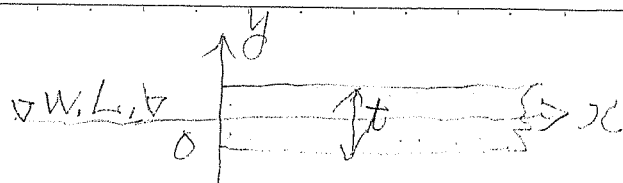


1. 静的二次元問題

氷は x の正軸に沿って



無限遠方まであるとする。

平衡方程式は 氷の中心線の上への変位を w と
すると

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho g w = 0, \quad \dots (1.1)$$

E はヤング率, $I = \frac{t^3}{12}$; 断面二次モーメント

t : 氷厚, ρ : 氷密度, g : 重力の定数

今無次元化して

$$\left. \begin{aligned} w &= t u \\ x &= t \xi \end{aligned} \right\} \quad \dots (1.2)$$

とすると (1.1) は

$$\frac{d^4 u}{d\xi^4} + a^4 u = 0, \quad \dots (1.3)$$

$$a^4 = \frac{\rho g t^4}{EI} = \frac{12 \rho g t}{E}, \quad \dots (1.4)$$

$x \gg 1$ で正則な解は

$$u = A e^{\alpha \xi} + A e^{\bar{\alpha} \xi}, \quad \dots (1.5)$$

$$\alpha = a e^{\frac{3}{4}\pi i} = \frac{(-1+i)}{\sqrt{2}} a, \quad \dots (1.6)$$

と与えられる。

原点に集中力 F が働くとすると

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{EI}{l} \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{EI}{l} [\alpha^2 A e^{\alpha z} + \alpha^2 \bar{A} e^{\bar{\alpha} z}] \quad (1.7)$$

$$F = EI \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{EI}{l} \frac{d^3 u}{dz^3} = \frac{EI}{l} [\alpha^3 A e^{\alpha z} + \alpha^3 \bar{A} e^{\bar{\alpha} z}]$$

ここで

$$M|_{z=0} = 0, \quad \alpha^2 A + \alpha^2 \bar{A} = 0 \quad (1.8)$$

$$F|_{z=0} = F = (\alpha^3 A + \alpha^3 \bar{A}) \frac{EI}{l}$$

式(1)より $A = -\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right) \bar{A} = \bar{A}$ (1.9)

したがって式(1)より

$$F = \frac{EI}{l} A (\alpha^3 + \bar{\alpha}^3) = \frac{EI}{l} \sqrt{2} A a^3$$

$$\therefore A = \frac{l^2 F}{\sqrt{2} EI a^3} = \frac{a F}{\sqrt{2} \rho g l^2} \quad (1.10)$$

(1.7)に代入すると

$$M = \frac{l F}{\sqrt{2} a} \left(-i e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{a z}{l}} + i e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{a z}{l}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2} l F}{a} e^{-\frac{a z}{\sqrt{2} l}} \sin\left(\frac{a z}{\sqrt{2} l}\right)$$

$$F = \frac{EI}{l} e^{-\frac{a z}{\sqrt{2} l}} \left(\cos\left(\frac{a z}{\sqrt{2} l}\right) + \sin\left(\frac{a z}{\sqrt{2} l}\right) \right)$$

よって $u = \frac{\sqrt{2} l^2 F}{EI a^3} e^{-\frac{a z}{\sqrt{2} l}} \cos\left(\frac{a z}{\sqrt{2} l}\right) \quad (1.12)$

3.11.15

$$M_{\max}(M) = \frac{\sqrt{2} l F}{a} e^{-\frac{\pi}{4}} \quad (1.13)$$

at $\alpha = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.1107.$

その点における最大引張応力 σ は

$$\sigma = M / (I/y) \Big|_{y=l/2} = \frac{l^2 F}{\sqrt{2} a I} e^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{12 F}{\sqrt{2} a t} e^{-\frac{\pi}{4}} \quad (1.14)$$

$$w(0) = \frac{\sqrt{2} l^3 \pi}{F I a^3} = \frac{12 \sqrt{2} F}{E a^3} \quad (1.15)$$

硬めの氷と12*
曲げ強度

$$E = 9.5 \times 10^8 \text{ Kg/m}^2.$$

$$\sigma_f = 5 \text{ Kg/cm}^2 = 5 \times 10^4 \text{ Kg/m}^2$$

与えられた値とすれば

l	F (Kg/m)	x (m)	$w(0)$ (m)	$F/w(0)$	$x/w(0)$
1 m	770	18.5	.060	12,833.	308.3
2 m	1,820	31.3	.086	21,163	364.

$$F = k_I \cdot w(0)$$

(Kg/m) (m)

2. 常微分方程式問題

平衡方程式は

$$D \Delta^2 w(x, y) + \rho g w(x, y) = 0, \quad (2.1)^*$$

$$D = \frac{EI}{1-\nu^2} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} w &= u(\xi, \eta) \\ x &= t\xi \\ y &= t\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

と無次元化する

$$\Delta^2 u(\xi, \eta) + a^4 u(\xi, \eta) = 0, \quad (2.4)$$

$$a^4 = \frac{\rho g t^4}{D} = \frac{12(1-\nu^2) \rho g}{E}, \quad (2.5)$$

これは弾性床上の板の方程式そのものであり、Text*
に引いて見ると、無限板上の原点にFなる力が加
わった時の変位は、2次式で与えられる。
(ポアソンの方程式)

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= - \frac{F t}{2\pi D a^2} \operatorname{Rei}(\gamma) \\ &= - \frac{F a^2}{2\pi \rho g t^3} \operatorname{Rei}(\gamma'), \quad \dots (2.6) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos \theta \\ \eta &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots z = ar',$$

* Timoshenko, Krieger "Theory of Plates and Shells"
Chap. 8,

$$\text{ker } x \underset{x \rightarrow 0}{\approx} -\frac{x^2}{4} \log \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} + \dots, \quad (2.7)$$

よって

$$w(0,0) = \frac{F a^2}{8 \rho g t^2} = \frac{F}{8 \sqrt{\rho g D}}, \quad (2.8)$$

$\rho g D \approx 2.4 \times 10^6$

前の数値を入れると氷厚 1 m の場合

$F \approx 1 \text{ ton}$ 程度 $\frac{1}{2} \text{ mm}$ の程度で小さくなる。

よって

$$\text{ker}(x) \underset{x \gg 1}{\rightarrow} -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right), \quad (2.9)$$

であり、

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] u, \quad (2.10)$$

であるから M_r の最大点は近似的に $-\frac{1}{8} \pi e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 \text{ker}(x) &\approx -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \ln \left[e^{-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}i - \frac{3\pi}{4}i} \right] \frac{1}{8} \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{8}\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{5}{8} \pi \sqrt{2}, \quad \frac{x}{a} = \frac{5\sqrt{2}\pi}{8a} \approx \frac{2.7768}{a} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Max}(M_r) &\approx \frac{D a^2}{24 D a^2} \frac{F t}{\sqrt{\frac{\pi}{2x}}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi}{8}\right) \\ &= \frac{F t}{24} \sqrt{\frac{2}{5\sqrt{2}}} e^{-\frac{5\pi}{8}} \end{aligned}$$

これは大きくなるか？

次に $y < 0$ の半平面をおおっていて、
 x 軸が自由辺である場合を考えよう。

あらためて

$$S(R) = -\frac{1}{2\pi} \text{Re} \{ H_0^{(2)}(R e^{-\frac{\pi i}{4}}) \}, \quad (2.12)$$

よかえ、自由辺の積分部分を T としよう。

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{新しい } x, y \text{ はこの意味で} \\ x = a\xi, \quad y = a\eta \end{array} \right\}$$

さて

$$S = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \cos kx \, dk \left[\frac{e^{-\sqrt{k^2+i}|y-y'|}}{\sqrt{k^2+i}} - \frac{e^{-\sqrt{k^2-i}|y-y'|}}{\sqrt{k^2-i}} \right], \quad (2.13)$$

よかえから T は

$$T = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \cos kx \, dk \left[\frac{e^{-\sqrt{k^2+i}|y-y'|}}{\sqrt{k^2+i}} - \frac{e^{-\sqrt{k^2-i}|y-y'|}}{\sqrt{k^2-i}} \right], \quad (2.14)$$

よかえは

x 軸上で

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (S+T) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} (S+T) = 0 \end{array} \right\} \text{for } y=0, \quad (2.15)$$

(2.13), (2.14) を (2.15) に代入すると。

$$\left. \begin{aligned} A(1+\bar{H}) - \bar{A}(1+\bar{H}) &= 0 \\ C(1-\bar{H}) - \bar{C}(1-\bar{H}) &= 0 \\ A &= \frac{\{(1-\nu)R^2+i\}}{\sqrt{R^2+i}} e^{-\sqrt{R^2+i}y'} \\ C &= \{(1+\nu)R^2-i\} e^{-\sqrt{R^2+i}y'} \end{aligned} \right\} \dots (2.16)$$

とすると

$$\left. \begin{aligned} \bar{H} &= 1 - \frac{2\bar{C}(A-\bar{A})}{\Delta} = -1 - \frac{2A(C-\bar{C})}{\Delta} \\ \Delta &= A\bar{C} - \bar{A}C \end{aligned} \right\} (2.17)$$

$$\Delta = \left[\frac{\{(1-\nu)R^2+i\}\{(1+\nu)R^2+i\}}{\sqrt{R^2+i}} - \frac{\{(1+\nu)R^2-i\}\{(1-\nu)R^2-i\}}{\sqrt{R^2-i}} \right] x e^{-\{\sqrt{R^2+i}+\sqrt{R^2-i}\}y'}$$

とすると、今更らに

$$T(p, q) = -S(p, \bar{q}) + U(p, q), \quad (2.18)$$

$$\bar{q} = R, \quad \bar{q} \equiv (x, -y')$$

$$U(p, q) = \text{Re} \{ V \}, \quad (2.19)$$

とすると、さらに $x=y'=0$ とすると

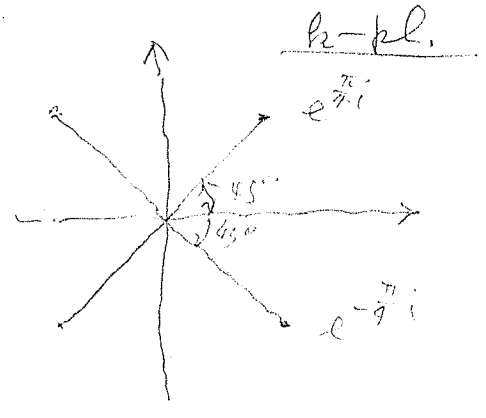
$$S(p, q) + T(p, q) = U(p, q) = \text{Re} \{ V(R) \}, \quad (2.20)$$

for $x=y'=0$

$$V \Big|_{s=0} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \omega k \times e^{-\sqrt{1+\nu^2} \omega} \Delta(\omega)}{\sqrt{1+\nu^2} \Delta(\omega)} d\omega, \quad (2.21)$$

上記の積分を評価するには

右平面の特異性は図の
 ような cut 2 組と後は
 $\Delta(\omega)$ の根があるときは
 右 pole である。



そこでこれを代めよう。

これは (2.17) から

$$\frac{(1-\nu^2)k^4 + 2ik^2 - 1}{\sqrt{1+i}} = \frac{(1-\nu^2)k^4 - 2ik^2 - 1}{\sqrt{k^2 - i}}, \quad (2.21)$$

両辺を自乗して整理すると

$$A k^8 + 2k^4 - 1 = 0, \quad (2.22)$$

$$A = (1-\nu^2)(3+\nu^2)$$

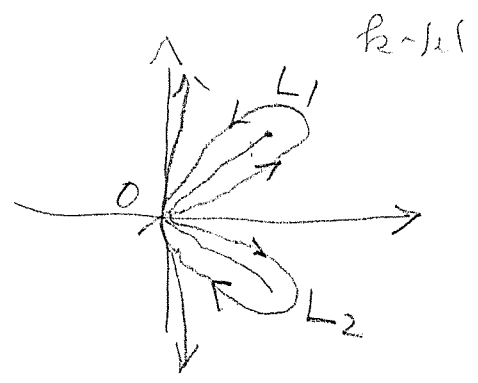
$$k^4 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-A}}{A}, \quad (2.23)$$

ν	A	k_+^4	k_-^4	k_+^2	k_-^2
1/3	2.6667	-1.09307	.34307	$\pm i 1.04550$	$\pm .58572$
1/4	2.87169	-1.03358	.33698	$\pm i 1.01665$	$\pm .58050$

これを (2.21) に代入して見ると どの根も (2.21) を満足しない, 従つて Δ は零点を持たない事がわかる。

さて次に $x, y \gg 1$ の時を考へよう。

積分路を次に右図のようにとり。



$$V = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{\frac{i k x - \sqrt{k^2 + i} y}{(1 - \nu) k^2 - i}} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + i} \Delta(k)} - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} e^{\frac{-i k x - \sqrt{k^2 + i} y}{(1 - \nu) k^2 - i}} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + i} \Delta(k)}, \dots (2.24)$$

とおく。

y軸上の積分は

$$\Delta(0) = \sqrt{2}i$$

そので $\Delta(k) \sim O(1/k)$ となり今は無視出来る。

Cut 上の積分は、定常点法で求める。

定常点は経路 L_2 上にのみあつて。

$$\begin{aligned} \text{その } E \text{ 上 } & k = e^{-\frac{\pi i}{4}} \cos \theta, \\ & x = r \cos \varphi, \quad (\varphi > 0 \text{ のほう}) \\ & y = r \sin \varphi, \\ \text{とすれば } & \theta = \varphi \text{ となる。} \end{aligned}$$

$$V \doteq -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sqrt{r} \cos(\theta-\varphi)} \frac{1}{F(\theta)} d\theta, \quad (2.25)$$

$$F(\theta) = \sin \theta \{ 1 + (1-\nu) \cos^2 \theta \} \div [\\ [\{ 1 + 2 \cos^2 \theta + (1-\nu^2) \cos^4 \theta \} \sin \theta \\ - i (\sin^4 \theta - \nu^2 \cos^4 \theta) \sqrt{1 + \cos^2 \theta}]$$

$$V \doteq -\sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-\sqrt{r} \rho + \frac{3}{8} \pi i} F(\varphi), \quad (2.26)$$

$$\therefore U = \operatorname{Re}\{V\} = -\sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} |F(\varphi)| \cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{3}{8}\pi - \beta\right), \\ F(\varphi) = |F(\varphi)| e^{i\beta(\varphi)}, \quad (2.27)$$

$$U = \frac{1}{3} r^{1/2}$$

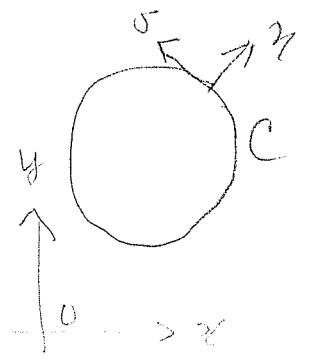
θ	$ F $	β
0	0	0
30°	.4971	-6.3°
45°	.5934	8.53
60°	.6870	24.2
90°	.7071	45°

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} |F| e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}} - \beta - \frac{\pi}{8}\right) \\ \frac{\partial^3 U}{\partial r^3} = 0 \quad \text{for} \quad \frac{r}{\sqrt{2}} = \beta + \frac{3}{8}\pi \\ M_{\max} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right] = \frac{|F|}{\sqrt{\pi r}} e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} \Big|_{r=}$$

実際には半無限の割れ目がありその終点に力を加える解が望ましいがかなり面倒な問題で結果の新数値解を求めるより他ないのて以下少し一般に任意形状の穴があった場合について考察する。

(2.12) で定義した核関数は

$$S(p, Q) \doteq \frac{R^2}{8\pi} \log R, \quad (2.29)$$



のよりの特異性を持つので薄板の曲げ問題の時と全く等しく、その表現がそのまゝな領域内で正則な係数で一般に deflection は *

$$w(Q) = \int_C \left[q S(p, Q) - m \frac{\partial S(p, Q)}{\partial n_p} + M(p, Q) \frac{\partial w}{\partial n} - Q(p, Q) w \right] ds_p, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} m &= \nu \Delta w + (1-\nu) \left[\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right], \\ q &= \frac{\partial}{\partial n} (\Delta w) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

* M, Q は m, q の w を S に置きかえたものである。
* 別所河辺, 炭田(由)協等 178号 昭41年55号

さて今 Q' 点に 単位力を加えると、全体の変位は

$$W = S(Q', Q) + w(Q), \quad (2.32)$$

境界条件は $C \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} m(W) &= m(S) + m = 0. \\ g(W) &= g(W) + g = 0 \end{aligned} \quad \text{for } C, \quad (2.33)$$

$S(Q', Q)$ は Q, Q' が C 外にありとすると C の中で Q, Q' の間に C を Q から Q' まで輸送する仕事 Q が Q' まで輸送する仕事 Q' とは異なる

$$\int_C \left[g(W) S(P, Q) - m(W) \frac{\partial S}{\partial n} + M(P, Q) \frac{\partial S(Q', P)}{\partial n} - Q(P, Q) S(Q', P) \right] dS_P = 0, \quad (2.34)$$

(2.34) の右辺 u を加えると、(2.33) により

$$w(Q) = \int_C \left[M(P, Q) \frac{\partial W}{\partial n} - Q(P, Q) W \right] dS_P, \quad (2.35)$$

似てよび方にて

$$w(Q) = \int_C \left[g' S(P, Q) - m' \frac{\partial S}{\partial n} \right] dS_P, \quad (2.36)$$

のような表現も可能であり、この時 g', m' は未知関数で境界条件 (2.33) によって求められる。

(2.35) の場合は右辺の $W, \frac{\partial W}{\partial n}$ は変位とその他余剰 Q のものであり、(2.36) の場合の m', g' は w の値と直接関係なくはならない点に注意。

(2.35) の場合の境界積分方程式は (2.35) から

$$W - S(Q', Q) = \int_C \left[M \frac{\partial W}{\partial n_p} - QW \right] dS_p, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial W}{\partial n_Q} - \frac{\partial S(Q', Q)}{\partial n_Q} = \int_C \left[\frac{dM}{dn_Q} \frac{\partial W}{\partial n_p} - \frac{\partial Q}{\partial n_Q} W \right] dS_p$$

となる。

特に C が x の正軸である場合を考へ、かつ Q' が x の負軸上にあるとすると、 y に関して対称であるから、右辺の2項はなくなり、積分方程式は次の一つだけになる。

$$W(Q) - S(Q', Q) = \int_0^{\infty} M(p, Q) \frac{\partial W}{\partial y_p} dx_p, \quad (2.38)$$

と解をとりて W を求めそこからモーメント等を計算する。

この方向を考へると (2.36) の方が便利で

上と同じ y に関して対称とすると境界積分方程式は

$$m(Q) = \int_0^{\infty} M_0(p, Q) dx_p, \quad \dots (2.39)$$

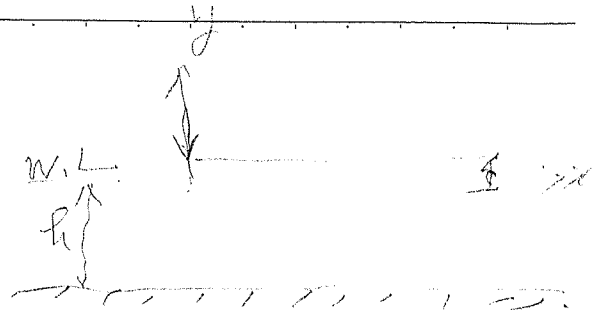
より。

ここで $M_0(p, Q)$ は (2.31) の演算を Q 点に関して行う事を意味する。

この場合はこれを解いて、またこの式ですぐモーメントを計算出来る。

3. 動的二次元問題

力が同一周波数 ω で
正弦的に変動する
場合を考えよう。



氷は薄くとして近似的に $y=0$ で水面変位 $w(x)$ とすると氷の下面の圧力 $P(x,t)$ は速度ポテンシャル Φ を用いて

$$P(x,t) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{y=0} - \rho g \eta(x,t), \quad (3.1)$$

自由表面では

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho g \eta(x,t) = 0, \quad (3.2)$$

氷板の運動方程式は

$$EI \frac{\partial^4 \eta(x,t)}{\partial x^4} + \rho_i \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t), \quad (3.3)$$

ここに ρ_i は氷の密度とする。

なお左辺第1項の EI は §2 に合わせて D とする
(1.1) とは同じであるが

方が良いと考えられるが、今は §1 に合わせて

このしておく。

$$\begin{cases} \Phi(x,t) = \text{Re}[-i\omega \phi(x) e^{i\omega t}] \\ \eta(x,t) = \text{Re}[w(x) e^{i\omega t}] \end{cases} \quad (3.4)$$

§1. Chapter "Water Waves"

とおくと (3.3) は

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + (\rho g - \omega^2 \rho_i) w(x) + \rho \omega^2 \phi(x) \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.5)$$

となる。

水深が深い時は、この微積分方程式と
なつて、以下簡單の爲に浅水としよう。

浅水理論では $\phi(x, y)$ は y 方向に定数で、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K^2 \right) \phi(x) = 0, \quad K = \frac{\omega}{\sqrt{g h}} \quad (3.6)$$

氷板の面で境界条件は、

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = \frac{w(x)}{h} \quad (3.7)$$

したがって (3.7) を (3.5) に代入すると (l.c.)

$$\left[EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} + (\rho g - \omega^2 \rho_i) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho \frac{\omega^2}{h} \right] \phi(x) = 0, \quad (3.8)$$

$$\text{今 } \phi(x) = e^{p(x)}$$

とおくと上式は

$$p^6 + a p^2 + b = 0, \quad (3.9)$$

$$a = (\rho g - \rho_i \omega^2) \frac{h^3}{EI}$$

$$b = \rho g K^2 \frac{h^6}{EI}$$

(3.10)

係数 a は

$$\omega^2 = \frac{P_0}{P_i t} \quad (3.11)$$

の時 0 となるか? これは (かなり) 高周波となり, 実用上は

$a > 0$ と考えればよく, ^{近似}Stokes の方法を踏襲して

(3.9) は $p^2 = 12$ の 3 次式であり, その根は

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= 4 - v < 0 \\ \beta_2 &= u\varepsilon - \varepsilon^2 v \\ \beta_3 &= u\varepsilon^2 - \varepsilon v \end{aligned} \right\} \varepsilon = l^{\frac{2}{3}} \pi i \quad (3.12)$$

$$u = \left(\sqrt{\frac{12}{4} + \frac{q^3}{27}} - \frac{q}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad v = \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

したがって p の根は

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= i\sqrt{|\beta_1|}, \quad p_2 = -i\sqrt{|\beta_1|} \quad ; \text{pure imaginary} \\ p_3 &= \sqrt{\beta_2}, \quad p_4 = -\sqrt{\beta_2} \\ p_5 &= \sqrt{\beta_3}, \quad p_6 = -\sqrt{\beta_3} \end{aligned} \right\} \beta_3 = \overline{\beta_2} \quad (3.13)$$

$x \rightarrow \infty$ で "有限な他 12 個の異なる根は

p_2, p_4, p_6 のみ" あるから.

$$\phi(x) = A_2 e^{p_2 x} + A_4 e^{p_4 x} + A_6 e^{p_6 x} \quad (3.14)$$

x の負方向で (3.6) により, やはり x の負方向に進行波のみを考えると

$$\phi(x) = B e^{iKx}, \quad \text{for } x < 0, \quad (3.15)$$

$x=0$ での条件は

$$\left. \begin{aligned} \phi(-0) &= \phi(+0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=-0} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=+0} \end{aligned} \right\} (3.16)$$

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = EI h \frac{d^4 \phi}{dx^4} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.17)$$

$$F = EI \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=0} = EI h \frac{d^5 \phi}{dx^5} \Big|_{x=0}$$

より

$$A_2 + A_4 + A_6 = B$$

$$p_2 A_2 + p_4 A_4 + p_6 A_6 = iK + B$$

$$p_2^4 A_2 + p_4^4 A_4 + p_6^4 A_6 = 0$$

$$p_2^5 A_2 + p_4^5 A_4 + p_6^5 A_6 = \frac{F h^5}{EI}$$

(3.18)

これを解いて

$$\alpha = \frac{F h^5}{EI}$$

とおくと

$$A_2 = \frac{\alpha}{\Delta} [p_6 p_4^4 - p_4 p_6^4 - ikt (p_4^4 - p_6^4)] ,$$

$$A_4 = \frac{\alpha}{\Delta} [p_2 p_6 (p_6^3 - p_2^3) - ikt (p_6^4 - p_2^4)] ,$$

$$A_6 = \frac{\alpha}{\Delta} [p_4 p_2 (p_2^3 - p_4^3) - ikt (p_2^4 - p_4^4)] ,$$

(3.18)

$$\Delta = (p_2 - ikt)(p_4 - p_6) p_2^4 p_6^4 + (p_4 - ikt)(p_6 - p_2) p_2^4 p_6^4 + (p_6 - ikt)(p_2 - p_4) p_2^4 p_6^4 ,$$

これからモメントの最大の値を計算して 3) のように表せばよい。

ここで (3.14) 右辺の 2, 3 項は 指数関数的に小さく存在と表えられるので

$$\phi(x) \xrightarrow{x \gg 1} A_2 e^{p_2 \frac{x}{\tau}} , \quad (3.20)$$

したがってモメントは

$$M(x) \underset{x \gg 1}{\doteq} E I \frac{p_2}{\tau^4} A_2 p_2^4 e^{p_2 \frac{x}{\tau}} , \quad (3.21)$$

p_2 は 純虚数であるから $x \gg 1$ では モメントの絶対値は 無限遠まで一定と存在!