒がある。

式(1), (2) の補積分方程式の pole から出てくるものがあるから
 今

$$k_0 = \sigma \tanh k_0 h, \quad (16)$$

とすると

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 \right) \mu(x) = P(x), \quad (17)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 \right) B(x) = L(x), \quad (18)$$

よって μ, B の境界条件を導入すると W.F.C. は

$$\mu(0) = \mu_x(0) = 0, \quad (19)$$

$$B(0) = B_x(0) = 0, \quad (20)$$

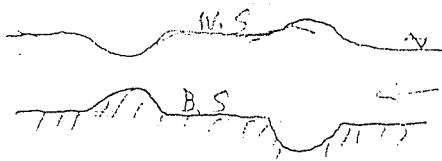
(9) にはついでに S.F.C. も入れて

$$\mu(0) = \mu_x(0) = \mu_{xx}(0), \quad (21)$$

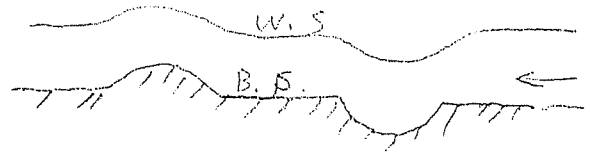
のような μ, B から導かれる $P(x), L(x)$ による形は
 複雑なものではない。

この場合も速度による複雑な形の変化は大きい
 であろう。

存在座の凸凹がある場合は図のように $V \leq \sqrt{gh}$ に従って
 水面の凹凸が異なってくる事は注意すべきである。(22)



$$V < \sqrt{gh}$$



$$V > \sqrt{gh}$$

結 び

以上の理論的考察は二次元線形理論であるので、定量的な妥当性についてはあまり保証はない。

しかしながら定性的には吹出口設計の正しい指針となり得るものと思われる。

又特に吸込口については従来確たる指針もないので、将来高速化に当たってはこのような理論を流用して正しい設計が可能になるのではなからうか。

又三次元理論において線形理論を引は“所謂制限水路における造波理論”を少し修正すればよい事は直ぐわかるであらう。(断面が矩形の時)

つまりそれは次の三種のポテンシャルの組合せとなる。

i) 底面、側面共に平らで水面に圧力分布がある。

(これが制限水路の造波理論である)

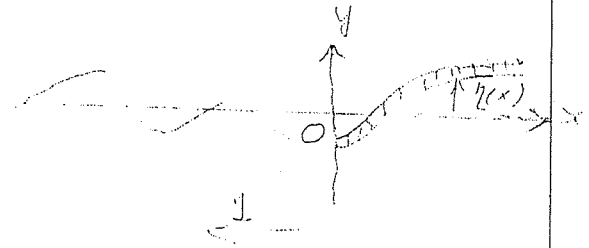
ii) 水面で圧力が0で側面が平らで底面に凹凸がある。(底面の凹凸が流れに直角ならばこれは二次元理論で与えられる)

iii) 水面で圧力が0, 底面が平らで側面に凹凸がある。(これはこれはTextにはないが側面に沿って source-sink を分布させればよりからやはり制限水路理論で同く合う)

以上

附録 水面上に半無限の覆板がある場合の流れ

これは振動問題で所謂
 Infinite Dode Problem*の解を
 利用すればよいが文献には見当
 らぬので記しておく。
 境界条件は



$$\text{Re} \left\{ \frac{df}{dx} + i f \right\} = \begin{cases} -p(x) & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Im \left\{ \frac{df}{dx} \right\} = -q(x) = v(x) \quad \text{for } x > 0, \quad (2)$$

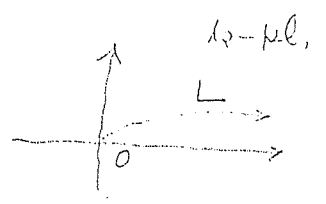
とす。その解は

$$\Im \left\{ \frac{df}{dx} \right\} = 0 \quad \text{for } x > 0, \quad (3)$$

となる解は f_0 と書くと

$$f_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\Lambda(\kappa) e^{-z\kappa}}{(1+\kappa^2)^{1/2}} d\kappa \quad (4)$$

と書ける。



$$\Lambda(\kappa) = (1+\kappa^2)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{\kappa} \frac{\log|u|}{1+u^2} du\right), \quad (5)$$

ここで Λ は今までの実軸に沿って cut を持ち、上半面では

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(\kappa) &\rightarrow 1 + \frac{\kappa}{\pi} \log \frac{\kappa}{\kappa_0} + o\left(\frac{1}{\kappa}\right) \quad \text{for } \kappa \rightarrow 0 \\ \Lambda(\kappa) &\rightarrow \sqrt{\kappa} \left[1 + \frac{1}{\pi \kappa_0} \log(\kappa \kappa_0) + o\left(\frac{1}{\kappa}\right) \right] \quad \text{for } \kappa \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} (6)$$

となり κ : real ならば Λ : real となる。

* J.T. Stoker "Water Waves" (1957); Friedrichs & Lomy; Can. Proc. Math. Phys. Sci. vol 1 (1948); Holford; Proc. Camb. Phil. Soc. vol 60 (1966); Leppington; J.F.M. vol 56 (1972) ...

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(i) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}i} \\ \Lambda(-i) &= \Lambda(i) \\ \Lambda(xe^{i\pi}) &= \frac{(1+ix)}{\Lambda(x)} = \frac{+i(x-i)}{\Lambda(x)} \end{aligned} \right\} (7)$$

従つて (4) 式は 4.4.13

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Lambda(k) e^{-kx}}{1+k^2} dk, \quad \text{for } x > 0 \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} f_0(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Lambda(ke^{i\pi}) e^{-kz}}{1+k^2} dk \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-kz}}{(1+ik)\Lambda(k)} dk \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}(z-i)} \end{aligned} \right\} \text{for } \operatorname{Re}(z) < 0, \quad (9)$$

条件 (1), (3) を満たす事は容易に判るであろう。

又 (9) 式より 従つて 漸近形を判る事が判り、(6) を利用すれば

$$\left. \begin{aligned} f_0(z) &\xrightarrow{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kz} dk = \frac{1}{\pi z} \\ \frac{d}{dz} f_0(z) &\xrightarrow{z \rightarrow \infty} -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-kz}}{\sqrt{k}} dk = -\frac{1}{\sqrt{\pi z}} \end{aligned} \right\} (10)$$

と判るから 無限遠での挙動も 適當であり、原点では分岐点
を有し、瑕点が出る事を意味してゐる。

一般解は次のように求められる。

$$\text{令} \quad v(x) = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(s) ds, \quad \text{for } x > 0 \quad (11)$$

と表せるとしよう。

$F(s)$ は s が 実ならば 実である。このように $F(s)$ を与えられた
 $v(x)$ は 可なり一般に 亦あるかは 判明してゐるが、 $v(x)$ が 解析的に
与えられるならば 5.7.2 逆変換は 4.4.13 による。

又 簡単な場合として

$$v(x) = \frac{1}{x^{v+1}}, \quad F(s) = s^v; \quad v > -1 \quad (12)$$

$$\gamma(x) = e^{-ax}, a > 0; \quad F(s) = \int_0^\infty \gamma(x) dx \quad (13)$$

等と仮定

より

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+s)H(s)}{sA(s)} ds \int_{-L}^{-z} \frac{A(k)e^{-zk}}{(1+k)(k-s)} dk \quad (14)$$

この積分を考えると $x < 0$ では ^{前同様} 境界条件を満足し、
 $x > 0$ では L を実軸上に持つと虚部は $s = 0$ の上の
 (Residue のみより)

$$\int \left[\frac{df}{dx} \right] = + \int_0^\infty F(s) e^{-xs} ds = v(x) \quad (15)$$

よって境界条件を満足する。

しかし (14) の s に関する積分が存在する為には $F(s)$ は
 $s \rightarrow 0$ の近くで 少くも $O(s^\epsilon)$ ($\epsilon > 0$) となる必要がある。
 この事は $v(x)$ については $x \rightarrow \infty$ で $O(x^{-1-\epsilon})$ を意味する。
 して解は 前の齊次解と併せて、

$$f(z) = f_1(z) + A f_0(z), \quad A \text{ real} \quad (16)$$

と書ける。

$x \ll 0$ では

$$f(z) \rightarrow \sqrt{2} A e^{-iz - \frac{\pi}{8}i} - \sqrt{2} e^{-iz - \frac{\pi}{8}i} \int_0^\infty \frac{(1+s)F(s) ds}{A(s)s(i-s)} \quad (17)$$

常数 A は後述に依るある解では原点における正則性
 (Kutta の流出条件) で決められる。

又流れの方向を逆にして解の形は同じだが x の時は
 $x < \infty$ に A が無いという条件で A が決まり、この解は
 一般に飛沫が出る事になる。

具体的にその計算は大変面倒な運算なので今は
 此處に止める事にする。

以上