"船型の数式表示に関する覚書"

別所正利

昭和36年12月29日　　防衛大学校

内容：—

附表及図 各1葉.

はしがき

船型の数式による表現の問題は従来多くの試みがあるが、特に最近実用上の要求から多くの研究がある様である。　此處では著者の経験を基礎として此の問題に関するメモを集めて見たものである。

此處では問題を一応水線の表現に限定しておいたが、同じ様な方法を垂直方向の変化に対して行えるけれど此の点には未だ実用上問題が残されるであろう。

尚1～4節迄が主題による部分で其の後の2節は他の応用に関する著者のメモである。

1. ルジャンドル函数による表現

函数 $f(x)$ がルジャンドル函数 $P_n(x)$ で次の様に表わされるとすると、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) , \quad \cdots\cdots \quad (1.1)$$

直交性から

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{for } n = m \end{cases} \quad \cdots (1.2)$$

であるから係数は

$$a_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx , \quad \cdots\cdots \quad (1.3)$$

の様に積分して求められる。

此れを実際に応用してみた限りでは6次以上の係数を求める事は無意味の様である*

又中央平行部のある場合は前部後部を夫々独立に数式化する方が種々の意味で好ましい。

ルジャンドル函数の実際の形をあげれば

$$\left.\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x = \cos\theta , \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1) , \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta) , \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) = \frac{1}{64}(35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9) , \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) = \frac{1}{128}(63\cos 5\theta + 35\cos 3\theta + 30\cos\theta) ,
\end{aligned}\right\} (1.4)$$

* 防大卒論：田中・沼田（昭和32年3月）

A4×100

$$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)=\frac{1}{512}(231\cos6\theta+126\cos4\theta+105\cos2\theta+50),$$

$$P_n(1)=1,\qquad P_n(-1)=(-1)^n,\qquad etc.$$

等にであるから，特に

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx,\qquad a_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,x\,dx$$

$$a_2=\frac{5}{4}\int_{-1}^{1}f(x)(3x^2-1)\,dx, \qquad \cdots (1.5)$$

となって，此等は船舶算法上欠くべからざる量で表わされる。

2. 三角級数による表現

一般に前法に限らず x の巾級数展開による方法では船首尾に近い両端のの僅かなふくらみ，例えば球状船首船型の様なものを表現するのは大変むつかしい様である。

此の困難をさけるには次の様に変数変換して三角級数による表現法が考えられる。

$$x=\cos\theta,\qquad dx=-\sin\theta\,d\theta, \qquad \cdots (2.1)$$

此の時は

$$f(x)\equiv f(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\,\frac{\varphi(\theta)}{\sin\theta}, \qquad \cdots (2.2)$$

$$\varphi(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos n\theta, \qquad \cdots (2.3)$$

の様に展開するのが後の5，6節の様な観点からは望ましい。　然し乍ら此の方法では船首尾の微係数が零若しくは無限大となる点で一見不便に見える。　又此の方法では中央平行部のある時も3つに別けて考える事はあまり意味がない事に注意しなければならない。

係数 b_n はやはり積分によって求められ

$$b_0=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\,d\theta,$$

$$b_n=\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta,\quad n\geq1 \qquad \cdots (2.4)$$

A4×100

であるから (1.4) と (2.4) を比較して (1.3) から a_n と b_n の間には次の関係が成立つ

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= b_0 \\
a_1 &= \tfrac{3}{2} b_1 \\
a_2 &= \tfrac{5}{8}(3b_2 + 2b_0), \\
a_3 &= \tfrac{7}{16}(5b_3 + 3b_1), \\
a_4 &= \tfrac{9}{128}(35b_4 + 20b_2 + 18b_0), \\
a_5 &= \tfrac{11}{256}(63b_5 + 35b_3 + 30b_1), \\
a_6 &= \tfrac{13}{1024}(231b_6 + 126b_4 + 105b_2 + 100b_0),
\end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

逆に

$$\left.\begin{aligned}
b_2 &= \tfrac{8}{15}(a_2 - \tfrac{5}{4}a_0), \\
b_3 &= \tfrac{16}{35}(a_3 - \tfrac{7}{8}a_1), \\
b_4 &= \tfrac{128}{315}(a_4 - \tfrac{3}{4}a_2 - \tfrac{21}{64}a_0), \\
b_5 &= \tfrac{256}{693}(a_5 - \tfrac{11}{16}a_3 - \tfrac{33}{128}a_1),
\end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

3. 挿間法的表現

前2節の方法では線図のオフセットが与えられた場合与えられた点を正確には通らないで、平均的な意味で最も良い近似値が与えられる訳である。

与えられた点を正確に通る方法としては内挿公式による方法が考えられるが今の場合点は等間隔でないのが普通であるからラグランジュのそれが最も便利であろう。

即ち

$$f(x) = \sum_i f(x_i)\,\varphi_i(x), \quad \cdots \quad (3.1)$$

$$\varphi_i(x) = \prod_j (x - x_j) \Big/ \prod_{\substack{j \\ i \neq j}} (x_i - x_j), \quad (3.2)$$

然し乍ら実際の線図はバッテンでフェアリングされているから3次曲線の集りと見なされる*ので此の方法で

*F. Theilheimer & W. Starkweather; Mathematics of Computation, vol. 15 No. 76. pp. 338〜355 (1961)

A4×100

点を多く採ると与えられた点と点の間で複雑な変化をする様になってうまくない。

同じ様な考えで例えば造波抵抗等には前後端の逐次微係数が重要な役割を果すと云う事から、其等によって線図を表現する方法が考えられるが此の方法も実際上、与えられた線図から逐次微係数を求める事自体が困難であるので実用的ではあるまい。

4. 併用法

以上の様に見て来ると巾級数で表わす方法としては両者を併用する方法が最も直観的であり且つ実用的でもある様に思われる*。

その渡辺氏の方法を少し一般化し1節の方法と関聯させて以下記述しよう。

即ち $x=\pm 1$ で $f(\pm 1)$ 及び $f'(\pm 1)$ が与えられ且つ a_0, a_1, a_2 即ち面積，モーメント，2次モーメントが与えられるならば，結局我々は x の6次式を得る事になる。

そこで(1.1)の形で $n=0\sim 6$ 迄の展開式を仮定しよう。

(1.4)から微係数は

$$\left.\begin{aligned}
&P_0'(x)=0,\quad P_1'(x)=1,\quad P_2'(x)=3x,\quad P_2'(1)=3=-P_2'(-1)\\
&P_3'(x)=\tfrac{1}{2}(15x^2-3),\quad P_3'(1)=6=P_3'(-1)\\
&P_4'(x)=\tfrac{1}{4}(70x^3-30x),\quad P_4'(1)=10=-P_4'(-1),\\
&P_5'(x)=\tfrac{1}{8}(315x^4-210x^2+15),\quad P_5'(1)=15=P_5'(-1),\\
&P_6'(x)=\tfrac{1}{8}(693x^5-630x^3+105x),\quad P_6'(1)=21=-P_6'(-1),
\end{aligned}\right\}\quad(4.1)$$

等であるから

$$\left.\begin{aligned}
f(1)&=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6,\\
f(-1)&=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6,\\
f'(1)&=a_1+3a_2+6a_3+10a_4+15a_5+21a_6,\\
f'(-1)&=a_1-3a_2+6a_3-10a_4+15a_5-21a_6,
\end{aligned}\right\}\quad(4.2)$$

此等の式で左辺と a_0, a_1, a_2 が与えられれば，$a_3\sim a_6$ は決まってしまう。

今
$$\left.\begin{aligned}
&f(-1)=f_0,\quad f(1)=f_1\\
&f'(-1)=\alpha_0,\quad f'(1)=\alpha_1
\end{aligned}\right\}\quad\cdots(4.3)$$

* 渡辺恭二；造船協会論文集 77号（昭和30年7月）

A4×100

と記して (4.2) をとけば、

$$
\left.
\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{18}\{15(f_1-f_0)-(\alpha_0+\alpha_1)-28a_1\} \\
a_4 &= \frac{1}{22}\{21(f_0+f_1)+(\alpha_0-\alpha_1)-42a_0-36a_2\}, \\
a_5 &= \frac{1}{18}\{6(f_0-f_1)+(\alpha_0+\alpha_1)+10a_1\}, \\
a_6 &= \frac{1}{22}\{-10(f_0+f_1)-(\alpha_0-\alpha_1)+20a_0+14a_2\},
\end{aligned}
\right\} \quad (4.4)
$$

此れを (1.1) に代入して $f_0, f_1, \alpha_0, \alpha_1, a_0, a_1, a_2$ 毎に整理すれば良い訳である。

更に

$$
\left.
\begin{aligned}
& b = \frac{B}{2L}, \\
& C_w \text{ ; 水線面積係数} \\
& \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = 2m\int_{-1}^{1} f(x)\,dx, \\
& \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = 4k^2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx,
\end{aligned}
\right\} \quad (4.5)
$$

の様な諸量を考えると、

$$
\left.
\begin{aligned}
a_0 &= bC_w \\
a_1 &= 6ma_0 \\
a_2 &= 30\left(k^2-\frac{1}{12}\right)a_0,
\end{aligned}
\right\} \cdots (4.6)
$$

の様になるから (1.1) を次の様に書き変える事が出来る。

$$
f(x) = f_0F_0(x) + f_1F_1(x) + \alpha_0T_0(x) - \alpha_1T_1(x) + a_0\{A(x) + mM(x) + k^2I(x)\}, \quad \cdots (4.7)
$$

但し

$$
\left.
\begin{aligned}
F_0(x) &= F_1(-x) = -\frac{5}{6}P_3(x) + \frac{1}{3}P_5(x) + \frac{21}{22}P_4(x) - \frac{5}{11}P_6(x), \\
T_0(x) &= T_1(-x) = -\frac{1}{18}P_3(x) + \frac{1}{18}P_5(x) + \frac{1}{22}P_4(x) - \frac{1}{22}P_6(x), \\
A(x) &= A(-x) = P_0(x) - \frac{5}{2}P_2(x) + \frac{24}{11}P_4(x) - \frac{15}{22}P_6(x) \\
M(x) &= -M(-x) = 6P_1(x) - \frac{28}{3}P_3(x) + \frac{10}{3}P_5(x) \\
I(x) &= I(-x) = 30P_2(x) - \frac{540}{11}P_4(x) + \frac{210}{11}P_6(x),
\end{aligned}
\right\} \quad (4.8)
$$

A4×100

附図及び表に其の数値例を示す。

此等の函数の助けによつて極めて直観的に線図の整理及び計画が立てられる事は容易に理解しうるであろう。

又同時に3節で觸れた線図のFairnessの問題は一体どの様な意味を持つているかについて大きい疑問が生じて来るであろう。というのは此の様な方法によれば係数が適当な範囲にありさえすれば先ず先ずFairな線図が得られるであろうと考えられるから、問題は線図のFairnessというよりはむしろ、係数自身が如何にあるべきかという事になつて来、此れをどの様な観点から決めるべきかという問題に還元されるであろう。

4. マシウ函数による表現

船型を決める一つの要素として造波抵抗を考えて見ると、2節の様な表現が望ましく、且つ第1近似的には更に、マシウ函数で表現される事が望ましい。

そして造波抵抗を小さくする為には普通の船の速度では出来るだけ低次のマシウ函数で表現される、云い換えれば高次のマシウ函数の係数が出来るだけ小さくなつている事が必要である*。

然し乍ら此の場合の展開係数は速度によつて違つて来るので先ず(2.2),(2.3)の様に展開しておいてから次の様に求めるのが便利であろう。

即ち(2.2)の様に定義される函数 $\varphi(\theta)$ が、マシウ函数で

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n ce_n(\theta, q), \quad q = \frac{\gamma^2}{4}, \quad F_r = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \quad \cdots (5.1)$$

の様に展開出来るとすると(2.3)の展開係数 b_n と α_n の間には

$$b_{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m} A_{2n}^{(2m)}, \quad b_{2n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} A_{2n+1}^{(2m+1)}, \quad \cdots (5.2)$$

$$\alpha_{2n} = 2 b_0 A_0^{(2n)} + \sum_{r=1}^{\infty} b_{2r} A_{2r}^{(2n)}, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r+1} A_{2r+1}^{(2n+1)}, \quad \cdots (5.3)$$

但し

$$ce_{2n}(\theta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos 2r\theta, \quad ce_{2n+1}(\theta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos(2r+1)\theta, \quad \cdots (5.4)$$

* 著者；"極小造波抵抗問題に関する研究"（続報）昭和26年12月

A4×100

6. 2次元2重吹出しと流線

前節の如くマシウ函数に展開した場合近似的には両端で無限に大きくなる様な船型が抵抗が小さいという様な結果が出て来る。実際には然し前迄で引用した様な理論的研究で与えられるものは所謂2重吹出分布であるから、半巾は必ず有限なものとなる。

此れを3次元的に求めるのは大変面倒な問題であるし又2次元問題に限っても例えば転移像の方法*は今の場合適用出来ない。

さて2次元2重吹出しによる速度ポテンシャルは、

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{m(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta, \qquad z=x+iy, \quad \cdots \quad (6.1)$$

従って単位速度の一様流れ中における流線（境界）を決める方程式は、

$$y - \mathcal{I}.\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{m(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta} = 0, \quad \cdots \quad (6.2)$$

である。

今

$$m(\cos\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\cos n\vartheta}{\sin\vartheta}, \qquad \zeta=\cos\vartheta, \quad a_n\ \text{real}, \quad \cdots \quad (6.3)$$

の形に展開されているとする~~時~~

$$z = x+iy = \cosh t, \qquad \zeta = \cos\vartheta, \quad \cdots \quad (6.4)$$

の様に変数変換すると

$$f(\cosh t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{e^{-nt}}{\sinh t}, \quad \cdots \quad (6.5)$$

$$\because \quad \frac{\sinh t}{\cosh t-\cos\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n e^{-nt}\cos n\vartheta, \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{for } n=0 \\ 2 & \text{for } n\geq 1 \end{cases} \quad (6.6)$$

更に $t=\tau+i\theta$ とおくと $x=\cosh\tau\cos\theta$, $y=\sinh\tau\sin\theta$,

$$\mathcal{I}.\,\frac{e^{-nt}}{\sinh t} \equiv I_n(\tau,\theta) = e^{-n\tau}\,\frac{\cosh\tau\sin\theta\cos n\theta+\sinh\tau\cos\theta\sin n\theta}{\cosh^2\tau\sin^2\theta+\sinh^2\tau\cos^2\theta}, \quad (6.7)$$

となる。

* 造船協会論文集85号（昭和27年12月）

A4×100

さて $\tau \to 0$ 即ち物体が充分細長い場合で，θがあまり小さくなければ

$$I_n(0,\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sin\theta} \quad , \cdots\cdots \quad (6.8)$$

であるから(6.2)から

$$y(x) \fallingdotseq m(x) \quad , \cdots\cdots \quad (6.9)$$

が成立つが一般には，

$$y \equiv \sinh\tau\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_n(\tau,\theta) \quad , \cdots\cdots \quad (6.10)$$

の様になるから(6.9)を第1近似値として入れて逐次近似的に解を求めればよかろう。

然し θが小さい時には(6.9)をとるわけにゆかなくなり。

特に $\theta \to 0$ とすれば(6.10)は

$$\cosh\tau \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n\tau} + \sinh\tau \sum_{n=1}^{\infty} n a_n e^{-n\tau} \mp \sinh^3\tau = 0 \quad , \cdots (6.11)$$

から $\theta = 0$ の時の τ が求められる。

或いは又 θもτも小さい時には(6.10)から

$$\tau \fallingdotseq \frac{\sum a_n}{\theta^2 + \cancel{2\sum n a_n}} \xrightarrow[\theta \to 0]{} \frac{\sum a_n}{\cancel{2\sum n a_n}} \quad , \cdots \quad (6.12)$$

が近似的に得られるので之れから逐次近似的に解いてゆけばよかろう。

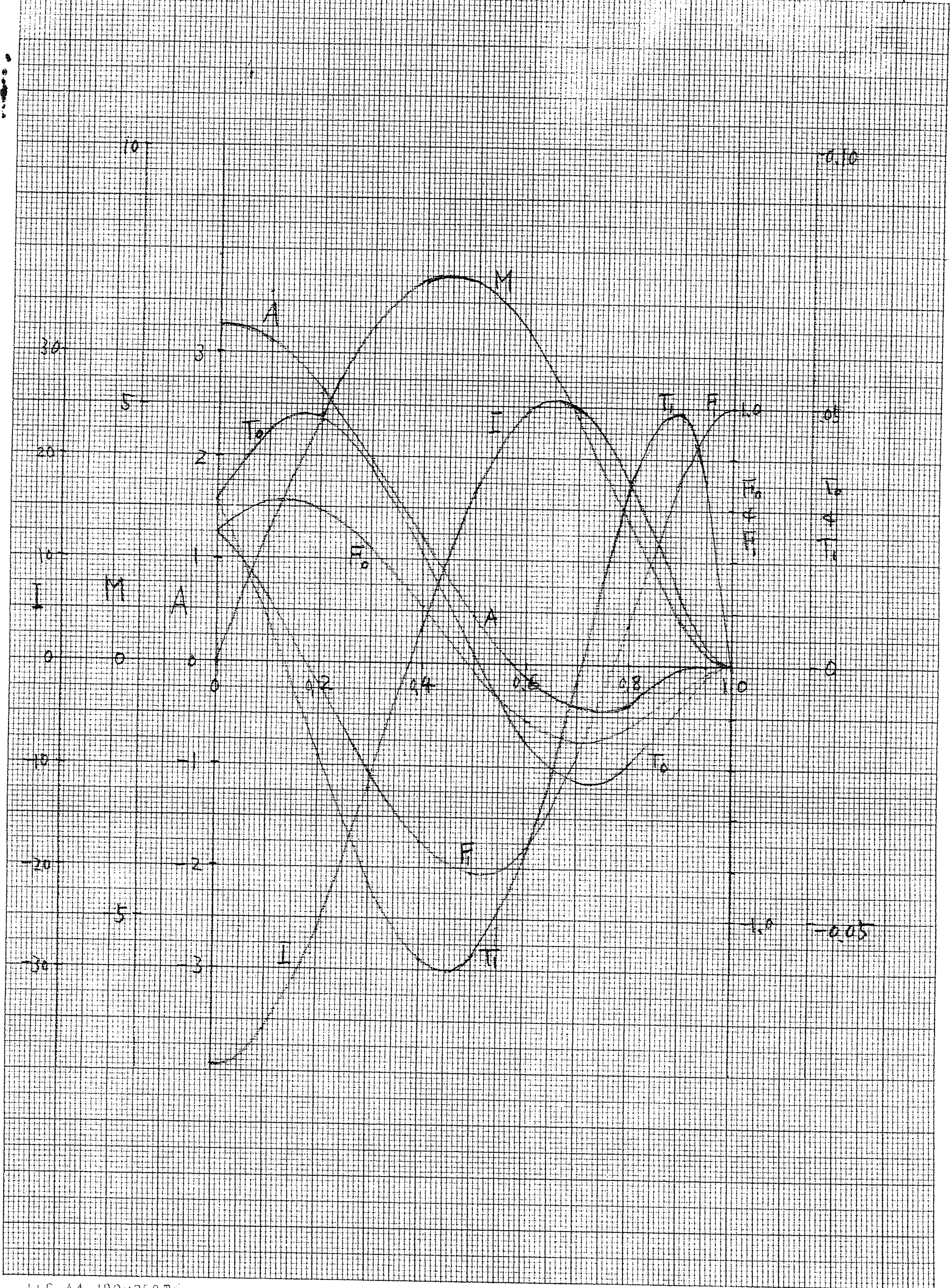
$\tau \fallingdotseq \sqrt[3]{\sum a_n}$

以上，

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

x	$F_0(x)$	$F_1(x)$	$T_0(x)$	$T_1(x)$	$A(x)$	$M(x)$	$I(x)$
0	0.50000	.50000	.03125	.03125	3.2812	0	−39.375
0.1	.61821	.25315	.04480	.00854	3.1195	2.5728	−35.890
0.2	.59392	−.07776	.04685	−.01843	2.6611	4.8384	−26.127
0.3	.44478	−.42298	.03788	−.04299	1.9836	6.5213	−12.064
0.4	.21600	−.69776	.02104	−.05792	1.2039	7.4088	3.334
0.5	−.02832	−.81738	.00146	−.05713	.4614	7.3828	16.611
0.6	−.21856	−.71680	−.01485	−.03789	−.1075	6.4512	24.515
0.7	−.29770	−.37507	−.02263	−.00344	−.4011	4.7793	24.887
0.8	−.24416	.15552	−.01942	.03386	−.3912	2.7216	17.758
0.9	−.09936	.71557	−.00812	.04895	−.1694	.8529	6.638
0.95	−.03075	.91815	−.00254	.03587	−.0533	.2371	1.990
1.0	0	1.00000	0	0	0	0	0


I
M
A
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.10
0.05
-0.05
T_0
T_1
H_0
H_1