円管内の軸対称流れ

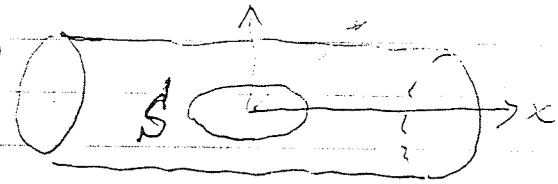
速度ポテンシャルは

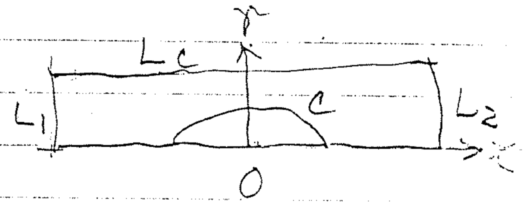
$$\phi(P)=\frac{1}{4\pi}\iint\left[\phi(Q)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}-\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{R}\right]dS_Q, \quad (1)$$

$$P\equiv(x,r,\theta),\quad Q\equiv(x',r',\theta')$$

$$R^2=(x-x')^2+\varpi^2,$$

$$\varpi^2=r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta'),$$





積分はすべての境界について行うものとする。

さて そのような軸対称流れとして θ に全く関係ないものと 軸流ポンプの後流のように θ に比例するものが考えられる。

その θ に比例するものを $\theta\psi(x,r)$ と書き (1)の積分を θ' について実行すると

$\theta'-\theta=\varphi$

$$\int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta}\frac{\theta' d\theta'}{R}=\int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta}\frac{[(\theta'-\theta)+\theta]\,d(\theta'-\theta)}{\sqrt{(x-x')^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}}$$

$$=\theta\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta'}{R} \quad \cdots\cdots(2)$$

となる。

一方 θ に無関係な部分も θ' についての積分は (2)の積分と同じなので 結局 θ に無関係な ポテンシャルのみ考えればよい。

また境界条件も固定境界上で

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \;, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \qquad (3)$$

無限上，下流の検査面上では，

$$\phi \longrightarrow x \;, \qquad \cdots (4)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \psi \longrightarrow 0 & \text{上流} \\ \psi \longrightarrow 1 & \text{下流} \end{array}\right\} \cdots (5)$$

ψ については (1) の積分は羽根面についても考えねばならないので (actuator Disc) (5) の条件は別に不都合ではない。

Actuar Disc のポテンシャル ψ_A は Disc 後流側全体積上の積分と考えられ，

$$\psi_A = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\psi_A \, dS_A}{R} \;, \qquad \cdots (6)$$

$$\psi = \psi_A + \frac{1}{4\pi} \iint_S \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} \, dS \qquad (7)$$

さて円筒面 ($r=1$) 上で 法線速度が 0 となる

核関数 S を求めて見よう。

$$S(p,Q) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta'}{R} + A(p,Q), \quad \cdots\cdots (8)$$

とおいて 円筒内で 正則で次の条件を満たす A を求めれば

よい。

$$\frac{\partial}{\partial r}A(p,Q)\Big|_{r=1} = \frac{-1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta'}{R}\Big|_{r=1}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta'}{R} = \frac{K(k)}{\pi r_2}, \quad \cdots\cdots (10)$$

K は 楕円積分で

$$\left.\begin{aligned} &k^2 = 1-k'^2, \quad k'^2 = (r_1/r_2)^2, \\ &r_1^2 = (x-x')^2+(r-r')^2, \quad r_2^2 = (x-x')^2+(r+r')^2. \end{aligned}\right\}$$

また一方

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{R} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xt\, K_0(tr)\, I_0(tr')\, dt, \quad (11)$$

for $r > r'$, ($x'=0$ とおいてある)

と書けるから

$$A(p,Q) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xt\, F(t)\, I_0(tr')\, dt, \quad (12)$$

とおくと (9), (11) から

$$\frac{\partial}{\partial r}F(t)\, I_0(tr) = -\frac{\partial}{\partial r}K_0(tr)\, I_0(tr'),\Big|_{r=1}$$

つまり
$$\overline{H}(t) = \frac{K_1(t)}{I_1(t)} I_0(tr') , \quad \cdots\cdots (13)$$
であればよい.
$$A(p,Q) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xt \frac{I_0(tr')}{I_1(t)} K_1(t)\, dt , \quad (14)$$
この積分は $t=0$ の特異性から収束しないけれど
$$\frac{K_1(t)}{I_1(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{2}{t^2} , \quad \cdots\cdots (15)$$
であるから
$$\frac{\partial}{\partial x} A(p,Q) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\, dt = -1 , \quad (16)$$
それ故 あらためて
$$A(p,Q) = -x + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xt\, I_0(tr')\left(\frac{K_1(t)}{I_1(t)} - \frac{2}{t^2}\right) dt , \quad \cdots (17)$$
と定義しなおしてもよいが 微係数の積分は存在するので (14) のままの方が 数値積分は便利なので都合がよい。

そうすると (11) と合わせて.
$$S(p,Q) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xt\, I_0(tr')\left[K_0(tr) + I_0(tr)\frac{K_1(t)}{I_1(t)}\right] dt , \quad (17)$$
(10) を使えば $\qquad$ for $r > r'$,
$$S(p,Q) = \frac{1}{\pi r_2} K(k) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xt\, I_0(tr) I_0(tr') \frac{K_1(t)}{I_1(t)} dt , \quad (18)$$

この関数を使って無限遠方の検査面と円筒面で囲まれた領域（物体はないと考える）に $\phi = x$ として(1)を適用（点の所に S をおく）すると

$$x' = \int_{L_1+L_2} \left[x \frac{\partial S}{\partial x} - S \right] \kappa \, ds, \quad \cdots \quad (19)$$

ϕ に適用し固体表面の条件を入れると

$$\phi(Q) = \int_C \gamma\phi(p) \frac{\partial}{\partial n_p} S(p, Q)\, ds + \int_{L_1 + L_2} \left[\phi \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} S \right] \kappa \, ds, \quad (20)$$

この式において(4)の条件を考えて(19)を代入すると

$$\phi(Q) = x' + \int_C \gamma\phi(p) \frac{\partial}{\partial n_p} S(p, Q)\, ds_p, \quad \cdots \quad (21)$$

ds はここでは線素とする。

境界値問題はこのまゝこの式を C 上で積分方程式として解けばよい。