M-32

昭和48年11月25日

水面に浮ぶ弾性平板の動揺
(二次元，有限水深の場合)

別所正利

昭和　　年　　月　　日

序

有限水深の二次元動揺問題が無限水深の場合とどの程度異なるかについて以下に考察して見た。

結論的には定性的に何等異ならないと言えよう。

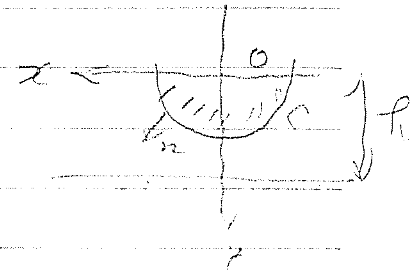
この事は浅水についても同じである*。

弾性平板とことわったのはあまり意味がない。ただその運動方程式を書き下して見ただけである。

つまりこのような場合も境界条件を適当な関数系に展開すれば剛体的な運動の場合と全く同様に運動方程式がたてられると言う事である。

*"浅い水面に浮ぶ平板の問題"

1. 速度ポテンシャル



圧力, 速度ポテンシャル, 表面変位
をそれぞれ

$$
\left.
\begin{aligned}
&P(x,y)e^{i\omega t},\\
&\varphi(x,y)e^{i\omega t},\\
&A(x)\,e^{i\omega t},
\end{aligned}
\right\}\qquad (1)
$$

とおくと

$$\frac{1}{\rho}P(x,0) = i\omega\,\varphi(x,0) + gA(x), \qquad (2)$$

$$\varphi_y(x,0) = -i\omega A(x), \qquad (3)$$

水面条件は　$K\varphi(x,0) + \varphi_y(x,0) = \dfrac{\omega}{i\rho g}P(x),$　(4)

水底条件は　$\varphi_y(x,h) = 0,$　(5)

振動の振幅を X_j としてそれによるポテンシャルを φ_j のようにおきそれを次のように正規化しておこう。

$$\varphi_j(x,y) = i\omega X_j\,\phi_j(x,y), \qquad (6)$$

C上の境界条件は

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_j}{\partial n} = -i\omega X_j n_j(x,y),\\
&\frac{\partial\phi_j}{\partial n} = -n_j(x,y),
\end{aligned}
\right\}\ \text{on } C, \qquad (7)
$$

とする。

(5)に対応して p, η, もそれぞれ

$$
\left.
\begin{aligned}
&P_j(x,y) = \rho g X_j\,p_j(x,y),\\
&A_j(x) = X_j\,\eta_j(x),
\end{aligned}
\right\}\qquad (8)
$$

とおくと (5), (3), (4) は

$$\phi_{dy}(x,0) = -\xi_y(x) \quad , \quad \cdots (9$$

$$K\phi_d(x,0) + \phi_{dy}(x,0) = -\phi_y(x,0), \quad (10)$$

となる。

$$\phi_{dy}(x,h) = 0 \quad , \quad \cdots (11)$$

xの正方向からの入射波を考えよう。

$$A_0(x) = a e^{ik_0x} \quad , \quad \cdots (12)$$

k_0は

$$K = k\tanh k_0 h \quad , \quad \cdots (13)$$

の実根である。

(10)式のような振幅aの正規波のポテンシャルは

$$\varphi_0(x,y) = \frac{iga}{\omega}\frac{\cosh k_0(h-y)}{\cosh k_0 h}e^{ik_0x} \quad , \quad (14)$$

となる。

よって、

$$\left.\begin{aligned} \phi_0(x,y) &= \frac{\cosh k_0(h-y)}{\cosh k_0 h}e^{ik_0x}, \\ \frac{iga}{\omega}\phi_0(x,y) &= \varphi_0(x,y), \\ \eta_0(x) &= K\phi_0(x,0) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

となる。

散乱ポテンシャルはやはり

$$\varphi_d(x,y) = \frac{iga}{\omega}\phi_d(x,y) \quad , \quad \cdots (16$$

と正規化すると境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n}(\phi_0 + \phi_d) = 0 \quad \text{on } C \quad , \quad (17)$$

となる。

従って　$X_0 = X_d = a/K$.

Q点で対数特異点を持ち(10)(11)を満足する(但し$p=0$)関数$S(P,Q)$ $(P\equiv(x,y),\ Q\equiv(x',y'))$は附録Aに示されているが、それを使うと一般に

$$\phi(P)=\int_C\{\phi_n(Q)S(P,Q)-\phi(Q)S_n(P,Q)\}ds(Q), \quad (18)$$

と表わされる。

特に水面の$(1,-1)$の上の圧力分布の場合は(10)により

$$\phi(P)=-\int_{-1}^{1}p(x')S(P,x')dx', \quad (19)$$

で与えられる。

さてSは$|x|\gg1$でA(25)より

$$S(P,Q)\xrightarrow[|x-x'|\gg1]{} iD\frac{\cosh k_0(h-y)\cosh k_0(h-y')}{\cosh^2 k_0h}e^{-ik_0|x-x'|}, \quad (20)$$

$$D=\frac{-k_0h}{(K^2-k_0^2)h^2-Kh}=1/[-\tanh k_0h+k_0h\,\mathrm{sech}^2 k_0h]$$

となるからϕは

$$\phi(P)\xrightarrow[\substack{x\gg1\\ \ll-1}]{}-iDH^{\pm}(k_0)\frac{\cosh k_0(h-y)}{\cosh k_0h}e^{\mp ik_0x}, \quad (21)$$

$$H^{\pm}(k_0)=-\int_C\left(\phi_n-\phi\frac{\partial}{\partial n}\right)\frac{\cosh k_0(h-y)}{\cosh k_0h}e^{\pm ik_0x}ds, \quad (22)$$

$$H^{\pm}(k_0)=\int_{-1}^{1}p(x)e^{\pm ik_0x}dx, \quad (23)$$

この時

$$\left.\begin{aligned}\eta(x)&\longrightarrow -iKDH^{\pm}(k_0)e^{\mp ik_0x},\\ A_j(x)&\longrightarrow -iKX_jDH^{\pm}(k_0)e^{\mp ik_0x},\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

2. 積分定理.

今2つのポテンシャル Φ_1, Φ_2 を考えるとグリーンの定理により直ちに

$$\int_C \Phi_1 \frac{\partial}{\partial n}\Phi_2 \, ds = \int_C \Phi_2 \frac{\partial}{\partial n}\Phi_1 \, ds, \quad \cdots (1)$$

なる関係がある事がわかる。

又圧力分布では p_1 に Φ_1, p_2 に Φ_2 が対応するとすると §1 (10) により直ちに

$$\int_{-1}^{1} p_1 \frac{\partial}{\partial y}\Phi_2 \, dx = \int_{-1}^{1} p_2 \frac{\partial}{\partial y}\Phi_1 \, dx, \quad \cdots (2)$$

が之られる。

又

$$\int_C \left(\Phi_1 \frac{\partial}{\partial n}\overline{\Phi_2} - \overline{\Phi_2}\frac{\partial}{\partial n}\Phi_1\right) ds$$

なる積分を考えると同じくグリーンの定理により無限遠方の検査面の積分が残って §1 (21) 式より,

$$\int_0^h \cosh^2 k_0(h-y)\, dy = \frac{1}{2}\int_0^h \{1+\cosh 2k_0(h-y)\}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[y - \frac{\sinh 2k_0(h-y)}{2k_0}\right] = \frac{1}{4k_0 h}\left[2k_0 h + \sinh 2k_0 h\right]$$

$$\frac{1}{\cosh^2 k_0 h}\int_0^h \cosh^2 k_0(h-y)\, dy = \frac{1}{2k_0 h}\left[k_0 h \,\mathrm{sech}^2 k_0 h + \tanh k_0 h\right]$$

$$= 1/\left[2k_0 h D\right], \quad \cdots (3)$$

となるから.

$$\int_C \left[\Phi_1 \frac{\partial}{\partial n}\overline{\Phi_2} - \overline{\Phi_2}\frac{\partial}{\partial n}\Phi_1\right] ds = i\frac{D}{2h}\left[H_1^+(k_0)\overline{H_2^+(k_0)} + H_1^-(k_0)\overline{H_2^-(k_0)}\right], \quad \cdots (4)$$

同様に

$$\int_{-1}^{1} \left(p_1 \frac{\partial}{\partial y}\overline{\Phi_2} - \overline{p_2}\frac{\partial}{\partial y}\Phi_1\right) dx = \frac{D}{2iKh}\left[\quad \text{〃} \quad\right], \quad \cdots (5)$$

3. 力について.

i-mode の運動による j-mode の一般力を

$$F_{ij} = -\int_c P_i(x,y)\, w_j(x,y)\, ds \quad , \quad \cdots\cdots (1)$$

と書こう。

この圧力には静水圧を含ませないことにし

$$P_i(x,y) = i\rho\omega\, \varphi_i(x,y) = -\rho\omega^2 X_i\, \phi_i(x,y) , \quad \cdots (2)$$

と理解し，この時 (1) は

$$F_{ij} = \rho\omega^2 X_i\, f_{ij} \quad , \quad \cdots\cdots (3)$$

$$f_{ij} = \int_c \phi_i\, w_j\, ds \, , \quad \cdots\cdots (4).$$

となる。

圧力分布の時は §1 (10) により.

$$f_{ij} = -\frac{1}{K}\int_{-1}^{1} \varphi_{iy}\, w_j\, dx - \frac{1}{K}\int_{-1}^{1} P_i\, w_j\, dx , \quad \cdots (5)$$

となる。

特に波による力は

$$E_j = -\int_c (P_0 + P_d)\, w_j\, ds \quad , \quad \cdots\cdots (6).$$

であって

$$E_j = \rho g a\, e_j \quad , \quad (7).$$

$$e_j = \int_c (\phi_0 + \phi_d)\, w_j\, ds , \quad \cdots (8)$$

となる。

圧力分布では §1 (16) と (17) により.

$$e_j = -\frac{1}{K}\int_{-1}^{1}\{p_0+p_d\}\, w_j\, dx, \quad \cdots \quad (9)$$

さて §2 の定理より.

$$f_{ij} = -\int_C \phi_i \phi_{jn}\, ds = -\int_C \phi_j \phi_{in}\, ds = f_{ji}, \quad \cdots (10)$$

又

$$\int_{-1}^{1} p_i w_j\, dx = f^*_{ij} \quad (11)$$

とおくと

$$f^*_{ij} = f^*_{ji}, \quad \cdots \quad (12)$$

又

$$\int_C p_d w_j\, ds = -\int_C \phi_d \phi_{jn}\, ds = -\int_C \phi_j \phi_{dn}\, ds = \int_C \phi_j \phi_{0n}\, ds$$

であるから §1 (22) 式により

$$e_j = \int_C (\phi_j \phi_{0n} - \phi_0 \phi_{jn})\, ds = -H_j^+(k_0), \quad \cdots (13)$$

なる Haskind の関係を得る.

これは圧力分布でも同じ式でよい。

次に

w_j : real

としておくと §2 (4) により,

$$\bar{f}_{ji} - f_{ij} = \bar{f}_{ij} - f_{ij} = \frac{iD}{2h}\left[H_i^+ \bar{H}_j^+ + H_i^- \bar{H}_j^-\right], \quad (14)$$

同様に

$$\bar{f}^*_{ij} - f^*_{ij} = \frac{D}{2iKh}\left[\quad 〃 \quad\right], \quad (15)$$

さて C が左右対称な場合 対称運動では H_j は §1 (22) から

$$H_j^+(k_0) = H_j^-(k_0), \qquad (16)$$

又反対称運動では

$$H_j^+(k_0) = -H_j^-(k_0), \qquad (17)$$

となる。

今(14)は i と j を入れかえても相反性から同じになるので

$$H_i^+\overline{H_j^+} + H_i^-\overline{H_j^-} = H_j^+\overline{H_i^+} + H_j^-\overline{H_i^-}, \qquad (18)$$

これに (16), (17) を夫々代入すると

$$H_i^+\overline{H_j^+} = H_j^+\overline{H_i^+}, \text{ or } \frac{\overline{H_j^+}}{H_j^+} = \frac{\overline{H_i^+}}{H_i^+}, \qquad (19)$$

をうる。なお i と j は共に対称又は反対称でなければならない。

次に §2 (14) において ϕ_1 に ϕ_d, ϕ_2 に ϕ_j を代入すると

$$\int_C (\phi_d\overline{\phi_{jn}} - \overline{\phi_j}\phi_{dn})ds =$$

$$= \int_C \left[(\phi_0+\phi_d)\overline{\phi_{jn}} - (\phi_0\overline{\phi_{jn}} - \overline{\phi_j}\phi_{0n})\right]ds$$

$$= H_j^+(k_0) - \overline{H_j^-(k_0)} = \frac{iD}{2h}\left[H_d^+\overline{H_j^+} + H_d^-\overline{H_j^-}\right], \qquad (20)$$

よって

対称運動では (16) により

$$H_j^+ - \overline{H_j^+} = \frac{iD}{2h}\left[H_d^+ + H_d^-\right]\overline{H_j^+}, \qquad (21)$$

反対称運動では (17) により

$$H_j^+ + \overline{H_j^+} = \frac{iD}{2h}\left[H_d^+ - H_d^-\right]\overline{H_j^+}, \qquad (22)$$

なお
$$H_d^{\pm}(k_0) = \int_c \left(\phi_d \phi_{0n}^{\pm} - \phi_0^{\pm}\phi_{dn}\right) ds \quad , \qquad (23)$$

但し　$\phi_0^+ \equiv \phi_0, \quad \phi_0^- = \overline{\phi_0}$,

そこで(20)において さらに $j=d$ とおくと．

$$\int_c \left(\phi_d \overline{\phi_{dn}} - \overline{\phi_d}\, \phi_{dn}\right) ds = \int_c \left(\overline{\phi_d}\, \phi_{0n}^+ - \phi_d \phi_{0n}^-\right) ds.$$

$$= \int_c \left[\overline{\left(\phi_d \overline{\phi_{0n}^-} - \overline{\phi_0^-}\phi_{dn}\right)} - \left(\phi_d \phi_{0n}^- - \phi_0^- \phi_{dn}\right)\right] ds.$$

何となれば $\overline{\phi_0^- \phi_{dn}} - \overline{\phi_0^-}\,\overline{\phi_{dn}} = \overline{\phi_0^-}\,\overline{\phi_{0n}^+} - \phi_0^- \phi_{0n}^+ = \phi_0^+ \phi_{0n}^- - \phi_0^- \phi_{0n}^+$

となり　$\int_c \left(\phi_0^+ \phi_{0n}^- - \phi_0^- \phi_{0n}^+\right) ds = 0$.

この左辺の積分は無限遠方の検査面の積分とする事が出来るが左方の面のそれと右方のそれが打消し合うからである。

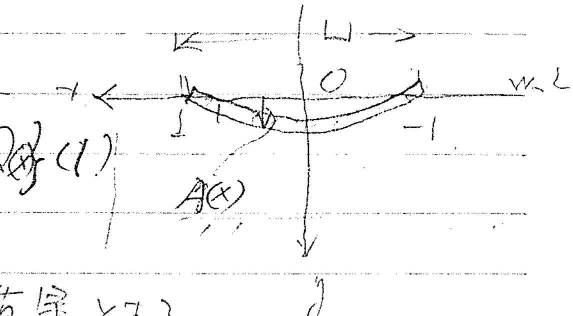
よって．

$$\overline{H_d^-(k_0)} - H_d^-(k_0) = \frac{iD}{2k}\left[H_d^+ \overline{H_d^+} + H_d^- \overline{H_d^-} \right], \qquad (24)$$

を得る。

4. 運動方程式

運動方程式は、



$$EI\frac{d^4}{dx^4}A(x) - m\omega^2 A(x) = -\{P(x)+Q(x)\} \quad (1)$$

EIは曲げ剛性、mは梁の質量とする。
またP(x)には静止時の浮力は含めないものとする。Q(x)は外力
今適当な振幅Xによって§1のように正規化すると

$$\left.\begin{aligned} &P(x) = \rho g X p(x),\quad Q(x) = \rho g X q(x) \\ &A(x) = X\eta(x) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\varepsilon\frac{d^4}{dx^4}\eta(x) - \alpha K\eta(x) = -\{p(x)+q(x)\} \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{EI}{\rho g},\quad \alpha = \frac{m}{\rho},\quad K = \frac{\omega^2}{g} \quad (4)$$

とおけ §1 (9), (10) により

$$\left.\begin{aligned} &\phi_y(x,0) = -\eta(x) \\ &K\phi(x,0) - \eta(x) = -p(x) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

であるから $p(x)$ を消去すると

$$\varepsilon\frac{d^4}{dx^4}\eta(x) - \alpha K\eta(x) + \eta(x) = K\phi(x,0) - q(x), \quad (6)$$

を得る。
いずれにしても (3)と(5) あるいは (5)と(6) の聯立方程式を解いて解が求められる事になる。
　$q(x)$は強制動揺の場合例えば原点で上下に集中強制力を加えるならば

$$q(x) = \delta(x), \quad (7)$$

となり，その方向からの入射波によって動揺するならば

$$g(x) = p_0(x) + p_d(x), \quad \cdots \quad (8)$$

但し $X = a/K$,

となる。

(5)の後の式は §1 (19)により

$$\eta(x) = p(x) - K\int_{-1}^{1} p(x') S(x,0;x',0)\,dx', \quad (9)$$

であるから，これと(3)から p 又は η を消去すると，かなり複雑な微積分方程式をうる。

なお浮体自由端を有するものとすれば，さらに

$$\frac{d^2}{dx^2}\eta(x) = \frac{d^3}{dx^3}\eta(x) = 0 \quad \text{for } x = \pm 1, \quad (10)$$

形式的には次のように解ける。

まず

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x), \quad \cdots \quad (11)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} u_0(x) &= 1/\sqrt{2} \\ u_1(x) &= x\sqrt{\tfrac{3}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

其他は

$$\varepsilon \frac{d^4}{dx^4} u_n(x) - \alpha K_n u_n(x) = 0, \quad \cdots \quad (13)$$

の解とする。(附録B)

$K_n = \omega_n^2/g$,　ω_nは固有円振動数である。

又

$$\int_{-1}^{1} u_n(x) u_m(x)\,dx = \delta_{n,m}, \quad \cdots \quad (14)$$

と正規化しておく。

又 $u_n(x)$ に対する(9)の解を $p_n(x)$ としよう。

そうすると(3)式は

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (K_n - K) c_n u_n(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) - g(x), \quad (15)$$

となる。

よって、$u_n(x)$をかけて積分すると

$$\alpha(K_n-K)C_n=-\sum_{m=0}^{\infty}C_m\int_{-1}^{1}p_m(x)u_n(x)\,dx-\int_{-1}^{1}g(x)u_n(x)\,dx, \quad (16)$$

§3(14)の記法を使えば

$$\alpha(K_n-K)C_n+\sum_{m=0}^{\infty}C_m f_{m,n}^{*}=-\int_{-1}^{1}g(x)\,u_n(x)\,dx, \quad (17)$$

となり、gとして(17)を代入すれば

$$\int_{-1}^{1}g(x)u_n(x)\,dx=u_n(0), \quad \text{---} \quad (18)$$

(8)を代入すれば §3,(9),(13)により

$$\int_{-1}^{1}g(x)u_n(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(p_0+p_d)\,u_n(x)\,dx=KH_n^{+}(k_0), \quad (19)$$

をうる。

従って $f_{m,n}^{*}$, H_n^{+} がわかっていれば C_nは(17)から求められる。

この時外に出て行く波の振幅は 強制動揺の場合 §1 (24)により

$$\text{ゆ}H^{\pm}(k_0)=KD\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n^{\pm}(k_0), \quad \cdots \quad (20)$$

波浪中動揺の場合はこれに更に散乱波と入射波が加わるので xの正方向への反射波の振幅は

$$R=-iaD\left[H_d^{+}(k_0)+\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n^{+}(k_0)\right], \quad \text{for } x\to\infty, \quad (21)$$

xの負方向への振幅は入射波も含めて

$$T=a-iaD\left[H_d^{-}(k_0)+\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n^{-}(k_0)\right], \quad \text{for } x\to-\infty, \quad (22)$$

と与えられる。

昭和　　年　　月　　日

或るいは

$$R+T = a - iaD\left[H_a^{+} + H_a^{-} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \{H_n^{+} + H_n^{-}\}\right],$$

$$T-R = a - iaD\left[H_a^{-} - H_a^{+} + \sum c_n \{H_n^{-} - H_n^{+}\}\right]$$

となる。

nが偶数~~奇~~数に従って、変動は対称反対称となるから

§3 (16), (17), (21), (22) により

$$R+T = a - iaD\left[\frac{H_j^{+} - \overline{H_j^{-}}}{iDH_j^{+}} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} H_{2n}^{+}\right], \quad j \neq 2n \qquad (23)$$

$$T-R = a - iaD\left[\frac{H_j^{+} + \overline{H_j^{+}}}{iDH_j^{+}} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} H_{2n+1}^{+}\right], \quad j \neq 2n+1. \qquad (24)$$

jは任意の値でよい。

5. 境界値問題

圧力分布に対する境界値問題は §1.(7)(10) によって

$$w(x) = -\phi_y(x,0) = p(x) + K\phi(x,0), \quad \cdots (1)$$

で無限水深の場合と同じである。(§4 (9))

ただし

$$\phi(x,0) = -\int_{-1}^{1} p(x') S(x,x') dx', \quad \cdots (2)$$

しかし流れ関数を導入すると (C.f. A)

$$\psi(x,0) = -\int_{-1}^{1} p(x') T(x,x') dx', \quad \cdots (3)$$

$\phi_y = -\psi_x$ であるから (1) より

$$w(x) = \psi_x(x,0), \quad \cdots (4)$$

あるいは

$$W(x) = \psi(x,0) \quad \cdots (5)$$

$$W(x) = \int_0^x w(x)\,dx + Const. \quad (6)$$

(5) 式の形において T は有限部分の関数であるから数値計算が楽であろう。

又 (6) の定数に対応する斉次解は平板の away に対応する解と考えられる。

さて (5) を実部と虚部にわけてとくと散乱ポテンシャルと発散ポテンシャルの間には §2 のような関係があるので簡単になる事はすでに見た通りである。

この場合前節で見たように w の直交系 u_j に対する
すべての解が必要であるがその時散乱ポテンシャル
は更にこれらで表わせるので結局散乱ポテン
シャルは解く必要がない事になる。

即ち今附録Aの $u_j^{(4)}(x)=\lambda_j u_j(x)$ と u_0, u_1
の解を $p_j(x)$ とすると散乱ポテンシャルにおいては

$$w_d = -\frac{\partial}{\partial y}\phi_d = +\frac{\partial}{\partial y}\phi_0 = \cancel{k_0 \tanh k_0 h}\, e^{ik_0 x} = -K e^{ik_0 x}, \quad (7)$$

であるが w_d は $u_n(x)$ に次のように展開出来る。

$$w_d = -K\sum_{j=0}^{\infty} I_j u_j(x), \quad (8)$$

$$I_j = -\frac{1}{K}\int_{-1}^{1} w_d u_j \, dx = \int_{-1}^{1} u_j(x) e^{ik_0 x} dx, \quad (9)$$

ここに I_j $(j\geq 2)$ は部分積分により $u_j''(\pm 1) = u_j'''(\pm 1) = 0$ を考慮すれば

$$I_j = -\frac{k_0^2}{\lambda_j}\int_{-1}^{1} u_j'' e^{ik_0 x} dx, \quad (10)$$

$$I_j = \frac{k_0^2}{\lambda_j - k_0^4}\left[(ik_0 u_j - u_j')e^{ik_0 x}\right]_{x=-1}^{1}, \quad (11)$$

よって　$$p_d(x) = -K\sum_{j=0}^{\infty} I_j p_j(x), \quad (12)$$

これから…

$$\int_{-1}^{1} p_d u_j \, dx = \int p_j w_d \, dx = -K\int_{-1}^{1} p_j e^{ik_0 x} dx = -K H_j^{+}(k_0)$$

故に §2 (11)式より

$$H_j^+(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i f_{ij}^* \quad , \cdots (13)$$

但し

$$f_{ij}^* = \int_{-1}^{1} p_i u_j \, dx = f_{ji}^* \quad (14)$$

と成るから

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}^* u_j(x) \quad , \cdots (15)$$

なる関係があるので $p(x)$ を $u_j(x)$ に展開して解いておけば便利である。

なお §2 (5) の f_{ij} は

$$f_{ij} = + \frac{\delta_{ij}}{k} - \frac{1}{k} f_{ij}^* \quad , \cdots (16)$$

となる。

又 (10) からわかるように

$$p(x) = u_j(x) + \frac{h_0^2}{\lambda_j} u_j''(x) \quad , \cdots (17)$$

なる圧力分布は波なしとなるので $h_0/\sqrt{\lambda_j} \ll 1$ ならば $p \fallingdotseq u_j$ となるから p_i $(i \geq 2)$ は波が小さいと考えられる。

又

$$w(x) = \delta(x-\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) u_n(\xi) \quad , (18)$$

に対する圧力は

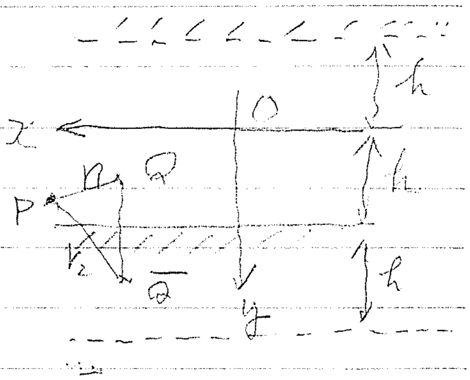
$$p^\delta(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\xi) p_n(x) = p^\delta(\xi,x) \quad , (19)$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} p^\delta(x,\xi) u_n(x) \, dx = p_n(\xi) \quad , (20)$$

$$\therefore f_{n,m}^* = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} p^\delta(x,\xi) u_n(x) u_m(\xi) \, dx \, d\xi \quad , (21)$$

昭和　　年　　月　　日

附録A　核関数



$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + K\right) S(P,Q) = 0, \text{ for } y=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} S(P,Q) = 0 \text{ for } y=h, \quad (2)$$

$$P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y')$$

(1), (2)を満足し $P=Q$ で対数的特異点を持つ関数 S をもとめよう。

先づ

$$S(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\log(r_1 r_2) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(k) e^{-kh} \cosh k(h-y) \cosh k(h-y') \cos k(x-x') \frac{dk}{k}, \quad (3)$$

とおいて見よう。　$r_1 = \overline{PQ}$, $r_2 = \overline{P\bar{Q}}$

そして (1) によって $F(k)$ を決めよう。

さて

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\log r_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-k(y'-y)} \cos k(x-x')\, dk, \quad \text{for } y'>y,$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\log r_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-k(2h-y-y')} \cos k(x-x')\, dk, \quad \text{for } (y+y')<2h,$$

であるから形式的に

$$\frac{1}{2\pi}\log r_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-k(y'-y)} \cos k(x-x') \frac{dk}{k}, \quad \text{for } y'>y,$$

$$\frac{1}{2\pi}\log r_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-k(2h-y-y')} \cos k(x-x') \frac{dk}{k}, \quad \text{for } 2h>y+y',$$

この積分は下限を0とすると存在しないので適当な所で止めて処置しなければならぬが議論の結果には変りはないのでとりあえずこの儘使い後で処置する。

これらの展開を(3)式に入れて(1)の条件を考えると、

$$\frac{1}{2\pi}\log r_1 r_2 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-kh+ky}\cosh k(h-y')\cos k(x-x')\frac{dk}{k},$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\log r_1 r_2 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-kh+ky}\cosh k(h-y')\cos k(x-x')\frac{dk}{k},$$

故、

$$S_y + KS = \int_0^\infty \frac{dk}{k} e^{-kh}\cosh k(h-y')\cos k(x-x') \times$$

$$\times\left[-(k+K)e^{ky} - \{k\sinh k(h-y) - K\cosh k(h-y)\}F(k)\right],$$

となるから $y=0$ で (1) が成立つ為には

$$F(k) = (k+K)/\left[K\cosh kh - k\sinh kh\right], \quad \cdots(4)$$

であればよい。

このまゝでは (3) の右辺第2項の積分は $k=0$ で積分出来ないので

$$\frac{K+k}{K\cosh kh - k\sinh kh} = \frac{1}{\cosh kh} + \frac{k(1+\tanh kh)}{K\cosh kh - k\sinh kh}$$

$$= \frac{1}{\cosh kh} + \frac{k\,e^{kh}}{(K\cosh kh - k\sinh kh)\cosh kh}, \quad (5)$$

である事を考えると (3) は

$$S(P,Q) = I + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cosh k(h-y)\cosh k(h-y')\cos k(x-x')}{(K\cosh kh - k\sinh kh)\cosh kh}\,dk, \quad (6)$$

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-kh}\cosh k(h-y')\cos k(x-x')\frac{dk}{k}\times$$

$$\times\left[\frac{\cosh k(h-y)}{\cosh kh} - e^{ky}\right],$$

右辺第2項は対数項である。

又で $\cosh k(h-y) - e^{ky}\cosh kh = -e^{kh}\sinh ky,$

となるから

$$I = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sinh ky}{\cosh kh}\cosh k(h-y')\cos k(x-x')\frac{dk}{k}, \qquad (7)$$

となり、この式から I は $y=0$ で 0 となる項である事がわかる。I の儘では積分が存在しないのでそれを y を微分したものを積分して見よう。

$$I_y = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cosh ky}{\cosh kh}\cosh k(h-y')\cos k(x-x')\,dk$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\cos k(x-x')}{(1+e^{-2kh})}\Big[e^{k(y-y')}+e^{-k(y+y')} + e^{-2kh}\{e^{k(y+y')}+e^{-k(y-y')}\Big], \qquad (8)$$

と書けるが

$$\frac{1}{1+e^{-2kh}} = \sum_{n=0}^\infty (-)^n e^{-2nhk},$$

であるから例えば

$$\int_0^\infty \frac{e^{-k(y'-y)}\cos k(x-x')}{1+e^{-2kh}}dk = \sum_{n=0}^\infty (-)^n \int_0^\infty e^{-k(y'-y)-2nkh}\cos k(x-x')\,dk$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-)^n(y'-y+2nh)}{(x-x')^2+(y'-y+2nh)^2} = \mathcal{I}\left[\sum_{n=0}^\infty \frac{(-)^n}{z-z'-2nhi}\right]$$

$$z = x+iy,\quad z' = x'+iy'$$

となるので

$$I_y = -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^\infty (-)^n\left[\frac{y'-y+2nh}{(x-x')^2+(y'-y+2nh)^2}+\frac{y'+y+2nh}{(x-x')^2+(y'+y+2nh)^2}\right], \qquad (9)$$

となるが

$$\frac{1}{\sin t} = \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{(-)^n}{t-n\pi},$$

なる定理があるので

$$\frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2h}z} = \frac{2h}{\pi}\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{(-)^n}{z-2nhi}$$

$$\mathcal{I}\left\{\frac{\pi}{2h\sinh(\frac{\pi z}{2h})}\right\} = \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{(-)^n(2nh-y)}{x^2+(y-2nh)^2},$$

これを利用して

$$I_y = -\frac{1}{4h}\,\mathcal{I}\left[\frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2h}(z-z')} - \frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2h}(z-\bar{z}')}\right], \quad (10).$$

yで積分して.

$$I = \frac{1}{2\pi} Re \log\left[\frac{\tanh\frac{\pi}{4h}(z-z')}{\tanh\frac{\pi}{4h}(z-\bar{z}')}\right], \quad \cdots (11).$$

$$z = x+iy, \quad z' = x'+iy'$$

を得る。

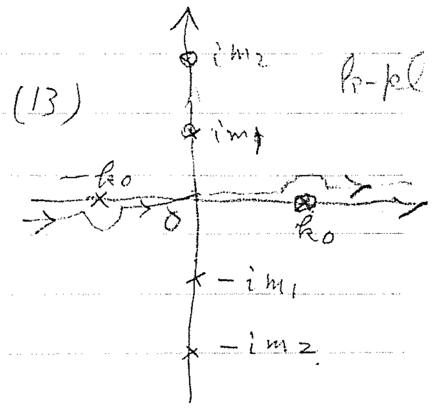
次に.

$$S(P,Q) = I + S_1(P,Q), \quad \cdots (12).$$

とおいて S_1 について考えよう。

S_1 の被積分関数は k の偶関数であるから

$$S_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cosh k(h-y)\cosh k(h-y')\cos k(x-x')}{(K\cosh kh - k\sinh kh)\cosh kh}\,dk, \quad (13)$$



とも書ける。

特異点はすべて1位の極で

$$K = k\tanh kh, \quad \cdots (14)$$

の根 k の点であるから 実軸上には $(\pm k_0)$, 虚軸上には $\pm im_n$ と無限個ある。

$$\left.\begin{aligned} K &= k_0\tanh(k_0 h), \\ K &= -m_n\tan(m_n h), \end{aligned}\right\} \cdots (15)$$

Sのもう一つの条件として 波が外に出て行くと言うのを満足するには 実軸上の極を図のようによける積分路をとるべきである。

もう一群の特異点は 分母の cosh kh の零点で

$$k = \pm \frac{i\pi}{2h}(2n+1) \quad \text{for } n=0,1,2,\dots \qquad (16)$$

である。

そこで

$$S_1 = I_1 + S_2 \qquad (17)$$

とおいて I_1 を (16) による項, S_2 を (14), (15) によるものとすると,

まず I_1 は

$$\sinh k_n h = \pm i(-)^n$$

であるから

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\{\frac{\pi}{2h}(2n+1)y\}\sin\{\frac{\pi}{2h}(2n+1)y'\}}{(2n+1)}e^{-\frac{\pi}{2h}(2n+1)(x-x')}, \qquad (18)$$

for $x>x'$

を得るが I を求めた時と同様に

$$\frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2h}z} = 2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{2h}(2n+1)z}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi}{2h}z(2n+1)}}{2n+1} = -\frac{1}{2}\log\left(\tanh\frac{\pi z}{4h}\right)$$

であるから

$$I_1 = \frac{1}{4\pi}\log\left[\frac{\tanh\frac{\pi}{4h}(z-\bar{z}')\tanh\frac{\pi}{4h}(\bar{z}-z')}{\tanh\frac{\pi}{4h}(z-z')\tanh\frac{\pi}{4h}(\bar{z}-\bar{z}')}\right], \qquad (19)$$

$$\text{or} \quad I_1 = Re\,\frac{1}{2\pi}\log\left[\frac{\tanh\frac{\pi}{4h}(z-\bar{z}')}{\tanh\frac{\pi}{4h}(z-z')}\right] = -I,$$

よって

$$S(P,Q) = S_2(P,Q), \qquad (20)$$

次に S_2 は

$$\frac{d}{dk}(K\cosh kh - k\sinh kh) = (Kh-1)\sinh kh - kh\cosh kh$$

で (14) を代入すると

$$\frac{d}{dk}(K\cosh kh - k\sinh kh) = \frac{1}{k}\{(K^2-k^2)h - K\}\cosh kh, \quad (21)$$

であるから

$$S = S_2 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_n\cos m_n(h-y)\cos m_n(h-y')}{[(K^2+m_n^2)h-K]\cos^2 m_nh}e^{-m_n|x-x'|}$$

$$-i\frac{k_0\cosh k_0(h-y)\cosh k_0(h-y')}{[(K^2-k_0^2)h-K]\cosh^2 k_0h}e^{-ik_0|x-x'|}, \quad \cdots(22)$$

をうる。

特に $y=y'=0$ では

$$S(P,Q)|_{y=y'=0} = S_2(P,\bar{Q})|_{y=y'=0}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_n e^{-m_n|x-x'|}}{[(K^2+m_n^2)h-K]} - \frac{i\,k_0 e^{-ik_0|x-x'|}}{[(K^2-k_0^2)h-K]}, \quad (23)$$

のように簡単となる。

又よく知れているように (15) の根は

$h\to\infty$ では　　$k_0 \doteqdot K$, $\cdots\cdots$ (24)

m_n については　　$m_nh = \frac{\pi}{2}(2n-1)+\delta_n$, $n=1,2,3\cdots$

とおくと　　$Kh = (n\pi - \frac{\pi}{2}+\delta_n)\cot\delta_n$

故

$$\therefore \delta_n \doteqdot \frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{Kh}$$

$$m_n \doteqdot \frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{h}\left(1+\frac{1}{Kh}\right), \quad \cdots\cdots(25)$$

昭和　　年　　月　　日

$h \to 0$ では
$$k_0 \doteqdot \sqrt{\frac{K}{h}} = \frac{\omega}{\sqrt{gh}} \;, \quad (26)$$

m_n は
$$m_n = n\pi - \delta_n \;, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$
とおくと
$$Kh = (n\pi - \delta_n)\tan\delta_n \;,$$
となるから
$$\delta_n \doteqdot \frac{Kh}{n\pi}$$
$$m_n \doteqdot \frac{n\pi}{h} - \frac{K}{n\pi} \;, \quad (27)$$
となる。

S そのものの $h \to 0$ or $h \to \infty$ の極限は (11), (12), (13) から

$$S(P,Q) \xrightarrow[h\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\log\left(\frac{z-z'}{z-\bar{z}'}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}\cos k(x-x')}{K-k}\,dk \;, \quad (28)$$

この場合 k-plane の極が左右対称とならないので
このような表示になる。

$h \to 0$ では
$$S(P,Q) \xrightarrow[P\neq Q]{h\to 0} +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos k(x-x')}{K-k^2h}\,dk = -\frac{e^{-ik_0|x-x'|}}{2hk_0} \;, \quad (29)$$
$$k_0 = \omega/\sqrt{gh} \;,$$

となって特異点は消えてしまう形になり具合が悪い
ので $h \to 0$ の極限では別の浅水近似*
として扱うのがよかろう。

なお $|x-x'| \to \infty$ では (22) から明らかなように

$$S(P,Q) \xrightarrow[|x-x'|\gg 1]{} \frac{-ik_0\, e^{-ik_0|x-x'|}}{[(K^2-k_0^2)h-K]} \times \frac{\cosh k_0(h-y)\cosh k_0(h-y')}{\cosh^2 k_0 h} \;; \quad (30)$$

で他の項は指数的に減衰する。

* J. J. Stoker "Water Waves"

昭和　年　月　日

S は $P=Q$ で対数的特異点を有するので数値計算では その共役関数 T を使うのが便利である。今

$$S_x(P,Q) = T_y(P,Q)$$
$$S_y(P,Q) = -T_x(P,Q), \quad \cdots\cdots (31)$$

のような T を求めると，直ちに

$$T(P,Q) = \Bigg[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n \sin m_n(h-y) \cos m_n(h-y') e^{-m_n|x-x'|}}{[(K^2+m_n^2)h-K]\cos^2 m_n h} + \frac{k_0 \sinh k_0(h-y) \cosh k_0(h-y') e^{-ik_0|x-x'|}}{[(K^2-k_0^2)h-K]\cosh^2 k_0 h} \Bigg] \operatorname{sgn}(x-x'),$$

(32)

とくに

$$T(P,Q)\Big|_{y=y'=0} = K\Bigg[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-m_n|x-x'|}}{[(K^2+m_n^2)h-K]} + \frac{e^{-ik_0|x-x'|}}{[(K^2-k_0^2)h-K]}\Bigg] \operatorname{sgn}(x-x'),$$

$\cdots\cdots$ (33)

よって

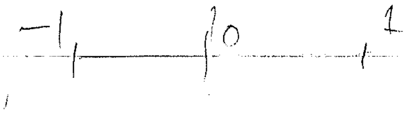
$$T\Big|_{\substack{y=y'=0 \\ x\to x'}} = K\Bigg[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(K^2+m_n^2)h-K} + \frac{1}{(K^2-k_0^2)h-K}\Bigg] \operatorname{sgn}(x-x'),$$

(34)

となって $x=x'$ で jump があり，$(x-x')$ に関し奇関数である。

附録B　梁の撓み振動の正規関数*

$$\frac{d^4}{dx^4}\eta(x) - \left(\frac{m}{2}\right)^4 \eta(x) = 0, \quad \cdots (1)$$



$$K_n L = \frac{\omega_n^2}{g} L = \left(\frac{EI}{wL^2}\right) m_n^4, \quad \cdots (2)$$

$\underline{L = 2}$

正規関数の正規化直交系を $u_n(x)$ とすると

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 1/\sqrt{2}, \\ u_1 &= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x, \end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned} u_{2n}(x) &= A_{2n} \cos \frac{m_{2n}}{2} x + B_{2n} \cosh \frac{m_{2n}}{2} x, \\ u_{2n+1} &= A_{2n+1} \sin \frac{m_{2n+1}}{2} x + B_{2n+1} \sinh \frac{m_{2n+1}}{2} x, \end{aligned}\right\} (4)$$

$$u_n''(\pm 1) = u_n'''(\pm 1) = 0, \quad \cdots (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_{2n}}{A_{2n}} &= \frac{\cos \frac{m_{2n}}{2}}{\cosh \frac{m_{2n}}{2}} = -\frac{\sin \frac{m_{2n}}{2}}{\sinh \frac{m_{2n}}{2}}, & B_{2n} &= \frac{1}{\sqrt{2} \cosh \frac{m_{2n}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{e^{\mu} + e^{-\mu}} \\ \frac{B_{2n+1}}{A_{2n+1}} &= -\frac{\sin \frac{m_{2n+1}}{2}}{\sinh \frac{m_{2n+1}}{2}} = \frac{\cos \frac{m_{2n+1}}{2}}{\cosh \frac{m_{2n+1}}{2}}, & B_{2n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2} \sinh \frac{m_{2n+1}}{2}} \end{aligned}\right\} \cdots (6)$$

固有値方程式は

$$\left.\begin{aligned} \tan \frac{m_{2n}}{2} &= -\tanh \frac{m_{2n}}{2}, \\ \tan \frac{m_{2n+1}}{2} &= \tanh \frac{m_{2n+1}}{2}, \\ \text{or} \quad \cos m_n \cosh m_n &= 1. \end{aligned}\right\} (7)$$

$\mu = \frac{m}{2}$

---

* チモシェンコ；工業振動学

昭和　年　月　日

~~$\int_{-1}^{1} u_n^2 dx = 1$~~ となるように A_n を決めよう。

$$\int_{-1}^{1} u_{2n}^2 dx = A_{2n}^2\left(1+\frac{\sin m}{m}\right) + B_{2n}^2\left(1+\frac{\mathrm{sh}\, m}{m}\right) + \frac{4AB}{m}\left(\mathrm{sh}\frac{m}{2}\cos\frac{m}{2} + \mathrm{ch}\frac{m}{2}\sin\frac{m}{2}\right)$$

$$= A_{2n}^2\left[1+\frac{\sin m}{m} + \frac{\cos^2\frac{m}{2}}{\mathrm{ch}^2\frac{m}{2}}\left(1+\frac{\mathrm{sh}\, m}{m}\right)\right].$$

$$= A_{2n}^2\left[1+\frac{\sin m}{m} + \cos m\left(1+\frac{\mathrm{sh}\, m}{m}\right)\right] = 1.$$

$$\tan m = \frac{2\tan\frac{m}{2}}{1-\tan^2\frac{m}{2}} = \frac{-2\,\mathrm{th}\frac{m}{2}}{1-\mathrm{th}^2\frac{m}{2}} = -\mathrm{sh}\, m$$

$$\therefore\ A_{2n}^2 = \frac{1}{1+\cos m} = \frac{1}{2\cos^2\frac{m_{2n}}{2}},\quad A_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{m_{2n}}{2}},\qquad (8)$$

$$\int_{-1}^{1} u_{2n+1}^2 dx = A_{2n+1}^2\left(1-\frac{\sin m}{m}\right) + B_{2n+1}^2\left(\frac{\mathrm{sh}\, m}{m}-1\right) + \frac{4}{m}AB\left(\sin\frac{m}{2}\mathrm{ch}\frac{m}{2} - \cos\frac{m}{2}\mathrm{sh}\frac{m}{2}\right)$$

$$= A_{2n+1}^2\left[1-\frac{\sin m}{m} + \cos m\left(\frac{\mathrm{sh}\, m}{m}-1\right)\right] = 1.$$

$$\tan m = \frac{2\tan\frac{m}{2}}{1-\tan^2\frac{m}{2}} = \mathrm{sh}\, m.$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ A_{2n+1}^2 &= \frac{1}{1-\cos m} = \frac{1}{2\sin^2\frac{m_{2n+1}}{2}} \\ A_{2n+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{m_{2n+1}}{2}}, \end{aligned}\right\} \cdots (9)$$

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= \overset{2.36502}{4.73004} \\ m_3 &= \overset{3.92660}{7.85320} \\ m_4 &= \overset{5.49781}{10.99561} \\ m_5 &= \overset{7.068859}{14.137177} \end{aligned}\right\} \frac{m_2}{2} = 2. \qquad (10).$$

$\vdots$

$$m_n \doteqdot \frac{1}{2}(2n-1)\pi$$

昭和　　年　　月　　日.

$$\cancel{h f_{n,m} = \left(\frac{2}{m_n}\right)^4 \int_{-1}^{1} u_n'' u_m\,dx} \quad , \ldots\ldots (11)$$

$$h f_{2n,2m} = \left(\frac{2}{m_{2n}}\right)^2 \int_{-1}^{1} (-A_n \cos nx + B_n \operatorname{ch} nx)(A_m \cos mx + B_m \operatorname{ch} mx)\,dx .$$

$$n = \frac{m_{2n}}{2}, \quad m = \frac{m_{2m}}{2}.$$

$$= \frac{1}{n^2}\int_{-1}^{1} (-u_n + 2B_n \operatorname{ch} nx)\, u_m\,dx = -\frac{\delta_{n,m}}{n^2} + 2\frac{B_n}{n^2}\int \operatorname{ch} nx\, u_m\,dx .$$

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{ch} nx \cos mx\,dx = \frac{2\operatorname{sh} n}{n}\cos m + \frac{m}{n}\int_{-1}^{1} \operatorname{sh} nx \sin mx\,dx$$

$$= \frac{2}{n}\operatorname{sh} n \cos m + \frac{2m}{n^2}\operatorname{ch} n \sin m - \frac{m^2}{n^2}\int_{-1}^{1} \operatorname{ch} nx \cos mx\,dx$$

$$= \frac{2}{n^2+m^2}(n \operatorname{sh} n \cos m + m \operatorname{ch} n \sin m).$$

$$= \frac{2\operatorname{ch} n \cos m}{n^2+m^2}(n \operatorname{th} n + m \tan m)$$

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{ch} nx \operatorname{ch} mx\,dx = \frac{2\operatorname{sh} n \operatorname{ch} m}{n} - \frac{m}{n}\int \operatorname{sh} nx \operatorname{sh} mx\,dx .$$

$$= \frac{2}{n}\operatorname{sh} n \operatorname{ch} m - \frac{2m}{n^2}\operatorname{ch} n \operatorname{sh} m + \frac{m^2}{n^2}\int \operatorname{ch} nx \operatorname{ch} mx\,dx$$

$$= \frac{2\operatorname{ch} n \operatorname{ch} m}{n^2-m^2}\left[n \operatorname{th} n - m \operatorname{th} m\right] \xrightarrow[n=m]{} 1 + \frac{\operatorname{sh} n \operatorname{ch} n}{n}$$

$$h f_{2n,2m} = -\frac{\delta_{n,m}}{n^2} + \frac{4}{n^2}\sqrt{2}\left[\frac{1}{n^2+m^2}(n \operatorname{th} n - m \operatorname{th} m) + \frac{1}{n^2-m^2}(n \operatorname{th} n - m \operatorname{th} m)\right.$$

$$= -\frac{\delta_{n,m}}{n^2} + \frac{4}{n^4-m^4}(n \operatorname{th} n - m \operatorname{th} m), \quad (12)$$

$$h f_{2n} = \frac{1}{n^2}\int_{-1}^{1} (u_n - 2A_n \cos nx)\, u_m\,dx = \frac{1}{n^2}\left[\delta_{nm}\right] - \frac{2A_n}{n^2}\int_{-1}^{1} \cos nx\, u_m\,dx$$

B-4

昭和　年　月　日

$$\int_{-1}^{1} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{2\sin n}{n} \cos m + \frac{m}{n}\int_{-1}^{1} \sin nx \sin mx\, dx$$

$$= \frac{2}{n}\sin n \cos m - \frac{2m}{n^2}\cos n \sin m + \frac{m^2}{n^2}\int_{-1}^{1} \cos nx \cos mx\, dx$$

$$= \frac{2\cos n \cos m}{n^2-m^2}\left(n\tan n - m\tan m\right) \xrightarrow[n\to m]{} 1 + \frac{\sin n}{n}\cos n$$

$$\therefore\ h f_{2n,2m} = \frac{\delta_{n,m}}{n^2} - \frac{2}{n^2}\times\left[\frac{1}{n^2-m^2}(m\,th\,m - n\,th\,n) + \frac{1}{n^2+m^2}(m\,th\,m - n\,th\,n)\right]$$

$$= \frac{\delta_{n,m}}{n^2} - \frac{4}{n^4-m^4}\left(n\tan n - m\,th\,m\right), \qquad (13)$$

結局

$$\therefore\ h f_{2n,2m} = \frac{4}{n^4-m^4}\left(n\,th\,n - m\,th\,m\right), \quad \text{for } n \neq m.$$

$$h f_{2n,2n} = \frac{th\,n}{n^2}\left(\frac{1}{n} - th\,n\right), \quad \text{for } n = m. \qquad (14)$$

ただしは $n = \frac{M_{2n}}{2},\ m = \frac{M_{2m}}{2}$

$$h f_{2n+1,2m+1} = \frac{1}{n^2}\int_{-1}^{1}\left(-u_n + 2B_n\, sh\, nx\right)\left(A_m \sin mx + B_m\, sh\, mx\right)dx$$

$$= -\frac{\delta_{n,m}}{n^2} + \frac{2}{n^2}B_n\int_{-1}^{1} sh\,nx\ u_m\, dx$$

$n = \frac{M_{2n+1}}{2},\ m = \frac{M_{2m+1}}{2}$

$$\int_{-1}^{1} sh\,nx\ u_m\, dx = \frac{1}{m^4}\int_{-1}^{1} sh\,nx\ u_m^{(4)}\, dx = \frac{1}{m^4}\left[u_m^{(3)} sh\,nx \Big| - n\int u_m^{(3)} ch\,nx\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{m^4}\left[u_m^{(3)}(1)\, sh\,n - n\,u_m^{(2)}(1)\, ch\,n + n^2 u_m^{(1)}\, sh\,n - n^3 u_m(1)\, ch\,n\right] + \frac{n^4}{m^4}\int u_m\, sh\,nx\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{m^4-n^4}\left[m n^2 sh\,n\left(\cot m + \coth m\right) - 2n^3 ch\,n\right]$$

$$\therefore\ h f_{2n+1,2m+1} = -\frac{\delta_{n,m}}{n^2} + \frac{4}{m^4-n^4}\left[m\coth m - n\coth n\right], \qquad (15)$$

昭和　年　月　日

$n=m$ では

$$\int_{-1}^{1} \sin^2 nx\, dx = \int_0^1 (1-\cos 2nx)\,dx = 1 - \frac{\sin 2n}{2n}$$

$$\int_{-1}^{1} \sinh^2 nx\, dx = \int_0^1 (\cosh 2nx - 1)\,dx = \frac{\sinh 2n}{2n} - 1$$

$$h f_{2n+1,2m+1} = \frac{1}{2n^2}\left[\frac{1}{\sinh^2 n}\left(\frac{\sinh n \cosh n}{n} - 1\right) - \frac{1}{\sin^2 n}\left(1 - \frac{\sin n \cos n}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{\coth n}{n^2}\left(\frac{1}{n} - \coth n\right), \quad \text{for } n = m, \quad (16)$$

よって

$$h f_{2n+1,2m+1} = \frac{4}{n^4 - m^4}\left[n \coth n - m \coth m\right] \quad \text{for } n \neq m, \quad (17)$$

ただの n, m は $n = \frac{m_{2n+1}}{2}$, $m = \frac{m_{2m+1}}{2}$

$$h f_{2n,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{m_{2n}}\right)^4 \int_{-1}^{1} u_{2n}''\, dx = \sqrt{2}\left(\frac{2}{m_{2n}}\right)^4 u_{2n}'(1) =$$

$$= \left(\frac{2}{m_{2n}}\right)^4 \left(\tanh \frac{m_{2n}}{2} - \tan \frac{m_{2n}}{2}\right) = 2\left(\frac{2}{m_{2n}}\right)^4 \tanh \frac{m_{2n}}{2}, \quad (18)$$

$$h f_{2n+1,1} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{m_{2n+1}}\right)^4 \int_{-1}^{1} u_{2n+1}''\, x\, dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{m_{2n+1}}\right)^4 \left(m_{2n+1} \coth \frac{m_{2n+1}}{2} - 2\right),$$

$$\int_{-1}^{1} u_{2n+1}''\, x\, dx = x u_{2n+1}' \Big|_{-1}^{1} - \int u_{2n+1}'\, dx = 2\left\{u_{2n+1}'(1) - u_{2n+1}(1)\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left[\left(\frac{m}{2}\right)\left\{\cot \frac{m}{2} + \coth \frac{m}{2}\right\} - 2\right] = \sqrt{2}\left(m \coth \frac{m}{2} - 2\right)$$

$$h f_{2n+1,1} = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{m_{2n+1}}\right)^3 \left(\coth \frac{m_{2n+1}}{2} - \frac{2}{m_{2n+1}}\right), \quad (19)$$

昭和　　年　　月　　日

135,505 6604°

$\frac{m_2}{2} = 2.36502$, $th\frac{m_2}{2} = -\tan\frac{m_2}{2} = .98250$

315,00131

$\frac{m_4}{2} = 5.49781$, $th\frac{m_4}{2} = .999954$

$m_3/2 = 3.92660$. $\quad \coth\frac{m_3}{2} = \cot\frac{m_3}{2} = 1.000782$.

225,000

$m_5/2 = 7.06859 \quad \coth\frac{m_5}{2} = \cot\frac{m_5}{2} = 1.0000$

405,000

$h f_{2,0} = 2\left(\frac{2}{m_2}\right)^4 th\frac{m_2}{2} = 2(2.36502)^{-4} \times .9825 = .062809$

$h f_{2,2} = \left(\frac{2}{m_2}\right)^2 th\frac{m_2}{2}\left(\frac{2}{m_2} - th\frac{m_2}{2}\right) = .196424(.422829 - .9825) = -.109933$

$h f_{2,4} = \frac{4}{\left(\frac{m_2}{2}\right)^4 - \left(\frac{m_4}{2}\right)^4}\left(\frac{m_2}{2} th\frac{m_2}{2} - \frac{m_4}{2} th\frac{m_4}{2}\right) = \frac{3.173923}{228.5848} = .013885$

$h f_{4,0} = 2\left(\frac{2}{m_4}\right)^4 th\frac{m_4}{2} = .0021890$

$h f_{4,4} = \left(\frac{2}{m_4}\right)^2 th\frac{m_4}{2}\left(\frac{2}{m_4} - th\frac{m_4}{2}\right) = -.027064$

.7461087

$h f_{3,1} = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{m_3}\right)^3\left(\coth\frac{m_3}{2} - \frac{2}{m_3}\right) = .0853833$

$h f_{3,3} = \left(\frac{2}{m_3}\right)^2 \coth\frac{m_3}{2}\left(\frac{2}{m_3} - \coth\frac{m_3}{2}\right) = -.0484293$

$h f_{3,5} = \frac{4}{\left(\frac{m_3}{2}\right)^4 - \left(\frac{m_5}{2}\right)^4}\left(\frac{m_3}{2}\coth\frac{m_3}{2} - \frac{m_5}{2}\coth\frac{m_5}{2}\right) = .00555862$

$3.13892 \times 4 = 12.55568$

$h f_{5,1} = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{m_5}\right)^3\left(\coth\frac{m_5}{2} - \frac{2}{m_5}\right) = .00561398$

237.72051

$h f_{5,5} = \left(\frac{2}{m_5}\right)^2 \coth\frac{m_5}{2}\left(\frac{2}{m_5} - \coth\frac{m_5}{2}\right) = -.0171826$

.8585291

n \ m	0	2	4
2	20	22	24
4	40	42	44

	31	33	35
5	51	53	55

μ