No. 1.3.2.2 補
Date 63.12.5
12.12 補
12.15

造波抵抗の極小値問題

No. 1

Date

概要

本覚書では細長船、薄い船、回転体の数学的模型によって高速における造波抵抗の予想しうる最低値の見当をつけようとするものである。

と言うのは造波抵抗の最小値は0であるが、それに対応する特異点は負になって半幅が負になる等の不都合が出て来るので現実的な船型として可能なものについては造波抵抗がかなり大きくなるので実際に数値計算して探索するより仕方がない訳である。

さて高速とは一応フルード数0.5以上と言う意味とするが実際上ラスト・ハムプ（普通はフルード数0.6位）より低速側と高速側では傾向的に異なるのでもっと正確にはラスト・ハムプより高速側と言う方がよいであろうし、またそこに重点をおいて考える事になる。

またフルード数1以上で L/B が大きいと摩擦抵抗が大変大きくなるので経済性を追求する船としては困難になって来るので速度の上限も大体その辺で止める事にする。

1. 薄い船の造波抵抗

薄い船の近似では半幅曲線が $\eta(x,z)$ で表わされる船の造波抵抗 R は次式で与えられる。

$$R = \frac{4}{\pi}\rho g K_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| F(K_0 \sec^2\theta, \theta) \right|^2 \sec^5\theta \, d\theta, \qquad (1.1)$$

$K_0 = g/V^2$

$$F(k,\theta) = \int_{-T}^{0}\int_{-l}^{l} \eta(x,z)\, e^{kz - ikx\cos\theta}\, dx\, dz, \qquad (1.2)$$

l は半船長, T は吃水, 但し以下 $l=1$, 船速 $V=1$ として計算する。

船型近似排水量を ∇ とすると

$$\nabla = 2\int_{-T}^{0}\int_{-l}^{l} \eta(x,z)\, dx\, dz, \qquad (1.3)$$

そして一般的に η は次の様に表わす事にしよう。

$$\eta(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) \frac{\cos n\phi}{\sin\phi}, \quad x = -\cos\phi, \qquad (1.4)$$

なお よく知られているように前後の非対称性は造波抵抗を激増させるので以下そのような場合はあまり考えない方針とする。(また非対称ならば計算は独立に行って加え合せればよい)

そうすると まず

$$\nabla = 2\pi \int_{-T}^{0} a_0(z)\, dz, \qquad (1.5)$$

高速の場合一般に船型の細かい変化は造波抵抗にあまり影響しないので変分問題の副条件としては与えられたフルード数に対して排水量に限る事とする。

$a_n(z)$は吃水方向の半幅の変化つまり肋骨線の模様を表わすが、この変化に対し振幅関数の変化は単調であるのであまり大きく変化させる事もなかろうから次のようにとる事とし必要に応じてさらに何項か追加すればよかろう。

$$a_n(z) = \frac{1}{T}a_0^{(n)} + \frac{a_1^{(n)}}{T}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{T}\right), \qquad (1.6)$$

$$\int_{-T}^{0} a_n(z)\,dz = a_0^{(n)}, \qquad (1.7)$$

よって(1.5)は $\nabla = 2\pi a_0^{(0)}$ あるいは $\underline{\frac{\nabla}{L^3} \equiv \delta = \frac{\pi}{4} a_0^0}$, (1.8)

Lは船長で今は2とする。

さて次のように規準化しよう。

$$\eta^*(x,z) = \frac{1}{a_0^{(0)}}\eta(x,z) = \frac{1}{T}\sum_n \left[c_0^{(n)} + c_1^{(n)}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{T}\right)\right]\frac{\cos n\phi}{\sin\phi},$$

$$c_m^n = \frac{a_m^{(n)}}{a_0^{(0)}}, \quad c_0^{(0)} = 1, \qquad (1.9)$$

$$\bar{H}^*(k,\theta) = \int_{-T}^{0}\int_{-l}^{l} \xi^*(x,z)\, e^{kz - ikx\cos\theta}\, dx\, dz , \qquad (1.10)$$

そうすると (1.1)は

$$r = \frac{R}{\rho g \nabla \left(\frac{\nabla}{L^2}\right)} = \frac{2K_0^3}{\pi^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \bar{H}^* \right|^2 \sec^5\theta\, d\theta , \qquad (1.11)$$

一方

$$\int_0^{\pi} \cos n\phi\, e^{-ik\cos\phi\cos\theta}\, d\phi = \pi(-i)^n J_n(k\cos\theta) , \qquad (1.12)$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} e^{kz} dz = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-kT}\right) = \frac{1}{k} f_0(kT) , \qquad (1.13)$$

$$\int_{-T}^{0} e^{kz}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{T}\right) dz = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-kT}\right) - \frac{1}{kT}\int_{-T}^{0} e^{kz} dz$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-kT} - \frac{1}{kT}\left(1 - e^{-kT}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{kT} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{kT}\right)e^{-kT}\right] \equiv \frac{f_1(kT)}{k} , \qquad (1.14)$$

であるから

$$\bar{H}^*(k,\theta) = \frac{\pi}{kT} \sum_n \left[C_0^{(n)} f_0(kT) + C_1^{(n)} f_1(kT)\right](-i)^n J_n(k\cos\theta) \qquad (1.15)$$

$$\therefore\ r = \sum_{m,\mu=0,1} \sum_{n,\nu=0} C_m^{(n)} C_\mu^{(\nu)} I_{m,\mu}^{n,\nu} , \qquad (1.16)$$

$$I_{m,\mu}^{n,\nu} = \frac{2K_0(-i)^{n+\nu}}{\pi T^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_m(K_0T\sec^2\theta) f_\mu(K_0T\sec^2\theta) J_n(K_0 l\sec\theta) J_\nu(K_0 l\sec\theta) \times \sec\theta\, d\theta , \qquad (1.17)$$

なお対称性から n, ν は共に偶数のみ，奇数のみの時有限な値を有し，他は0となる。従って虚数値をとる事はない。

この積分を計算しておいて (1.16) を $c_0^{(0)}=1$ の下に極小値問題をとけばよい。

そのような解の内 $\zeta(x,z)$ が負値をとるものは捨てねばならない。

2. マイヤーフォーム型，球船首型

前節のように直接 η を扱うかわりに次式で表わされる補助関数 σ で考えてみよう。

$$\eta(x,z) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{K_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma(x,z)\ , \qquad (2.1)$$

これは z を時間（上向きに正）とみなすと一次元の熱伝導の方程式で σ は温度，η は熱源である。従って，よく知られているように与えられた初期条件，境界条件によって σ は一意的に定まるから，η のかわりに σ で考えても一般性を損わない。

まず排水量は

$$\frac{\nabla}{2} = \int_{-T}^{0}\int_{-1}^{1}\eta(x,z)\,dx\,dz = \int_{-1}^{1}\left[\sigma(x,0) - \sigma(x,-T)\right]dx$$
$$- \frac{1}{K_0}\int_{-T}^{0}\left[\sigma_x(1,z) - \sigma_x(-1,z)\right]dz\ , \qquad (2.2)$$

コッチン関数は

$$\overline{H}(k,\theta)\Big|_{k=K_0\sec^2\theta} = \int_{-T}^{0}\int_{-1}^{1}\eta(x,z)\,e^{kz-ipx}\,dx\,dz\ , \quad p = k\cos\theta,\quad k \to K_0\sec^2\theta,$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\sigma(x,0)\,e^{-ipx} - \sigma(x,-T)\,e^{-kT-ipx}\right]dx$$
$$- \frac{1}{K_0}\int_{-T}^{0}\left[\sigma_x(1,z)\,e^{-ip} - \sigma_x(-1,z)\,e^{ip}\right]e^{kz}\,dz$$
$$+ \frac{ip}{K_0}\int_{-T}^{0}\left[\sigma(1,z)\,e^{-ip} - \sigma(-1,z)\,e^{ip}\right]e^{kz}\,dz\ , \qquad (2.3)$$

$k = K_0\sec^2\theta,\ p = K_0\sec\theta$

となって2重積分がなくなる点がきれいであるが、この新しい極端問題では任意係数の数は前節と略同じである。

そこで先ず境界条件と初期条件を次のように定めよう。

$$\sigma(\pm 1, z) = 0, \quad \sigma(x, -T) = 0, \qquad \cdots (2.4)$$

そうすると

$$\frac{V}{2} = \int_{-1}^{1} \sigma(x,0)\,dx - \frac{1}{K_0}\int_{-T}^{0}\left[\sigma_x(1,z) - \sigma_x(-1,z)\right]dz, \qquad (2.5)$$

$$\bar{H}(K_0 \sec^2\theta, \theta) = \int_{-1}^{1} \sigma(x,0)\,e^{-ipx}\,dx - \frac{1}{K_0}\int_{-T}^{0}\left[\sigma_x(1,z)\,e^{-ip} - \sigma_x(-1,z)\,e^{ip}\right]e^{kz}\,dz, \qquad (2.6)$$

例えば

$$\sigma(x,z) = (1-x^2)(z+T), \qquad \cdots (2.7)$$

とおくと

$$\zeta(x,z) = (1-x^2) + \frac{2x}{K_0}(z+T), \qquad \cdots (2.8)$$

となり、V肋骨船型あるいはマイヤー・フォーム船型のような類型を表わしていると考えられるので、以下マイヤー・フォーム型となづけよう。

この型では船首尾附近で σ_{xx} 従って ζ_{xx} が正になると ζ が負になるので、ζ_{xx} つまり水線曲率は船首尾附近で負、つまり外側に凸でなければならない。

もう一つの簡単な場合は、

$$\sigma(\pm 1, z)=0, \quad \sigma(x, 0)=0, \qquad (2.9)$$

であろうから

$$\frac{\Phi}{2} = -\int_{-1}^{1}\sigma(x,-T)\,dx - \frac{1}{K_0}\int_{-T}^{0}\left[\sigma_x(1,z)-\sigma_x(-1,z)\right]dz, \qquad (2.10)$$

$$F(K_0\sec^2\theta,\theta) = -\int_{-1}^{1}\sigma(x,-T)\,e^{-kT-ipx}\,dx$$

$$-\frac{1}{K_0}\int_{-T}^{0}\left[\sigma_x(1,z)e^{-ip}-\sigma_x(-1,z)e^{ip}\right]e^{kz}dz, \qquad (2.10)$$

となる。

簡単な例として

$$\sigma(x,z) = (1-x^2)^2 z, \qquad (2.11)$$

とおくと

$$\zeta(x,z) = (1-x^2)^2 \mp \frac{4(3x^2-1)}{K_0}z, \qquad (2.12)$$

のようになり、球船首船型を代表していると考えられるので以下球船首型となづけよう。

前者と反対に σ_{xx} 又は ζ_{xx} は船首尾で正とならないと ζ が負になるので具合が悪く、従って水線形状は変曲点を持ち、球船首船型又はユーケヴィッチ・フォームの特徴を有する事になる。

これらの二つの型は船型の類型の内で

代表的なものであるから，これらについて極値問題を考えてみる事にしよう。

なお (2·11), (2·12) の例では $\sigma_x(\pm 1, z)=0$ となっているが この時は (2·10) から分かるように $z=-T$ にある没水体と造波抵抗は等しくなり著者等が前に没水体型となづけたものに等しいが，一般には σ_x は有限でありうるので ここではそう云う場合を考えるものとし，没水体については節を変えて取扱う。

また簡単の為に以下船型は前後対称の場合のみ考える。

i) マイヤーフォーム型

$$\sigma_{xx}(x,z) = -\sum_{n=0} a_n(z)\frac{\cos n\phi}{\sin\phi}, \quad x=-\cos\phi, \qquad (2\cdot13)$$

$$\sigma_x(x,z) = a_0(z)\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) - \sum_{n=2}\frac{a_n(z)}{n}\sin n\phi, \qquad (2\cdot14)$$

$$\sigma(x,z) = a_0(z)\left\{\frac{\pi}{2} - \sin\phi - \left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\cos\phi\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}\frac{a_n(z)}{n}\left\{\frac{\sin(n-1)\phi}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\phi}{n+1}\right\}, \qquad (2\cdot15)$$

$\sin\phi - \frac{\sin 3\phi}{3} = \frac{4}{3}\sin^3\phi$

対称性を仮定して和記号は $n=2$ からとしてあるが $n=1$ からとすると $\sigma(\pm1, z) \neq 0$ となるので注意。

$$\nabla = \frac{\pi}{2} a_0(0) + \frac{2\pi}{K_0}\int_{-T}^{0} a_0(z)\,dz \quad , \cdots\cdots \qquad (2.16)$$

$$F(K_0 \ell \cos^2\theta, \theta) = \frac{\cos^2\theta}{K_0^2}\left[-\int_{-1}^{1} \sigma_{xx}(x,0)\, e^{-ipx}\,dx + 2\cos p\int_{-T}^{0} \sigma_{xz}(1,z)\, e^{kz}\,dz\right] \qquad (2.17)$$

今

$$a_0(z) = a_0^0\left(\frac{z}{T}+1\right) + a_1^0 \frac{z}{2T}\left(\frac{z}{T}+1\right) \quad ,$$

$$\frac{d}{dz} a_0(z) = \frac{1}{T} a_0^0 + \frac{a_1^0}{2T}\left[\frac{2z}{T}+1\right] \quad ,$$

$$\int_{-T}^{0} a_0(z)\,dz = \frac{T}{2} a_0^0 - \frac{T}{12} a_1^0, \quad a_0(0) = a_0^0 \qquad (2.18)$$

とおくと

$$\nabla = \frac{\pi}{2} a_0^0 \left(1+\frac{2T}{K_0}\right) - \frac{\pi T}{6K_0} a_1^0 \quad ; \cdots \qquad (2.19')$$

$$\int_{-T}^{0} \sigma_{xz}(1,z)\, e^{kz}\,dz = -\frac{\pi}{2}\int_{-T}^{0} \frac{d a_0(z)}{dz}\, e^{kz}\,dz = -\frac{\pi}{2T}\int_{-T}^{0} e^{kz}\left[a_0^0 + \frac{a_1^0}{2}\left(1+\frac{2z}{T}\right)\right]$$

$$= -\frac{\pi}{2kT}\left[a_0^0 f_0(kT) + a_1^0 f_1(kT)\right] \quad , \qquad (2.20)$$

$$f_0(kT) = 1 - e^{-kT} = k\int_{-T}^{0} e^{kz}\,dz \quad ,$$

$$f_1(kT) = \frac{k}{2}\int_{-T}^{0} e^{kz}\left\{\frac{2z}{T}+1\right\} dz \qquad (2.21)$$

$$\bar{H}(K_0 \sec\theta, \theta) = \frac{\cos^2\theta}{K_0^2}\Big[\pi\sum_{n=0} a_{2n}(0)(-)^n J_{2n}(k\cos\theta)$$

$$- \frac{\pi}{2kT}\cos p\,\{a_0^0 f_0(kT) + a_1^0 f_1(kT)\}\Big] \quad (2.22)$$

$$= \frac{\cancel{\pi}^{2}\cos^2\theta \cdot \nabla}{\cancel{\pi} K_0^2}\Big[\sum_{n=0} C_{2n}(-)^n J_{2n}(k\cos\theta)$$

$$- \frac{\cos p}{2kT}\{C_0^0 f_0(kT) + C_1^0 f_1(kT)\}\Big],$$

$$C_{2n} = \frac{a_{2n}(0)}{\frac{2}{\pi}\nabla}, \quad \left(\begin{array}{l} a_0^0 = a_0(0), \\ C_0 \equiv C_0^0 \end{array}\right), \quad C_1^0 = \frac{a_1^0}{\frac{2}{\pi}\nabla}, \quad (2.23)$$

$$C_0^0\left(1 + \frac{T}{K_0}\right)^2 - \frac{T}{K_0}C_1^0 = 1, \quad (2.24)$$

$$\gamma = \frac{R}{\rho g \nabla\left(\frac{\nabla}{L^3}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{128}{\pi K_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\bar{H}^*|^2 \sec\theta\, d\theta, \quad (2.25)$$

$$\bar{H}^* = \sum_{n=0} C_{2n}(-)^n J_{2n}(K_0\sec\theta)$$

$$- \frac{\cos^2\theta}{2K_0 T}\{C_0^0 f_0(K_0 T\sec^2\theta) + C_1^0 f_1(K_0 T\sec^2\theta)\}\cos(K_0\sec\theta), \quad (2.26)$$

$$C_0 \equiv C_0^0.$$

(2.25) を (2.24) の副条件で極小にすればよい。

$$\left(\frac{\pi}{2}\nabla\cdot\frac{\pi}{2}\frac{\cos^2\theta}{K_0^2}\right)^2$$

iii) 球船首型

$\sigma(x)$ は (2.15) で与えられるものとする。

従って
$$\nabla = -\frac{\pi}{2} a_0(-T) + \frac{2\pi}{K_0}\int_{-T}^{0} a_0(z)\,dz \,, \qquad (2.27)$$

そこで
$$a_0(z) = a_0^0 \frac{z}{T} + a_1^0 \frac{z}{2T}\left(\frac{z}{T}+1\right), \qquad (2.28)$$

とおくと
$$\left.\begin{aligned} a_0(-T) &= -a_0^0 \,, \\ \int_{-T}^{0} a_0(z)\,dz &= -\frac{a_0^0}{2}T - \frac{a_1^0\, T}{12} \,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

$$\therefore \quad \nabla = \frac{\pi}{2} a_0^0 - \frac{\pi T}{6K_0} a_1^0 \,, \qquad (2.30)$$

$$F(K_0\sec^2\theta, \theta) = \frac{\cos^2\theta}{K_0^2}\left[\int_{-1}^{1}\sigma_{xx}(x,-T)\,e^{-ipx}\,dx + 2\cos p\int_{-T}^{0}\sigma_{xz}(1,z)\,e^{kz}\,dz\right], \qquad (2.31)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{K_0^2}\left[-\pi\sum_n a_{2n}(-T)(-)^n J_{2n}(p)\,e^{-kT} + \frac{2\cos p}{kT}\left\{a_0^0 f_0(kT) + a_1^0 f_1(kT)\right\}\right],$$

$$= \frac{2\nabla\cos^2\theta}{K_0^2}\underbrace{\left[e^{-kT}\sum_n C_{2n}(-)^n J_{2n}(p) + \frac{2\cos p}{kT}\left\{C_0^0 f_0(kT) + C_1^0 f_1(kT)\right\}\right]}_{F^*},$$

$$C_{2n} = -\frac{a_{2n}(-T)}{\frac{2}{\pi}\nabla} \,, \quad C_0^0 \equiv C_0 \,, \quad C_1^0 = \frac{a_1^0}{\frac{2}{\pi}\nabla} \,, \qquad (2.32)$$

$$r = \frac{R}{\rho g \nabla \left(\frac{\nabla}{L^3}\right)} = \frac{16\pi}{\pi K_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |F^*|^2 \sec^3\theta\, d\theta \,, \qquad (2.33)$$

副条件
$$1 = C_0 - \frac{T}{3K_0} C_1^0 \,, \qquad (2.34)$$

3. 没水体

モーメントの x 軸上 連続吹出しで表わされる没水体を考えよう。その強さは近似的に断面積 $A(x)$ に比例する。

$$A(x)=\frac{\nabla}{\pi\sin\theta}\sum_{n=0} a_n\cos n\theta \quad ,(a_0=1), \qquad (3\cdot1)$$

とおくと

$$r=\frac{R}{\rho g\nabla\left(\frac{\nabla}{L}\right)^3}=\frac{8K_0^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2K_0T\sec^2\theta}\,|F^*|^2\sec^5\theta\,d\theta, \qquad (3\cdot2)$$

$$F^*=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n a_n J_n(K_0\sec\theta) \quad , \qquad (3\cdot3)$$

低速では石井の半没水船型のように，これに先の尖った Strut (or Sail) を加えると造波抵抗を小さくする事が出来るが高速では干渉効果は少なくてあまり効果が期待出来ない。

この干渉効果は没水体の波の位相と Strut のそれとが K_0 の大きい所で互に逆になる所に起因し，高速ではそれが期待出来ない事による。

1節では一般的な場合を考えるので この場合はそれに含まれるものと考えて扱かわない。

またこれによる没水型船型は高速では船首にくびれが出来て現実的船型にならない。

4. 細長船

前節の没水体から没水体型の水面貫通船型を得る試みは低速では可能であるが，その高次特異性の為に高速では現実的な船型が得られない。

この高次特異性をさけるには $A(\pm1)=A'(\pm1)=0$ とすればよく，この場合 $T\to 0$ とすると所謂細長船が得られる。

$$A(x)=\frac{\nabla}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{2n}\left\{\frac{\sin(n-1)\phi}{n-1}-\frac{\sin(n+1)\phi}{n+1}\right\}, \quad (4.1)$$

$$A''(x)=\frac{\nabla}{\pi}\sum_{n=2}a_n\frac{\cos n\phi}{\sin\phi}, \quad (4.2)$$

$$\nabla=\int_{-1}^{1}A(x)\,dx=\frac{\nabla}{8}\cdot a_2,\quad a_2=8, \quad (4.3)$$

$$r=\frac{8}{TK_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2K_0T\sec^2\theta}|\bar{H}^*|\sec\theta\,d\theta, \quad (4.4)$$

$$\bar{H}^*=\sum_{n=2}(-i)^n a_n J_n(K_0\sec\theta), \quad (4.5)$$

この最適解は高速で前節のものの略々倍になる。（又 $T=0$ でも r は有限である）

これは又2節の場合によく似ているが，やはり2節の場合の方が抵抗が小さくなると考えられる。

5. 圧力分布

前節迄の所謂排水量型船型に関しては所謂線積分項の問題（高速では高次の微少量と考えられるが）とか船型と特異点の対応が線型理論的には簡単だが、もう少し精密にする為に流線追跡をしようとすると水面附近の流線をどう採ればよいかなど理論的な問題点が浮ぶ。

特に水面を貫通するのであるから、船側の水面変位は大変大きくなり、それがよく観察されるように砕けて飛沫となり抵抗成分となり得ると考えられるがそれを予測する理論が今の所見当らない。

その点で圧力分布は線型理論の範囲内でConsitentな理論模型を提供し、船型の計算も可能であり、飛沫抵抗も予測しうる。
また飛沫の出ない船型も容易に求められる。

今迄の結果では飛沫の出ない船型は動的浮力は小さく、また圧力分布面の形状は矩形が据りよく、巾は大きい方が抵抗が小さい。

長さL, 巾Bの矩形面に分布する圧力を
(L≫?)

$$p(x,y) = A \sum_{n,m} a_{nm} \sin n\varphi \sin m\psi \quad , \quad (5.1)$$

とおこう。

$$\left(x = -\frac{L}{2}\cos\varphi ,\ y = -\frac{B}{2}\cos\psi \right)$$

$$\rho g \nabla = \iint p(x,y)\,dx\,dy = \frac{\pi^2}{16} L B \cdot A\, a_{11}$$

となるから

$$a_{11} = 1$$

とおくと

$$A = \frac{16 \rho g \nabla}{\pi^2 L \cdot B} \quad , \quad (5.2)$$

造波抵抗は

$$R = \frac{K_0^2}{\pi \rho U^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F|^2 \sec^3\theta\, d\theta \quad , \quad (5.3)$$

$$F = \iint p(x,y)\, e^{iK_0(x\cos\theta + y\sin\theta)\sec^2\theta}\, dx\,dy \quad , \quad (5.4)$$

であるが

$$\int_0^{\pi} e^{iz\cos\varphi} \sin n\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi n}{z}\, i^{n-1} J_n(z) \quad , \quad (5.5)$$

であるから

$$F = \frac{\pi^2 A \cos^3\theta}{K_0^2 \sin\theta} \sum_{n,m} n\, m\, i^{n+m-2}\, a_{nm}\, J_n(K_0 \sec\theta)\, J_m(K_0 \lambda \sec^2\theta \sin\theta) \quad , \quad (5.6)$$

$$\lambda = B/L$$

$$r = \frac{R}{\rho g \nabla \left(\frac{\nabla}{L^3}\right)} = \frac{128\pi}{K_0 \lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F^*|^2 \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta \quad , \qquad (5 \cdot 7)$$

$$F^* = \sum_{n,m} i^{n+m-2} a_{nm} J_n(K_0 \lambda \sec\theta) J_m(K_0 \lambda s \sec^2\theta \sin\theta) , \quad (5 \cdot 8)$$

圧力分布では幅方向の分布形状は重字で逆凸型とすると干渉効果により発散項が小さくなるようである。

6. 平板滑走面

滑走面の性能は矩形平板の場合が最も良いとされており又Savitskyの有名な実験式があるので少し記して見よう。

Savitskyによれば矩形平板の揚力係数は

$$C_L = \frac{\rho g \nabla}{\frac{\rho}{2} V^2 B} \overset{?}{=} \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^{1.1}\left[\frac{.0120}{\sqrt{\lambda}} + \frac{.0055}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\frac{gB}{V^2}\right] \quad ,(6.1)$$

$\lambda = B/L$ （元の式ではλは之の逆数となっている）

α ; in rad.

この右辺第1項が動的浮力で，第2項が静的浮力の項である。

今 $F = V/\sqrt{gL}$ として その比をとると

$$\frac{\text{動的浮力}}{\text{静的浮力}} = \overset{5.4}{2.18}\lambda F^2 , \quad \cdots\cdots \quad (6.2)$$

となるので 例えば $\lambda = 0.2$ とすると $F \geqq 1.51$ で動的浮力が（静的浮力より）大きくなる事になる。

つまりλの小さい時には余程 F が大きくならないと動的浮力はあまり大きくないと考えられる。

合体

さて (6.1)より $R_p/\rho g \nabla = \alpha$ であるから、

$$r = \frac{R_p}{\rho g \nabla ([illegible])} = \frac{1.826}{\delta^{0.1}\left[\sqrt{\lambda}(.4583+\lambda F^2)\right]^{\frac{1}{11}}} , \quad (6.5)$$

R_p：压力抵抗

となる。

少し数値を計算してみると

δ	λ	F	r	飛沫なし船型（凸形による） r（矩形断面）	r（楕円断面）
.005	0.2	.7071	10.95	3.79	9.14
		1.0	9.43	4.65	23.41
	0.4	.7071	6.88	2.57	3.73
		1.0	5.41	1.97	4.74

となる。

理論計算値の方がもう一つ信頼性がよく判らないので、今の所これから飛沫なし船型が良いと断定はしかねる。

また浸水表面は飛沫なしの方がずっと大きくなるので この点を考えると一層悲観的になる。

しかし飛沫なし船型は深い胴部をもつので波浪中の性能は良いと考えられる。

7. 飛沫抵抗

高速では丸尾によって示されたように艇のまわりの流れ場は翼の場合に近づき、造波抵抗は誘導抵抗に近づく。

しかし本抵抗については翼の場合は（粘性を考えなければ）誘導抵抗のみで例えば細長翼（平板）では近似的に

$$\frac{R_i}{W} = \frac{\alpha}{2} \qquad (7.1)$$

R_i：誘導抵抗、W：排水量、α：迎え角

と与えられるが、滑走板では単純に

$$\frac{R}{W} = \alpha, \qquad (7.2)$$

この差は、翼では前縁吸引力が働くけれど、滑走板ではそれがなく逆に飛沫となって系外に出て行き運動量損失として抵抗となると考えられる。

それ故(7.2)と(7.1)の差は飛沫抵抗と考えてよい。

即ち飛沫抵抗R_sは今の場合

$$\frac{R_s}{W} = \frac{R}{W} - \frac{R_i}{W} = \frac{\alpha}{2}, \qquad (7.3)$$

となって全抵抗Rの半分を占める事になる。

一方矩形平板の揚力は近似的に（今の場合）

$$W = \frac{\pi}{4}\rho B^2 V^2 \alpha\ ,\quad \alpha = \frac{4W}{\pi\rho B^2 V^2} = \frac{4\delta}{\pi \lambda F^2}\ , \qquad (7.4)$$

$$\delta = \nabla/L^3\ ,\quad \lambda = B/L\ ,\quad F = V/\sqrt{gL}$$

と与えられるから (7.2) に代入すると

$$\gamma = \frac{R}{W\cdot\delta} = \frac{4}{\pi\lambda F^2}\ , \qquad (7.5)$$

となるが、これは (6.8) に対応する式である。

数値的にはかなりの差があるが定性的にはよく似ている。

さて丸尾によれば飛沫抵抗は次式で与えられる。

$$R_S^M = \frac{\pi L}{2\rho V^2}\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \{p_0(y)\}^2 dy\ , \qquad (7.6)$$

但し

$$p_0(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p(x, y)\, dx\ , \qquad (7.7)$$

然し今は

$$R_s = \frac{\pi L}{8\rho V^2}\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \sigma^2(y)\, dy\ , \qquad (7.6')$$

ととろう。~~さて~~

$$p(x, y) = A\sum_n \sum_m a_{nm} \frac{\cos n\phi}{\sin\phi} \sin m\varphi\ , \qquad (7.8)$$

$$x = -\frac{L}{2}\cos\phi\ ,\quad y = -\frac{B}{2}\cos\varphi\ ,$$

とおくと

$$\sigma(y) = A\sum_m \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_{nm} \sin m\varphi\ , \qquad (7.9)$$

$$\rho g \nabla = \iint p(x, y)\, dx\, dy = \frac{LB}{8}\pi^2 A a_{01}\ ,$$

以下 $a_{01} = 1$ とおくことにすると

$$A = \frac{8\rho g \nabla}{\pi^2 L B}\ , \qquad (7.10)$$

ここで，

$$\int_0^{\pi} \sin n\varphi \sin m\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \{\cos(n-m)\varphi - \cos(n+m)\varphi\} \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \left[\sin\overline{(n-m+1)}\varphi - \sin\overline{(n-m-1)}\varphi - \sin(n+m+1)\varphi + \sin(n+m-1)\varphi\right] d\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} &= 0 \quad \text{for } n-m \text{ ; odd.} \\ &= \frac{1}{(n+m)^2-1} - \frac{1}{(n-m)^2-1} \quad \text{for } n-m \text{ ; even} \end{aligned}\right\} \quad (7.11)$$

で $= \frac{4}{3}$ for $n=m=1$, $\frac{-2}{15}$ for $n=3, m=1$, $\frac{36}{35}$ for $n=m=3$.

となるので

$$R_S = \frac{\pi L B}{16 \rho V^2} A^2 \sum_n b_n b_m \int_0^{\pi} \sin n\varphi \sin m\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{4 W \delta}{\pi^3 \lambda F^2} \sum (\quad " \quad) \quad , \quad b_m = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_{nm} \, ,$$

$$r_S = \frac{R_S}{W \cdot \delta} = \frac{16}{\pi^3 \lambda F^2} \left[\frac{4}{3} b_1^2 - \frac{4}{15} b_1 b_3 + \frac{36}{35} b_3^2 + \cdots \right], \quad (7.12)$$

$$= \frac{64}{3\pi^3 \lambda F^2} \left[1 - \frac{1}{5} b_3 + \frac{27}{35} b_3^2 + \cdots \right], \quad (\because a_{01} = 1)$$

$$\left(\frac{64}{3\pi^3} = .6880 \right)$$

となって 飛沫抵抗は a_{0m} にのみ関係し，また a_{01} 以外の項，つまり y方向の揚力分布を変化させても あまり減少する事なく，どちらかと言うと 一般に この他の第1項より増えると考えられる。 つまり殆ど 排水量と λ と F で決まってしまう。

そして実際19頁の表つまり(6.5)式の値の約半分程度の値となるのは興味深い。

またこのように見て来ると同表で飛沫なし船型(細形面)の抵抗が平板の約半分となっているのも面白い。

(7.12)は(7.5)の半分とは大分異なるし、(7.6)についても微分の疑念はあるが、いずれにしても飛沫抵抗はλとFを決めれば後は排水量のみで一意的に決まる値と考える事は出来そうである。

一方でF=1前後では造波抵抗はまだ前方の圧力分布で干渉効果による減少が期待される。

いずれにしても飛沫なし船型はやはり有利なように見えるが、さらに飛沫あり船型について最適化を試みる必要はあろう。

この時(7.6)が正しいならば簡単であるので再検討の要がある。つまり今の所解析的に正しいと考えられるけれども、それを数値的に確かめなければならない点に疑念が残るのである。

8. 矩形圧力面の極値問題

長さL, 幅Bの矩形圧力面を

$$p(x,y) = A \sum_{n=0}\sum_{m=1} a_{nm} \frac{\cos n\varphi}{\sin\varphi} \sin m\varphi \qquad (8.1)$$

$$x = -\frac{L}{2}\cos\varphi \ , \quad y = -\frac{B}{2}\cos\varphi$$

とおこう。

$$\rho g V = \iint p\, dx\, dy = \frac{\pi^2}{8} LBA\, a_{01} ,$$

となるから　$a_{01} = 1$　とおくと

$$A = \frac{8\rho g V}{\pi^2 LB} , \qquad (8.2)$$

抵抗は造波抵抗(R_W)と船体抵抗 R_S の和で

$$R_T = R_W + R_S , \qquad (8.3)$$

$$R_W = \frac{K_0^2}{\pi\rho U^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |F|^2 \sec^5\theta\, d\theta , \qquad (8.4)$$

$$F = \iint p(x,y)\, e^{iK_0(x\cos\theta + y\sin\theta)\sec^2\theta}\, dx\, dy , \qquad (8.5)$$

$$R_S = \frac{\pi L}{8\rho V^2}\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \sigma^2(y)\, dy , \qquad (8.6)$$

$$\sigma(y) = \frac{A}{2}\sum_{m}^{\infty} b_m \sin m\varphi , \qquad (8.7)$$

$$\left(b_m = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_{n,m} \right)$$

クッタの条件は

$$\sum_{n=0} a_{n,m} = 0 , \qquad (8.8)$$

$$\therefore \quad \sum_{n=0} a_{2n,m} = -\sum_{n=0} a_{2n+1,m} , \quad \sum_{n=0} (-)^n a_{n,m} = 2\sum_{n=0} a_{2n,m} . \qquad (8.9)$$

$$\frac{\pi L\Omega}{4\rho V^2} \cdot \frac{64\,\rho g^2 \nabla L^2}{\pi^4 L^2 F^2} \cdot \frac{16 W\cdot\delta}{\pi^3 \lambda F^2}$$

$$\delta(y) = A \sum_{m=1} i^m b_m \sin m\varphi, \quad b_m = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_{n,m}, \quad (8.10)$$

$$r_s = \frac{R_s}{W\,\delta} = \frac{16}{\pi^3 \lambda F^2} \sum_{\nu,\mu} \left(\quad \right) b_\nu b_\mu \int_0^\pi \sin\nu\varphi \sin\mu\varphi \sin\varphi\, d\varphi, \quad (8.11)$$

$W = \rho g \nabla$, $\delta = \nabla / L^3$, $\lambda = B/L$, $F = V/\sqrt{gL}$,

右辺の積分は(7.11)参照。

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi i^n} \int_0^\pi e^{iz\cos\varphi} \cos n\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi n i^{n-1}} \int_0^\pi e^{iz\cos\varphi} \sin n\varphi \sin\varphi\, d\varphi,$$

であるから

$$F = \frac{ALB\pi^2}{4} \sum_n \sum_m a_{n,m}\, i^n J_n(K_0 \sec\theta)\, \frac{m i^{m-1}}{\frac{K_0 B}{2} \sec^2\theta \sin\theta} J_m\!\left(\frac{K_0 B}{2} \sec^2\theta \sin\theta\right)$$

$$= \frac{\pi^2 AL}{2 K_0 \sec^2\theta \sin\theta} \sum_{n=0} \sum_{m=0} (2m+1)\, i^{n+2m} a_{n,2m+1} J_n(K_0 \sec\theta) J_{2m+1}\!\left(\frac{K_0 B}{2} \sec^2\theta \sin\theta\right),$$

$$r_W = \frac{R_W}{W\cdot\delta} = \frac{16}{\pi \lambda^2 F^2} \sum_{n,\nu} \sum_{m,\mu} (2m+1)(2\mu+1)\, i^{n+2m-\nu-2\mu} a_{n,2m+1} a_{\nu,2\mu+1} \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_n(K_0 \sec\theta) J_\nu(K_0 \sec\theta) J_{2m+1}\!\left(\frac{K_0 B}{2} \sec^2\theta \sin\theta\right) J_{2\mu+1}\!\left(\frac{K_0 B}{2} \sec^2\theta \sin\theta\right) \times \frac{d\theta}{\cos\theta \sin^2\theta}$$

$$\cdots (8.12)$$

n, ν は共に even, 又は odd のみ値がある。

極値問題は

$$\gamma_T = \gamma_W + \gamma_S$$

について　$a_{01} = 1$,　$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = 0$

なる副条件で　係数を決めることとなる。

所で　$\nabla = L \cdot B T_E$,　T_E：有効吃水

と定義すると　(8.11)から

$$R_S/W \propto \frac{(T_E/L)}{F_r^2}\left[\qquad\right]$$

となって　略々 T_E/L に比例する

一方

$$R_W/W \propto \frac{(T_E/L)}{\lambda F_r^2}\left[\qquad\right]$$

となるので　造波抵抗は λが大きくなると小さくなる。

つまり滑走面としては　吃水が小さく　幅の大きい方が有利である。