HN A-121

No.

Date 60.3.25

2次元振動滑走板の理論

別添

内容

要約

前縁吹出しを導入した場合の理論の概要を記す。詳細は下記覚書等参照のこと

Cf. 1) 振動しながら走る平板に働く力について(2次元) 昭47.5.12

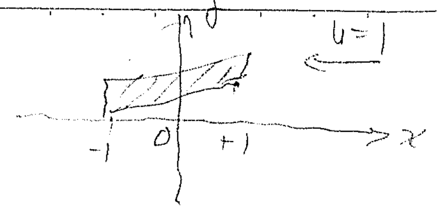
2) 2次元平板動揺問題における前縁流れ, 逆時間流れについて 昭49.2.13

3) 2次元滑走板における浸水長の変化について(動揺) 昭49.10.6

4) 動揺しながら滑走する2次元… 昭58.1.8

1. 速度ポテンシャルと境界条件

密度, 速度, 半浸水長を共に単位とする。



夫々 円周波数 ω の運動と考えて.

水面では 水面変位 η として

$$(i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\phi(x,0) - \gamma\eta(x) = p(x), \quad \gamma = g/U^2, \qquad (1.1)$$

$$\phi_y(x,0) = -(i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\eta(x), \qquad (1.2)$$

$$(i\omega - \frac{\partial}{\partial x})^2\phi(x,0) + \gamma\phi_y(x,0) = (i\omega - \frac{\partial}{\partial x})p(x), \qquad (1.3)$$

速度ポテンシャルは Aを前縁吸出し強さとして 次のようにおこう。

$$\phi(x,y) = \int_{-1}^{1} p(\xi)\, S(x-\xi, y)\,d\xi - A\,T(x-1, y), \qquad (1.4)$$

$$\eta(x) = \int_{-1}^{1} p(\xi)\, S_2(x-\xi, 0)\,d\xi - \frac{A}{\gamma} S(x-1, 0), \qquad (1.5)$$

$$\phi_y(x,0) = \int_{-1}^{1} p(\xi)\left[-\frac{1}{\pi(x-\xi)} + S_1(x-\xi, 0)\right]d\xi + A\,S_2(x-1, 0), \qquad (1.6)$$

境界積分方程式は (1.5) または (1.6) で与えられるが, Aの項がないと (1.6) では (1.2) より

$$\eta(x) \propto e^{i\omega x}, \quad \cdots$$

に対応する解は不定であり, それはクッタの流出条件で定まる。

また (1.5) で Aのない時は η を与えると解は一般には流出条件を満たせないがAを導入して流出条件を満たさせるものとする。

境界条件は船体の曲がりは少ないとするので前後ゆれは微少として無視出来，上下・縦ゆれも平板として扱われる。

上下ゆれ　$\eta_0 = 1$, $\phi_{0y} = -i\omega$, 解 p_0, A_0, (1.7)

縦ゆれ　$\eta_1 = x$, $\phi_{1y} = -i\omega x + 1$, 解 p_1, A_1, (1.8)

もう一つ導入して　$\eta_A = e^{i\omega x}$, $\phi_{Ay} = 0$, 解 p_A, A_A, (1.8)

又 前縁吹出しのない解に(*)印をつけて表わすと，

上下ゆれ　$\eta_0^* = 1 + B_0 e^{i\omega x}$, $\phi_{0y}^* = -i\omega$, p_0^*, (1.9)

縦ゆれ　$\eta_1^* = x + B_1 e^{i\omega x}$, $\phi_{1y} = -i\omega x + 1$, p_1^*, (1.10)

それ故

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= p_0^* - B_0 p_A \\ p_1 &= p_1^* - B_1 p_A \end{aligned}\right\} \cdots \quad (1.11)$$

のように表わされる。

さらに波の散乱ポテンシャルとして

$$\eta_{K_j} = e^{iK_j x},\ \phi_{K_j y} = -i(\omega - K_j) e^{iK_j x},\ p_{K_j},\ A_{K_j} \quad (1.12)$$

$$p_{K_j} = p_{K_j}^* - B_{K_j} p_A,\ \eta_{K_j} = e^{iK_j x} + B_{K_j} e^{i\omega x},$$

としよう。　K_jは(A・7)の実根で $\omega > \frac{\gamma}{4}$ ならば $A(k)$の根2つ，$\omega < \frac{\gamma}{4}$ ならばさらに $B(k)$ の根2つが加わる。

無限後方では ηだけ残って. (1.5), (A.9) より

$$\eta(x) \underset{x \ll -1}{\simeq} \frac{\pm i k_1}{k_2-k_1} H^-(k_1) e^{\pm i k_1 x} + \frac{i k_2 H^-(k_2)}{k_2-k_1} e^{\pm i k_2 x} + \frac{\pm i k_4}{k_4-k_3} H^+(k_4) e^{-i k_4 x},$$

又 上流では

$$\underset{x \gg 1}{\simeq} -\frac{i k_3}{k_4-k_3} H^+(k_3) e^{-i k_3 x}, \qquad (1.13)$$

$$H^{\pm}(k_1) = \int_{-1}^{1} p(\xi) e^{\pm i k_1 \xi} d\xi + i \frac{A}{\omega_1} e^{\pm i k_1},$$

$$H^{\pm}(k_2) = \int_{-1}^{1} p\, e^{\pm i k_2 \xi} d\xi - i \frac{A}{\omega_2} e^{\pm i k_2},$$

$$H^{\pm}(k_3) = \int_{-1}^{1} p\, e^{\pm i k_3 \xi} d\xi + i \frac{A}{\omega_3} e^{\pm i k_3},$$

$$H^{\pm}(k_4) = \int_{-1}^{1} p\, e^{\pm i k_4 \xi} d\xi + i \frac{A}{\omega_4} e^{\pm i k_4}, \qquad (1.14)$$

2. 逆流れポテンシャル

$$(i\omega+\frac{\partial}{\partial x})\tilde{\varphi}-g\tilde{\eta}=\tilde{p},$$
$$\left.\begin{array}{l}\\ \tilde{\varphi}_y(x,0)=-(i\omega+\frac{\partial}{\partial x})\tilde{\eta},\end{array}\right\} \cdots (2.1)$$

$$\tilde{\varphi}(x,y)=\int_{-1}^{1}\tilde{p}\,\tilde{S}\,d\xi, \quad \cdots (2.2)$$
$$\tilde{\eta}(x)=\int_{-1}^{1}\tilde{p}\,\tilde{S}_2\,d\xi \quad (2.3)$$

とすれば

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{S}(x,y)=-S(-x,y)\\ \tilde{S}_2(x,y)=S_2(-X,y)\end{array}\right\} \quad (2.4)$$

とおけばよい。

今

$$\tilde{\eta}(x)=\eta(x), \quad \cdots (2.5)$$

とする事にしておこう。

(2.3)において(－)ドアで複素共役値を示す事とし、(A.9)より

$$\overline{\tilde{\eta}}(x)=\int_{-1}^{1}\overline{\tilde{p}(\xi)}\;\overline{\tilde{S}_2}(x-\xi,0)\,d\xi=\int_{-1}^{1}\overline{\tilde{p}}(\xi)\,S_2(x-\xi,0)\,d\xi$$
$$-i\int_{-1}^{1}\overline{\tilde{p}}(\xi)\left\{\sum_{j=1}^{4}\frac{K_j}{K_{j+1}-K_j}e^{+iK_j(x-\xi)}\right\}d\xi, \quad \cdots$$

一方 (1.5)より

$$\overline{\tilde{\eta}}(x)=\eta(x)=\int_{-1}^{1}p(\xi)\,S_2(x-\xi,0)\,d\xi,$$

とおくと

$$\int_{-1}^{1}\{\overline{\tilde{p}}(\xi)-p(\xi)\}S_2\,d\xi=i\sum\frac{K_j}{K_{j+1}-K_j}e^{iK_jx}\,\overline{\tilde{H}(K_j)}, \quad (2.6)$$
$$\tilde{H}(k)=\int_{-1}^{1}\tilde{p}(x)\,e^{ikx}\,dx, \quad (2.7)$$

それ故 (2.12)のようなただし $A_{k_j} \neq 0$ でクッタの条件を満たさない解を $P_{k_j}(x)$ とすれば (2.6)より

$$\overline{\tilde{P}}(x) - P(x) = i \sum_j \frac{k_j}{k_{j+1}-k_j} \overline{\tilde{A}}(k_j) P_{k_j}(x) \quad , \quad \cdots(2.8)$$

のような関係がえられる。

大文字で書いたPはすべてKuttaの条件を満たしていない。

なおSummation記号の符号等よく調べてないので注意。

3. 可逆定理

(1.5) の両辺に $\bar{p}$ をかけて積分すると (2.4) により

$$\int_{-1}^{1} \bar{p}\,\eta\,dx = \int_{-1}^{1} p\,\tilde{\eta}\,dx + \frac{A}{8}\tilde{\varphi}(1,0), \quad \cdots (3.1)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \int_{-1}^{1} \bar{p}\,\tilde{S}\,d\xi, \\ \tilde{\eta} &= \int_{-1}^{1} \bar{p}\,\tilde{S}_2\,d\xi, \end{aligned}\right\} \cdots (3.2)$$

(1.6) の両辺に $\bar{p}$ をかけて積分すると (1−)(1の内側)

$$\int_{-1}^{1} \bar{p}\,\phi_y\,dx = -\int_{-1}^{1} p\,\bar{\phi}_y\,dx + A\,\tilde{\eta}(1-), \quad \cdots (3.3)$$

但しこの時 p および $\bar{p}$ は共に流出条件を満たしていなければならない。

特に(§3)で (1.9)以下で定義した解を用いると、

$$\left.\begin{aligned} -i\omega\int_{-1}^{1} p_A\,dx &= +A_A\,\tilde{\eta}_0(1-), \\ \int_{-1}^{1} p_A(-i\omega x-1)\,dx &= A_A\,\tilde{\eta}_1(1-) \end{aligned}\right\} (3.4)$$

但し $\tilde{\eta}_0$, $\tilde{\eta}_1$ は $\bar{\phi}_y = -i\omega$, $\bar{\phi}_y = -i\omega x - 1$ の解で流出条件を満すものの $x=1$ における水面変位である。

揚力とモーメントは、

$$L = \int_{-1}^{1} p\,dx, \quad M = \int_{-1}^{1} p\,x\,dx, \quad \cdots (3.5)$$

と定義し，また *印でAのない解を示すと，

$$\left.\begin{aligned}\tilde{L}^* &= \int_{-1}^{1}\tilde{p}^* dx = -\int_{-1}^{1} p^* dx = -L^* \\ -i\omega\tilde{M}^* - \tilde{L}^* &= \int_{-1}^{1}\tilde{p}^*(-i\omega x - 1)dx = -\int_{-1}^{1} p^*(-i\omega x + 1)dx \\ &= i\omega M^* - L^* ,\end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

となるのでAのある時は

$$\left.\begin{aligned}-i\omega L &= +i\omega\tilde{L}^* + A\tilde{\gamma}_0(1) = -i\omega L^* + A\tilde{\gamma}_0(1), \\ -i\omega M + L &= i\omega\tilde{M}^* + \tilde{L}^* + A\tilde{\gamma}_1(1) = -i\omega M^* + L^* + A\tilde{\gamma}_1(1),\end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

(3.4)から

$$L_A = \int_{-1}^{1} p_A\, dx, \quad M_A = \int_{-1}^{1} p_A x\, dx , \qquad (3.8)$$

を定義すれば (3.4)は

$$\left.\begin{aligned}-i\omega L_A &= A_A\tilde{\gamma}_0(1-) \\ -i\omega M_A - L_A &= A_A\tilde{\gamma}_1(1-)\end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

と書けるので例えば (3.7)の第1式にこの第1式を代入すると

$$L = L^* + \frac{A}{A_A}L_A , \quad \cdots \quad (3.10)$$

となるのでこれを (1.11) 等と比較すると そのB_jは

$$B_j = -\frac{A_j}{A_A} , \quad - - \cdot \quad (3.11)$$

の関係にある事がわかる。

(3.3)は対称性を欠いているので逆流れに関する前線的な量を導入し，(3.2)のかわりに

$$
\left.
\begin{aligned}
\tilde{\phi} &= \int_{-1}^{1} \tilde{P}\tilde{S}\,d\xi - \tilde{A}\tilde{T}(x+1, y) \\
\tilde{\eta} &= \int_{-1}^{1} \tilde{P}\tilde{S}_2\,d\xi - \frac{\tilde{A}}{\gamma}\tilde{S}(x+1, y) \\
\tilde{\phi}_y(x,0) &= \int_{-1}^{1} \tilde{P}\tilde{S}_y\,d\xi + \tilde{A}\tilde{S}_2(x+1, 0)
\end{aligned}
\right\} \quad (3.2')
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \tilde{P}\phi_y\,dx &= -\int_{-1}^{1} P\,d\xi\left[\tilde{\phi}_y(\xi) - \tilde{A}\tilde{S}_2(\xi+1, 0)\right] + A\tilde{\eta}(1) \\
&= -\int_{-1}^{1} P\tilde{\phi}_y\,dx + \tilde{A}\left\{\eta(-1) + \frac{A}{\gamma}S(-2,0)\right\} + A\tilde{\eta}(1) \\
&= -\int_{-1}^{1} P\tilde{\phi}_y\,dx + \tilde{A}\eta(-1) + A\tilde{\eta}(1) + \frac{A\tilde{A}}{\gamma}S(-2,0)
\end{aligned}
\quad (3.3')
$$

となってあまり便利とも見えない。

ハスキンドの関係は(1.14)のコッチン関数について(1.12)の逆流の散乱ポテンシャルを使って，(3.3)に代入すると

$$
i\omega_j H^{-}(K_j) = \int_{-1}^{1} P_{K_j}^{*}\phi_y\,dx - A\bar{B}_{K_j}e^{-i\alpha}, \quad \begin{matrix}\text{符}\\(?)\\(3.12)\end{matrix}
$$

特に

$$
i\omega_j H_A^{-}(K_j) = -A_A\tilde{B}_{K_j}e^{-i\alpha}, \quad \begin{matrix}(?)\\(3.13)\end{matrix}
$$

のようになろう。

4. 仕事と減衰

単位時間に外力のなす仕事の平均即ち減衰 Dは

$$D = \frac{i\omega}{4}\int_{-1}^{1}(p\bar{\eta} - \bar{p}\eta)\,dx, \quad \cdots \qquad (4.1)$$

一方流体が受けとる分は

$$W = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}[p\bar{\phi}_y + \bar{p}\phi_y]\,dx, \qquad (4.2)$$

$$\bar{\phi}_y = \left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{\eta}$$

それなら今

$$RU = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(p\bar{\eta}_x + \bar{p}\eta_x)\,dx, \qquad (4.3)$$

とおくと境界条件から

$$D = W + RU \qquad (4.3)$$

Rは平均抗力である。

(4.1)は(1.5)に $\bar{p}$ をかけて積分して虚部をとってもよいがこの場合大変面倒になる。

ここで(1.1)を代入すると　pは $|x|>1$ では0だから

$$D = \frac{\omega}{4i}\int_{-\infty}^{\infty}[\bar{\eta}(i\omega\phi - \phi_x) - \eta(-i\omega\bar{\phi} - \bar{\phi}_x)]\,dx$$

$$= \frac{\omega}{4i}\left\{[-\bar{\eta}\phi + \eta\bar{\phi}]_{x=-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}[\phi(i\omega\bar{\eta} + \bar{\eta}_x) - \bar{\phi}(-i\omega\eta + \eta_x)]\,dx\right\}$$

$$= \frac{\omega}{4i}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(\phi\bar{\phi}_y - \bar{\phi}\phi_y)\,dx + [\eta\bar{\phi} - \bar{\eta}\phi]_{x=-\infty}^{+\infty}\right],$$

$\oint(\phi\bar{\phi}_n - \bar{\phi}\phi_n)\,ds = 0$ だから

$$D=\frac{\omega}{4i}\left[\left[\bar{\varphi}\varphi-\varphi\bar{\varphi}\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{0}\left[\varphi\bar{\varphi}_x-\bar{\varphi}\varphi_x\Big|_{x=-\infty}+\varphi\bar{\varphi}_x-\bar{\varphi}\varphi_x\Big|_{x=+\infty}\right]dy\right]. \qquad (4.4)$$

これに遠方の漸近展開を代入すればよい。

それ位、コッチン函数を使えばAのない場合と同じになる。

その場合は (A.9) の二式を使って (1.5) を直接積分する方が便利で

$$D=\frac{i\omega}{4}\left[\int_{-1}^{1}p(x)dx\int_{-1}^{1}\overline{p(\xi)}\,\overline{S_2(x-\xi)}\,d\xi-\int\overline{p(x)}\,dx\int p(\xi)\,S_2(x-\xi)\,d\xi\right]$$

$$=\frac{\omega}{4}\int_{-1}^{1}p(x)dx\int_{-1}^{1}\bar{p}\,d\xi\left[\frac{K_1}{K_2-K_1}e^{iK_1(\xi-x)}-\frac{K_2}{K_2-K_1}e^{iK_2(\xi-x)}\right.$$

$$\left.+\frac{K_3}{K_4-K_3}e^{-iK_3(\xi-x)}+\frac{K_4}{K_4-K_3}e^{-iK_4(\xi-x)}\right]$$

$$=\frac{\omega}{4}\left[\frac{K_1}{K_2-K_1}|H^-(K_1)|^2-\frac{K_2}{K_2-K_1}|H^-(K_2)|^2\right.$$

$$\left.+\frac{K_3}{K_4-K_3}|H^+(K_3)|^2+\frac{K_4}{K_4-K_3}|H^+(K_4)|^2\right], \qquad (4.5)$$

W, Rの見積りには前縁特異性が入って来て面倒であるが、今は上下縦ゆれのみ考えるので Rは直ちに評価出来る。

即ち

$$\left.\begin{aligned}&\text{上下ゆれの}\quad RV=0\\&\text{縦ゆれの}\quad RV=\frac{\bar{\theta}}{4}\int_{-1}^{1}(p+\bar{p})\,dx,\end{aligned}\right\}\qquad (4.6)$$

さて (4.5) より次の事がわかる。

i) 減衰が負になるのは K_2 波の所為である。

K_2 波は反射波であるが群速度が流速より小さいので後方にある筈である。

ii) $\alpha \gg \gamma$ の場合, K_3, K_4 波の項はなくなり,

$$\left.\begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix}\right\} \fallingdotseq \omega \mp \sqrt{\omega\gamma}$$

$$H^-(k_j) \fallingdotseq H^-(\omega) \mp \sqrt{\omega\gamma}\, H'(\omega) \quad \left(\begin{matrix} -\ j=1 \\ +\ j=2 \end{matrix}\right)$$

$$|H^-(k_j)|^2 \fallingdotseq |H^-(\omega)|^2 \mp \sqrt{\omega\gamma}\{H'\bar{H} + \bar{H}'H\}$$

$$\therefore\ D \fallingdotseq \frac{\sqrt{\omega}}{8\sqrt{\gamma}}\Big[(\omega - \sqrt{\omega\gamma})\{|H|^2 - \sqrt{\omega\gamma}(H'\bar{H} + \bar{H}'H)\} - (\omega + \sqrt{\omega\gamma})\{|H|^2 + \sqrt{\omega\gamma}(H'\bar{H} + \bar{H}'H)\}\Big]$$

$$\fallingdotseq \frac{1\sqrt{\omega}}{8\sqrt{\gamma}}\Big[-\sqrt{\omega\gamma}\,|H|^2 - \omega\sqrt{\omega\gamma}\,(H'\bar{H} + \bar{H}'H)\Big]$$

$$= -\frac{\omega}{8}\Big[|H|^2 + \omega(H'\bar{H} + \bar{H}'H)\Big], \qquad (4.7)$$

となり, γ に関係なく

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\Big[\omega|H(\omega)|^2\Big] > 0 \qquad (4.8)$$

ならば減衰は負となる。

ii) $\frac{\gamma}{4} \gg \alpha$ の時

$k_1 \doteqdot \omega$, $k_2 \doteqdot \gamma+\omega$, $k_3 \doteqdot -\omega$, $k_4 \doteqdot \gamma-\omega$.

$$D \doteqdot \frac{\omega}{4\gamma}\left[\omega|H(\omega)|^2-(\gamma+\omega)|H(\gamma+\omega)|^2+\omega|H(\omega)|^2+(\gamma-\omega)|H(\gamma-\omega)|^2\right]$$

$$\doteqdot \frac{-\omega^2}{2\gamma}\left[|H(\gamma)|^2+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}|H(\gamma)|^2\right], \quad \cdots (4.9)$$

これは前とよく似た不安定条件は

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\gamma|H(\gamma)|^2\right]>0, \quad \cdots\cdots (4.10)$$

いづれにしても (1.14) のフッチ2)関数がわかればよい。もっとも数値計算では圧力がわかれば直接減衰は出て来るので (4.5) は計算の check に役立つ。

附録 A 核関数

$$\left.\begin{aligned}
&\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right) T(x,y) = S(x,y) \\
&\frac{\partial}{\partial y} T(x,y) = -S_2(x,y) \\
&\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right) S = \gamma S_2(x,y) - \frac{y}{\pi r^2},
\end{aligned}\right\} \quad (A\cdot 1)$$

$$T(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{A(k)} e^{ikx} + \frac{1}{B(k)} e^{-ikx}\right] e^{-ky} dk, \quad (A\cdot 2)$$

$$S(x,y) = \frac{i}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{k-\omega}{A} e^{ikx} - \frac{k+\omega}{B} e^{-ikx}\right] e^{-ky} dk, \quad (A\cdot 3)$$

$$S_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{k}{A} e^{ikx} + \frac{-k}{B} e^{-ikx}\right] e^{-ky} dk, \quad (A\cdot 4)$$

[ref. (1)ではγだけ違っている注意]

なおもう一つ

$$S_y(x,y) = -\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right) S_2(x,y)$$
$$= -\frac{x}{\pi r^2} + S_1(x,y), \quad (A\cdot 5)$$

$$S_1(x,y) = \frac{i}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{(\omega+\gamma)k - \omega^2}{A} e^{ikx} + \frac{(\omega-\gamma)k + \omega^2}{B} e^{-ikx}\right] e^{-ky} dk, \quad (A\cdot 6)$$

を定義しておこう。

$$\left.\begin{aligned}
A(k) &= (k-\omega)^2 - \gamma k + i\mu(k-\omega) \\
B(k) &= (k+\omega)^2 - \gamma k - i\mu(k+\omega)
\end{aligned}\right\} \quad (A\cdot 7)$$

である。

今

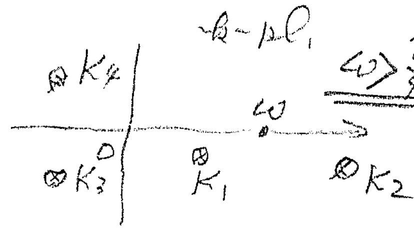
$$\left.\begin{aligned}
A &= (k-K_1)(k-K_2) \\
B &= (k-K_3)(k-K_4)
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (A\cdot 8)$$

とおくと

$$\left.\begin{matrix}K_1\\K_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\gamma+2\omega \mp \sqrt{\gamma^2+4\omega\gamma}\right),$$

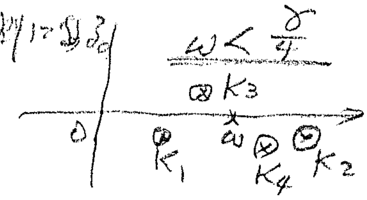
$$\left.\begin{matrix}K_3\\K_4\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\gamma-2\omega \mp \sqrt{\gamma^2-4\omega\gamma}\right). \quad \cdots\cdots (A.8')$$

で $\omega > \frac{\gamma}{4}$ ならば K_3, K_4 は複素数で



右図のようになっており，また

$\omega < \frac{\gamma}{4}$ ならばすべて実で，K_3 は実軸の上側にある。



これらの事を考えると，$x>0$ として

$$\left.\begin{aligned}
\overline{S(-x,0)} + S(x,0) &= \frac{\omega-K_1}{K_2-K_1}e^{iK_1x} + \frac{K_2-\omega}{K_2-K_1}e^{iK_2x} \\
&\quad - \frac{\omega+K_3}{K_4-K_3}e^{-iK_3x} + \frac{\omega+K_4}{K_4-K_3}e^{-iK_4x}, \\
\overline{S_z(-x,0)} - S_z(x,0) &= \frac{-iK_1}{K_2-K_1}e^{iK_1x} + \frac{iK_2}{K_2-K_1}e^{iK_2x} \\
&\quad - \frac{iK_3}{K_4-K_3}e^{-iK_3x} - \frac{iK_4}{K_4-K_3}e^{-iK_4x}, \\
\overline{S_y(-x,0)} + S_y(x,0) &= \frac{K_1(\omega-K_1)}{K_2-K_1}e^{iK_1x} + \frac{K_2(K_2-\omega)}{K_2-K_1}e^{iK_2x} \\
&\quad - \frac{K_3(\omega+K_3)}{K_4-K_3}e^{-iK_3x} + \frac{K_4(\omega+K_4)}{K_4-K_3}e^{-iK_4x},
\end{aligned}\right\} (A.9)$$

但し $\omega > \frac{\gamma}{4}$ の時は K_3, K_4 の項はなくなる。

なおさらに

$$\left.\begin{aligned}
&\omega - K_1 = \sqrt{\gamma K_1} = \omega_1, \quad K_2 - \omega = \sqrt{\gamma K_2} = \omega_2 \\
&\omega + K_3 = \sqrt{\gamma K_3} = \omega_3, \quad K_4 + \omega = \sqrt{\gamma K_4} = \omega_4
\end{aligned}\right\} (A.8'')$$

$(\omega_j^2/\gamma = K_j)$