

序論

ダクト付プロペラの理論的実験的研究はすでに数多く行われているがその多くは荷重の大さい場合であつて小さい場合の実験的研究は少ない。

又船体との干渉に関する理論的研究は少ない。
(指内)

本体が回転体である場合は計算が簡単であつて簡単な場合について計算をされているようであるが今の新文献を入手しえない。

又總結的記述も見当たらない。

本体が一般的に回転体ならばプロペラのモデルとして Actuator Disc を使えば流れ関数を使って理論は大変簡単である。

そこで以下その理論について記し、本体、ダクト付プロペラを各向の相互干渉を計算する式を示し、次に本体が細長く、ダクトの長さをか直径に比して短い場合の近似理論の大約について述べる。

なお遂にダクトが大変長い場合は軸流ポンプとなるのでそのような場合のダクトの影響について細長体理論的に解を求め軸流ポンプのイムペラとプロペラの相違点について考察した(附録D)。

さて従来の研究ではダクトとプロペラを推進器系と見て船体との相互干渉を考へる立場を採つてゐるがこのように考へると船体との相互干渉には船体とダクト、船体とプロペラの二つの成分があり、後に見るやうにこの二つは少し性格が異なるので

昭和 年 月 日

あまり便利とは言えない。

もう一つの考えはダクトも船体の一部と見てそれらとプロペラの干渉を考える立場であるか。このように考えればダクトなしのプロペラの場合と全く同様に船体との干渉は推力減少率のみで表現出来る。

勿論この場合の推力減少率はダクトによる部分が大きく寄与するのでダクトなしの場合とは大変異なる。

このように考えると系全体の推進効率 η は普通の船の場合と全く同様に

$$\eta = \eta_{pd} \eta_r \eta_h \quad (1)$$

η_{pd} : プロペラ単独効率 (ダクト付)

η_r : relative relative efficiency, $\eta_r = 1$

η_h : 船体効率

$$\eta_h = \frac{1-t}{1-w} \quad (2)$$

と表わされるが今併流率 w がポテンシヤル、摩擦両成分に

$$w = w_p + w_f \quad (3)$$

のように別けられるものとし、よく知られているように

$$t = w_p \quad (4)$$

ある関係が成立しているものとする。(2)に代入して t は小さいとすると

$$\eta_h = \frac{1}{1-w_f} \quad (5)$$

となるので近似的に推力減少率は η_h に関係しない事になる。

非粘性流体では $\eta_0 = 1$ であるからこれは当然な関係である。

$\eta_0 = 1$ であるから結局 η を良くするには w_f を除けばプロペラ単独効率を良くすればよい。

このプロペラ効率は勿論ダクトと翼多響によって変化する筈であるがその変化の様子は所録 D に見ようようにダクトなしの場合の効率を η_{p0} とおくと

$$\eta_{pd} = \eta_{p0} \left(1 + \frac{s}{2}\right) \quad (6)$$

となる(ダクトが空の場合)

一方 η_{p0} は荷重度とピッチ比の関数であるが一般に荷重度とピッチ比が小さければ大きくなる。

従って与えられた推力に対してはプロペラ円への流入速度が大きければ η_{p0} も大きくなる。

これが増速ダクトであるが従来の説明ではダクトが推力を持つ故に性能が高いとされる。

つまりダクトの受けもつ推力がプロペラの所要推力は減り、かつプロペラの水の流入速度は増加するのであるから荷重度は減り、従ってプロペラ効率は増加する。

さて魚雷等にあつてはダクトは空漏防止、騒音減少の目的で、減速ダクトが用いられるが、この場合はダクトが抵抗力をもち、かつフロペラの水の流入速度が減少する爲にフロペラの見掛けの荷重は大さくなる爲に効率が悪くなるのである。

しかしこの時も(6)によるダクトの爲の効率増加はあるわけである。

(6)はダクトが大さき場合であるから実際にはこの値より小さい)

それ故に効率減少をさけるには極力速度減少をさければよい。

なお空洞現象の心配がなければ増速ダクトを使用すればフロペラ回転数を増かせる事が出来かつ効率も増えて大変都合が良い。

この辺の理解の爲にもう一度非粘性流体の場合を考えよう。

その時は無限後流における運動量変化を考えるとダクトの受ける抵抗力はフロペラの抵抗力増加と等しくなりダクトの有無に關わらず推進効率は等しい。(η₀=1) 運動量定理で

$$\left. \begin{aligned} \eta_p &= \eta_a \eta_t =, \\ \eta_a &= \frac{1}{1 + \frac{S}{\sigma}} \\ \eta_t &= 1 - \frac{w'}{2cw} \end{aligned} \right\} (7)$$

となり s が与えられる故 η_h はダクトの有無によつて不変で「 η_{pd} 」若しピッチ比が同じに保たれるならば ω を大きくしなければならぬので 附録 D (18) 式 (10) より ω/ω_0 は小さくなり η_h は大きくなる。

一方 回転数を同じとするとピッチ比を大きくしなければならぬので 同式からは ω/ω_0 が大きくなり 効率が悪くなる。

しかしこれは s の小さい時の事で 荷重度が増大になると 一般にピッチ比の大きいプロペラの方が効率がよいのでやはり効率は良くなる。(螺旋理論による)

このような観点から見ると (1) 以下の式で述べた $\eta = \eta_{pd}$ なる関係は ダクトによる増減の度合が大きい時は成立つかどうか疑わしく、その度合が小さい時の近似的関係と考へておくのが無難であろう。

なお A.D. モデルは 2重反転プロペラ あるいは 14ペターとステーターで後流の回転をなく出来る場合の理論モデルと考へる事も出来る。

* 船体効率の定義式 η_{pd} の分母 $(1-w)$ は 普通 プロペラの誘導速度は含めなければ、もし之を含めると

$$\eta_h = \frac{1-t}{1+\frac{s}{\omega}-w}$$

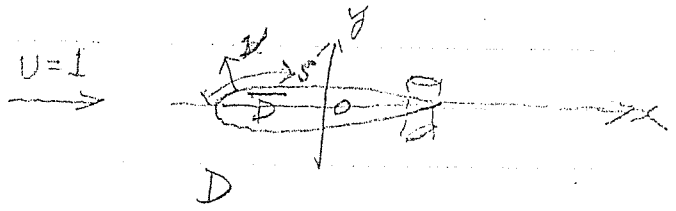
としなければならず、この時 プロペラ単独効率も

$$\eta'_{pd} = \frac{T(1+\frac{s}{\omega}-w)}{Qn}$$

のように油を含まない速度を使わねばならぬ。(ホブツ効率)
(プロペラ損失)

1. 本体とダクトのまわりの流場

円筒座標系を円の外に
採り速度ポテンシャルと
流れ関数 ψ を次のように
定義する。



$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} (1)$$

一様流れは

$$\left. \begin{aligned} \phi &= x \\ \psi &= \frac{1}{2} y^2 \end{aligned} \right\} (2)$$

である故 必要に応じてこれを加え

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= x + \phi \\ \Psi &= \frac{y^2}{2} + \psi \end{aligned} \right\} (3)$$

なる関数を考える。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= -\frac{\partial x}{\partial \nu} \quad \text{or} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \\ \psi &= -\frac{y^2}{2} + \text{const} \quad \text{or} \quad \Psi = \text{const} \end{aligned} \right\} (4)$$

となる。

こゝでは速度ポテンシャルを円環状カーネル
 ν - ν で次のように表現しよう。

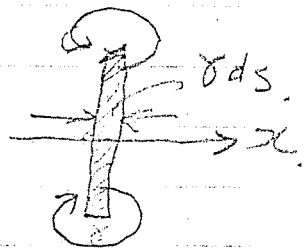
$$\phi(x, y) = \int \delta(x-x', y-y') S(x, y; x', y') ds(x', y'), \quad (5)$$

$$ds = \sqrt{dx'^2 + dy'^2}$$

$$S(x, y; x', y') = \frac{1}{4\pi} \int_0^{y'} \int_0^{2\pi} \frac{2}{R^2} \left(\frac{1}{R} \right) y' dy' d\theta, \quad (6)$$

$$R^2 = (x-x')^2 + y^2 - 2yy' \cos \theta + y'^2$$

S は又右図のように半径 y' の円板上の doublet 分布のポテンシヤルでもある。



よりするとこの円板面の前後では T 度 (γ ds) のジヤコフがある。

一方 Φ は物体内で 0 とすると。

このジヤコフは物体表面にある率に等しい。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \gamma = \frac{\partial \chi}{\partial n} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (7)$$

なる式を得る。

それ故 γ は物体表面の速度 γ のものを与える事になり、これが表現 (5) の利点である。

(5) に対応する流れ関数は、

$$\psi(x, y) = \int \gamma(x', y') G(x, y; x', y') ds(x', y'), \quad (8)$$

$$G(x, y; x', y') = \frac{y}{4\pi} \frac{2}{2y} \int_0^{y'} \int_0^{2\pi} \frac{y' dy' d\theta}{R} \quad (9)$$

故に S, G は無限遠方で 0 になる。

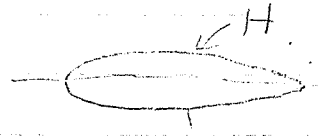
$$\left. \begin{aligned} S &\longrightarrow \frac{xy'^2}{4\pi^3} \\ G &\longrightarrow -\frac{(yy')^2}{4\pi^3} \end{aligned} \right\} r^2 = x^2 + y^2 \quad (10)$$

とするとこの φ は doublet となり、φ, ψ は共に 0 になる。

$$G = -\frac{y'y}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{R} d\theta,$$

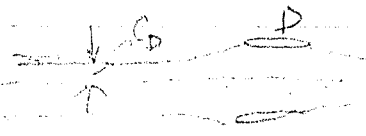
ここで今本体のみがある時の速度ポテンシャルを ϕ_H , 流れ関数を ψ_H とすると境界条件は

$$\psi_H|_H = -\frac{y^2}{2}|_H \quad (11)$$



ダクトのみある時は ϕ_D, ψ_D とすると

$$\psi_D|_D = -\frac{y^2}{2}|_D - C_D \quad (12)$$

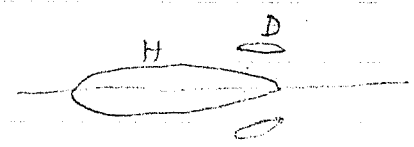


ここで C_D は未定常数で D 上の流れ関数の値を示し、又明らかにダクト内の流量である。

(境界条件の積分方程式を解く時 後端にクッタの流出条件を指定すれば ψ の任意定数は定まる)

次に両者が共にあると

$$\psi = \int_H \gamma G ds + \int_D \gamma' G ds \quad (13)$$



と書けるが互の影響はあまり大きくないと考えられるので ψ 1 近似的には (11), (12) の解を ψ_H, ψ_D とすると

$$\left. \begin{aligned} \psi(H) &= \psi_H + \psi_H' \\ \psi(D) &= \psi_D + \psi_D' \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで H, D は R 上 H, D 上の点を意味するものとする。以下同様。

$$\int \psi_H' G(H, H) ds = - \int \psi_D G(D, H) ds$$

$$\int \psi_D' G(D, D) ds = - \int \psi_H G(H, D) ds + C_D - C_D'$$

よって ψ_H', ψ_D' が与えられる。 C_D' は新しい任意定数。

昭和 年 月 日

この左辺の σ_D, σ_H が $\sigma(D), \sigma(H)$ に一致すれば"正解と
なるので 逐次近似的に 2 の過程を繰り返す事
よって 解を求め事もある。

昭和 年 月 日

2. Actuator Disc

x' 点にある半径 D , ホース半径長の Actuator Disc の速度ポテンシヤルは、無限後流のスリット^o 速度を S とすると

$$\phi_A(x, y) = S [S_A(x, y; x', D) - S_A(x, y; x', b)], \quad (1)$$

と与えられる。

これは又 半径長の穴のあいた円板上の一端を吹き込み分布の速度ポテンシヤルである。無限後流中では 附録 A (18) より

$$u_A = \frac{\partial \phi_A}{\partial x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} S & \text{for } D > y > b \\ 0 & \text{for } D < y, b > y \end{cases} \quad (2)$$

又 $x = x'$, つまり運動円板上では

$$u_A = \begin{cases} \frac{S}{2} & \text{for } D > y > b \\ 0 & \text{for } y > D, y < b, \end{cases} \quad (3)$$

そこで得られる推力を求めよるために "無限後流" における運動量の増加分を見積ると (2) より

$$\Delta M = \rho \left[\left(1 + \frac{S}{2}\right)^2 - 1 \right] A = 2\rho S \left(1 + \frac{S}{2}\right) A, \quad (4)$$

$$\text{但し } A = \pi(D^2 - b^2),$$

一方カウリの定理により、吹き込みと L.T. のプロペラに働く抵抗力は $[4\rho S u]$ (3) より

$$R = \rho A S \left(1 + \frac{S}{2}\right), \quad (5)$$

これ故 (4) から (5) を差引いて * 推力

$$T_E = \rho A S \left(1 + \frac{S}{2}\right), \quad (6)$$

* フォントは、 $T_E = R$ 又 "航空流体力学"

昭和 年 月 日

を得る。

これはプロペラの運動量理論によるものと一致する。
 又 本機おびダクトが存在する場合もこれらの
 運動パラメータは無限遠方では doublet で
 近似されるので運動量の收支はなく、それが
 あるのは Actuator Disc のみであるから 全体の
 系の推力は常に (6) で表わされる。

しかしそのような時プロペラ円への流入速度
 (は変るので 推力はラガリーの定理より
 ΔT がだけ増加する。

$$\Delta T = -2\pi\rho S \int_0^D u(x', y') y' dy' , \quad \dots (7)$$

ここに u は本機おびダクトが作動した板上
 に誘起する速度であるから $u = \frac{1}{2} V$ なる故

$$\Delta T = -2\pi\rho S [\psi(x', D) - \psi(x', 0)] , \quad (7')$$

$$\text{又} \quad 2\pi [\psi(x', D) - \psi(x', 0)] = -w A , \quad \dots (8)$$

のように伴流係数 w を定義すると

$$\Delta T = +\rho S w A \quad \dots (9)$$

S_A に対する流れ関数を G_A としよう。(所録 A)

S_A は又

$$S_A(x, y; x', y') = \frac{y'}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(y' - y \cos \theta)}{\omega^2} \left\{ \sqrt{(x-x')^2 + \omega^2} + (x-x') \right\} d\theta, \quad (10)$$

$$\omega^2 = y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \theta$$

と書けて 無限上流では

$$S_A \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{y'^2}{4|x-x'|}, \quad (11)$$

となる。

G_A は、

$$G_A(x, y; x', y') = \frac{(yy')^2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{\omega^2} \left[1 + \frac{x-x'}{R} \right] d\theta$$

$$= \frac{B}{4} + \frac{(x-x')(yy')^2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{\omega^2 R} d\theta, \quad (12)$$

$$\frac{B}{4} = \begin{cases} \frac{y'^2}{4} & \text{for } y > y' \\ \frac{y^2}{4} & \text{for } y < y' \end{cases}$$

(12) 右辺第 2 項は $x \rightarrow +\infty$ で A に近づく奇関数

で G_A は $x \rightarrow -\infty$ で 0 に近づく。

そこで 右辺第 2 項積分関数を表わすのが、数値計算上は このまゝ 数値積分を実行する方が早い。

昭和 年 月 日

3. ダクトと作動円板, 本体と作動円板
ダクトのみを流れる数は §1 (12) により

$$\psi_D = \int_D \gamma_D G ds, \quad \dots (1)$$

ポロパラをDとすると

$$\psi = \int_D \gamma(D) G ds + s G_A, \quad \dots (2)$$

境界条件は

$$-\frac{\gamma^2}{2} + C' = \int_D \gamma(D) G(D, D) ds + s G_A(P, D), \quad (3)$$

§1 (12) より

$$\gamma(D) = \gamma_D + \gamma_D'' \quad \dots (3)$$

とおくと

$$\int_D \gamma_D'' G(D, D) ds = C_D - C' - s G_A(P, D), \quad (4)$$

となり, この場合はポロパラとの相互影響がないのでこれより $\gamma(D)$ は一意的に決まる。

本体とポロパラの場合も全く同様に suffix D を H にかえるだけであり又 C_D, C' は 0 である。

$$\gamma(H) = \gamma_H + \gamma_H^P \quad \dots (5)$$

ポロパラ(15)がよい近似ならば3巻第1にある場合は

$$\gamma \doteq \gamma_0 + \gamma' + \gamma^P \quad (6)$$

となり全く簡単になる。

しかし正確には本体とダクト間の相互干渉
があるので、もっと複雑になる。

実際的考え方としては次の二つの立場がある。

一つはダクトペアとしてダクトとフロペアを推進装置
と見て本体との干渉を考える立場である。

これを DP-H case と名づけよう。

もう一つは本体とフロペアを最初考えてダクト
をつけた影響を考える立場でこれを HP-D case
と名づけよう。

それに対して上述の場合作る DP, HP case
と置ける事になるとその場合相互干渉がかなりの
大変当であるからこれらの場合は相互干渉
が出て複雑になるのである。

4. 相互干渉力

ベルヌーイの定理より物体面上の圧力 p は
§ 1 (7) によって、

$$p = \frac{\rho}{2}(1 - \gamma^2) \quad , \quad \gamma = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (1)$$

よって物体に働く力は抵抗力とす

$$X = \pi \rho \int \gamma^2 \frac{\partial x}{\partial s} y ds = -\pi \rho \int \gamma^2 y \frac{\partial y}{\partial s} ds \quad (2)$$

あるいは $\gamma \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} = -v$

互に代

$$X = -\pi \rho \int \gamma v y ds = \pi \rho \int \gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} ds \quad (3)$$

実際には γ が求まっているので (2) 式が計算に便利である。

又 (3) 式によるとき

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \int \gamma \frac{\partial G}{\partial x} ds$$

の核 $\frac{\partial G}{\partial x}$ は物体の内と外では ± 1 や ∓ 1 がある
ので次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s}$$

又

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\gamma}{2} y + \int \gamma \frac{\partial G}{\partial n} ds$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \dots + \int \gamma \frac{\partial G}{\partial s} ds$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\gamma}{2} y \frac{\partial x}{\partial n} + \int \gamma \frac{\partial G}{\partial x} ds \quad (4)$$

これに上掲は 物体の内外の値の平均値とする。
元来 (3) の式により。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \int \sigma \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}} ds, \quad \dots (4)$$

となりこれを (3) に代入すると

$$X = 2\pi P \int \sigma ds \int \sigma \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}} ds, \quad (5)$$

となる。

物体が 2 つならば $\overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}}$ は奇関数であるから
上式から

$$X = 0, \quad \dots (6)$$

となるが "3 つ 4 つ" の背理が得られる。

これと本体とが外がある時は

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_H + \psi_D \\ \psi_H &= \int_H \sigma \psi ds, \\ \psi_D &= \int_D \sigma \psi ds \end{aligned} \right\} (7)$$

とあくと H に働く力は (5) により

$$X_H = 2\pi P \int_H \sigma \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_D}{\partial x} \right] ds.$$

"あるが右辺が 1 項は (6) を導くと同様に
して 0 となるので"

$$X_H = 2\pi P \int_H \sigma \frac{\partial \psi_D}{\partial x} ds, \quad \dots (8)$$

同様 1212 Dに働く力は

$$X_D = 2\pi P \int_D \gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{1}{H} ds, \quad (9)$$

となるがさらに積分順序の逆交換により

$$\begin{aligned} X_D &= 2\pi P \int_D \gamma ds \int_H \gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} ds = \\ &= -2\pi P \int_H \gamma ds \int_D \gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} ds = -X_H, \quad (10) \end{aligned}$$

となる。

今 $\gamma = \frac{X_D}{\frac{P}{A} A}$, A : Disc Area, (11)

の量を定義してこの

一般に増速ノズルでは $\gamma < 0$, 減速ノズルでは $\gamma > 0$ と考えられる。

次に本体とプロペラがある時を考えよう。この時は本体はプロペラの存在により抗力が ΔR だけさがるがプロペラは同じ量だけ推力がさがる。

これをこの増えたプロペラの推力を基準にして考えると実際さがる推力はそこから ΔR だけ差引いたものであるのでこれを推力減少と言う。

上の場合と同様

$$\Delta R = 2\pi P \int_H \gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{1}{P} ds \quad (12)$$

但し $\psi_P = s \psi_A$

定義式より

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sigma G \quad (13)$$

と存る故、上式は

$$\begin{aligned} \Delta R &= 2\pi \rho S \int_H \sigma G(p, H) ds \\ &= 2\pi \rho S \psi_H(p) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{より } \psi_H = \int_H \sigma G ds$$

これは (14) に一致する

2πψは流量を与える故、今伴流係数wと記す

$$2\pi \psi_H(p) = -w A \quad (15)$$

と定義すれば

$$\Delta R = -\rho S w A \quad (16)$$

を得る。

一次推力減少率は上記のよりに定義される。

$$\epsilon^* = \frac{\Delta R}{T} = \frac{\Delta R}{T_0} \cdot \frac{T_0}{T} = (1 - \epsilon) \frac{\Delta R}{T_0}$$

T₀は (15) で与えられるが (16) を代入すれば

$$\frac{\epsilon}{1 - \epsilon} = \frac{w}{1 + \frac{\sigma}{2}}, \text{ or } \epsilon = \frac{w}{1 + \frac{\sigma}{2} + w} \quad (17)$$

これは少し複雑であるので、ここでは次のような定義をしておこう。

$$\epsilon = \frac{\Delta R}{T_0} = w, \quad T_0 = \rho S A \quad (18)$$

ε, σ等が小さければ、近似的に

$$\epsilon = w$$

と存る。

昭和 年 月 日

3巻後存する時本俵の受ける抗力は

$$\frac{\Delta R_H}{\frac{1}{2}A} = r' + s\epsilon' \quad (19)$$

ただし r', ϵ' は 天々 (10), (14), (18) に より 考へ
 されるが 今 は (10), (14) 式 の $\delta(H)$ は ダクト, ペラ
 の 影響 を 受けて いる ので 肩 符 (') を つけて おく。

次に ダクト 外 の 受ける 抗力は

$$\frac{\Delta R_D}{\frac{1}{2}A} = -r' + s\epsilon'' \quad (20)$$

$$\frac{1}{2}A(s\epsilon'') = 2\pi r s \int_D \delta G(p, D) ds$$

$$= 2\pi r s \psi_D(p)$$

$$\psi_D(p) = \int_D \delta G ds$$

(21)

となる。

又 水 柱

$$\frac{(\Delta R_H + \Delta R_D)}{\frac{1}{2}A} = s(\epsilon' + \epsilon'') \quad (22)$$

増速ダクトでは $\epsilon'' < 0$, 減速ダクトでは $\epsilon'' > 0$
 と考へられる。

角速度 γ と γ' を推進器と考える時の推進
増加率 (式(18)の定義による) は (19)より

$$\epsilon = \frac{\gamma'}{\delta} + \epsilon' \quad (24)$$

となる。

つまり γ と γ' の影響による ϵ' 以外に γ/δ なる
量があるので 増進ダクトでは ($\gamma' > 0$) 推力
減少はダクトの影響が少し増えると
考えられる。

これは実験にも現われているようである。

一方 本体とダクトも一体と考える場合は γ'
が互に打消し合うので (22)より

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon'' \quad (25)$$

となり 増進ダクトでは推力減少は減り
減進ダクトでは増加する率になる。

もし $\epsilon'' < 0$ ならばダクトは推力をまじ、 $\epsilon'' > 0$ ならば
ダクトには推力が働らく。

5. 線型近似(I) 本体

§1(5)の表現において、物体が大変細長いとすると

$$\lim_{y \rightarrow 0} S(x, y; x', y') = \frac{y'^2}{4} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R} \right), \quad (1)$$

$$R^2 = (x-x')^2 + y^2,$$

$$\gamma \doteq \frac{\partial x}{\partial s}, \quad (2)$$

と仮定して §1(5)は

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 A(x') \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{R} dx', \quad (3)$$

$$A(x') = \pi y'^2(x'), \quad (4)$$

あるいは部分積分して

$$\phi(x, y) = \frac{-1}{4\pi} \frac{A(-1)}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial A}{\partial x'} \frac{dx'}{R}, \quad (5)$$

この右辺第1項は先端の平坦な場合に必要項である。

ここで回転楕円体座標を導入して

$$\begin{cases} x = \zeta \mu, & y = \sqrt{\zeta^2 - 1} \sqrt{1 - \mu^2} \\ \zeta = \cosh \eta, & \mu = \cos \xi \end{cases} \quad (6)$$

とかくと物体の近づくときは $\zeta \doteq 1$, $\eta \doteq 0$ であるから近似的に

$$x \doteq \mu, \quad y \doteq \eta \sqrt{1 - \mu^2}, \quad (7)$$

ルジャンドルの球面関数を使うと、

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n(\xi) P_n(\mu) P_n(\mu'), \quad (8)$$

より、

$$\frac{d}{dx} A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (9)$$

と展開出来るならば

$$\int P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

正しく (5) は

$$\phi(x, y) = -\frac{A(-1)}{4\pi\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu) Q_n(\xi), \quad (10)$$

$\xi \rightarrow 1$ の時、

$$Q_n(\xi) \rightarrow \log \frac{2}{\eta} - \sigma_n \rightarrow \log \frac{2}{\eta} \quad (11)$$

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$$

よって、(10) の右辺の近似値を代入すれば (10) は (12)

$$\phi(x, y) = -\frac{A(-1)}{4\pi\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{dA(x)}{dx} \right) \log \left(\frac{2\sqrt{1-x^2}}{y} \right), \quad (12)$$

又 (10) より

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \mu} = \frac{A(-1)(x+1)}{4\pi\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n'(\mu) Q_n(\xi)$$

$$= \frac{A(-1)(x+1)}{4\pi\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} - \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} \cdot \log \left(\frac{2\sqrt{1-x^2}}{y} \right), \quad (13)$$

これをプロパラ円に積分して半流率を求めると

$$\frac{\pi}{4} (D^2 - b^2) w = \int_{-D/2}^{D/2} u y dy = \frac{1}{2} (D^2 - b^2) \frac{d^2 A}{dx^2} \log(2\sqrt{1-\gamma^2})$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d^2 A}{dx^2} \left[D^2 \left(\frac{1}{2} - \log \frac{D}{\gamma} \right) - b^2 \left(\frac{1}{2} - \log \frac{b}{\gamma} \right) \right]$$

$$- \frac{A(-1)}{4(x+1)^2} (D^2 - b^2), \quad \dots \quad (14)$$

b → 0 ならば

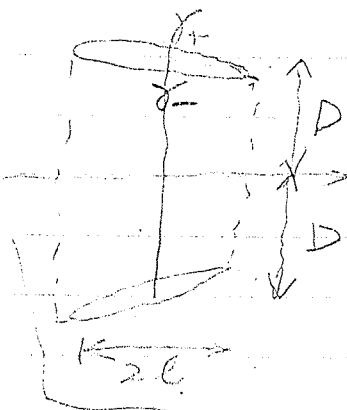
$$w = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 A}{dx^2} \left[\log \left(\frac{2\sqrt{1-\gamma^2}}{D} \right) + \frac{1}{2} \right]$$

$$- \frac{A(-1)}{4\pi(x+1)^2}, \quad \dots \quad (14')$$

6. 線型近似 (II) ダクト

ダクトの厚みが薄く目づ曲がりの
 小さいとすると特異点は半径 D
 の円筒面上にあると見なしてよい。

その特異点 $\gamma(x)$ は



$$\phi(x, y) = \int_{-L}^L [\gamma_+(x') S(x, y; x', D + h(x')) - \gamma_-(x') S(x, y; x', D - h(x'))] ds$$

$h(x)$ は厚み曲線とする。

今 $\gamma_+(x') \doteq +\gamma(x') \doteq \frac{\partial \alpha'}{\partial s}$ である

又同時に $\gamma(x) = \gamma_+(x') - \gamma_-(x')$ (1)
 とおくと

$$\phi(x, y) = \phi_+(x, y) + \phi_-(x, y) \quad (2)$$

$$\phi_+(x, y) = 2 \int_{-L}^L h(x') \frac{\partial}{\partial y'} S(x, y; x', D) dx' \quad (3)$$

$$\phi_-(x, y) = \int_{-L}^L \gamma(x') S(x, y; x', D) dx' \quad (4)$$

よって厚みの影響と γ の影響を分離
 出来る。

なお (3) において

$$\frac{\partial}{\partial y'} S(x, y; x', D) = \frac{D}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R} \right) d\theta \quad (5)$$

$$R^2 = (x-x')^2 + y^2 - 2yD \cos\theta + D^2$$

であるからこれは円環上の x 方向に軸をとる

昭和 年 月 日

ダブレットであるから本格的に前節の近似と同じである。

さてダットの厚みは薄いものが望ましいと見られるし又は長(x)が与えられれば"適ちに見積れるものもあり"以下この項は省略出来るものとして考えたい。

つまり以下(4)のφをダットのポテンシャルとして考察を定めよう。

φを決める為の境界条件は

$$v(x, D) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=D} = \int_{-l}^l \gamma(x') S(x, y; x', D) dx' \quad (6)$$

ここでこれを積分方程式となり、v=0 に対して齊次解を有する。

為此更に

$$\gamma(+l) = 0, \quad (7)$$

なる Kutta の条件を指定して唯一解を得る。

なお境界条件は仰角α, キャンバーβの平板円環については

$$v(x, D) = -\alpha + \beta x, \quad (8)$$

プロペラの影響は

$$v(x, D) = \int_{-l}^l \frac{\partial S_A(x, y)}{\partial y} dx' + \frac{S}{D} \Gamma(x, D) \quad (9)$$

本節の算式は前節(12)の近似を使えば

$$v(x, D) = - \frac{A(-)D}{4\pi l \sqrt{(C+)^2 + D^2}} - \frac{1}{2\pi D} \frac{\partial A(x)}{\partial x} \quad (10)$$

昭和 年 月 日

このようにして解を求めた後に、

$$\psi(x, y) = \int_{-l}^l \delta(x') G(x, y; x', D) dx' \quad (11)$$

によって $\psi(x, D)$ を計算すれば、抵抗力減少等は計算出来、又 7.2 の条件は線型的に加之合せ、車輪が出来る大変便利になるわけである。

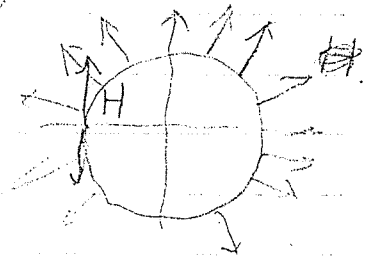
なお、ダクトの半径方向に働く力(揚力)はすべて互に打消し合っているから、これは最高 Hoop Stress H となる。

すなわち

$$H = \frac{\rho}{2} v^2(z, D) \int_{-l}^l (\theta_+^2 - \theta_-^2) dx,$$

$$= 2\rho D \int_{-l}^l \delta(x) dx = 2\rho D P, \quad \dots (12)$$

$$P = \int_{-l}^l \delta(x) dx, \quad \dots (13)$$



又 x 方向の力については、(13) のように与えられるが、本評の影響等は近似的に (10) により、

$$X_b = -\pi P \int_{-l}^l \delta \psi_{,11} D dx = \frac{\pi P P}{2} \left[\frac{dA(x)}{dx} + \frac{A(x) D^2}{2\{(2x)^2 + D^2\}^{3/2}} \right], \quad (14)$$

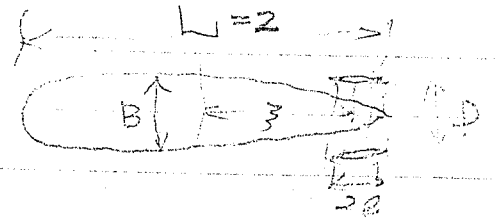
or

$$\frac{X_b}{H} = \frac{1}{2} \frac{1}{4D} \left[\frac{dA(x)}{dx} + \frac{A(x) D^2}{2\{(2x)^2 + D^2\}^{3/2}} \right], \quad \dots (14')$$

ただし x はダクト中心の原点からの座標とする。

7. 計算について

線型近似理論によつて
大凡の見積りは可能で
あり、又重ね合せが出来る
ので大略設計にはこの方
が便利であるが組かり
数値を得るには正しく境界値問題をとらねば
ならない。



毎元2 §1 に述べたように流れ関数を使うのが
便利であつて、今

$$\psi(x, y) = \psi_H(x, y) + \psi_D(x, y) + \psi_A(x, y), \quad (1)$$

$$\psi_H = \int_{-1}^1 \gamma_H(x, y') G(x, y; x', y') ds,$$

$$\psi_D = \int_{3-2}^{3+2} \gamma_D G ds, \quad (2)$$

$$\psi_A = s [G_A(x, y; 3, D) - G_A(x, y; 3, b)],$$

とおけるから本体内および外上の境界条件式
を解けばよい。
境界条件は、

$$\psi(x, y)|_H = -\frac{y^2}{2}, \quad (3)$$

$$\psi(x, y)|_D = -\frac{y^2}{2} + C,$$

で任意定数Cはクツタの条件で決められる。

$$\gamma_D(x, y)|_{\text{Trailing edge}} = 0, \quad (4)$$

昭和 年 月 日

(3)を一挙に解くのは計算機容量の点から去あたり得策ではないように思われるので逐次近似的に次のような方法を考へよう。

$$\left. \begin{aligned} \psi_H(x, y) &= \psi_{H0}(x, y) + \psi_{H1}(x, y) + \dots + \psi_{HN}(x, y) + \dots \\ \psi_D &= \psi_{D0} + \psi_{D1} + \dots + \psi_{DN} + \dots \end{aligned} \right\} (5)$$

次に近似としては夫々単独である時の境界条件式を作ると

$$\left. \begin{aligned} \psi_{H0}(x, y) &= -\frac{y^2}{2} \quad \text{on } H. \\ \psi_{D0}(x, y) &= -\frac{y^2}{2} + C_0, \quad \text{on } D \end{aligned} \right\} (6)$$

次にアロペラの影響を入れると

$$\left. \begin{aligned} \psi_{H1}(x, y) &= -\psi_A(x, y), \quad \text{on } H. \\ \psi_{D1}(x, y) &= -\psi_A + C_{1P}, \quad \text{on } D. \end{aligned} \right\} (7)$$

本件とアロペラのみ、あるいはタウトとアロペラのみならばこれで計算は完了である。

γ を夫々の和でよく

$$\left. \begin{aligned} \gamma_H &= \gamma_{H0} + \gamma_{H1}, \\ \gamma_D &= \gamma_{D0} + \gamma_{D1}. \end{aligned} \right\} (8)$$

となり力は式(2)で計算可なり(5)。

$$X = -\pi P \int \gamma^2 y \frac{d\gamma}{ds} ds,$$

$$= -\pi P \int \left[\gamma_0 \gamma_1 + \gamma_1^2 \right] y \frac{\partial \gamma}{\partial s} ds, \quad (9)$$

$$\int \gamma_0^2 y \frac{\partial \gamma}{\partial s} ds = 0.$$

昭和 年 月 日

この近似では

$$\psi_{H2} = -[\psi_{D0} + \psi_{D1}], \text{ on } H, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (10)$$

$$\psi_{D2} = -[\psi_{H0} + \psi_{H1}] + C_2, \text{ on } D,$$

以降は

$$\psi_{HN} = -\psi_{D(N-1)}, \text{ on } H, \quad \left. \begin{array}{l} \text{for } N \geq 3. \\ \\ \end{array} \right\} (11)$$

$$\psi_{DN} = -\psi_{H(N-1)} + C_N, \text{ on } D,$$

と繰り返してゆけばよい。

よって

$$\gamma = \sum_{N=0}^{\infty} \gamma_N, \quad (12)$$

となり、これを用いて (9) に力がかぎ計算出来る。

又一方 §4 (15) (16), (21), 又は §2 (18) により
7° 2' 位置における $\psi_H + \psi_D$ より ΔT が求められる。
この時

$$\left. \begin{array}{l} \psi_D(3, D) = -\frac{D^2}{2} + C = -\frac{D^2}{2} + \sum_{N=0}^{\infty} C_N, \\ \psi_H(3, L) = -\frac{L^2}{2}, \end{array} \right\} (13)$$

なる関係があるので $\psi_H(3, D)$, $\psi_D(3, L)$ のみ計算すればよい事になる。(6) ~ (11) より

$$\left. \begin{array}{l} \psi_H(3, D) = \sum_{N=0}^{\infty} \psi_{HN}(3, D), \\ \psi_D(3, L) = \sum_{N=0}^{\infty} \psi_{DN}(3, L), \end{array} \right\} (14)$$

昭和 年 月 日

であるから上の計算の途中の(5.1), (5.2)における右辺の値の和として示される。

これは(9)式による計算値の総括として利用出来る。

以上で本件およびダクト上の速度分布と相互干渉力、推力減少が示される。

昭和 年 月 日

附録 A 核関数

$$S(x, y; x', y') = \frac{1}{4\pi} \int_0^{y'} \int_0^{2\pi} \frac{2}{2R} \left(\frac{1}{R} \right) y' dy' d\theta, \quad (1)$$

$$G(x, y; x', y') = \frac{y}{4\pi} \frac{2}{2y} \int_0^{y'} \int_0^{2\pi} \frac{y' dy' d\theta}{R}, \quad (2)$$

$$R^2 = (x-x')^2 + y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \theta,$$

$$S_A(x, y; x', y') = \int_0^x S(x, y; x', y') dx', \quad (3)$$

$$G_A(x, y; x', y') = \int_0^x G(x, y; x', y') dx', \quad (4)$$

先ずこれをベッセル関数による表示に変換しよう。

$$\frac{1}{R} = \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_0(t\omega) dt$$

$$\omega^2 = y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \theta$$

であるから

$$\int_0^{y'} \int_0^{2\pi} \frac{y' dy' d\theta}{R} = 2\pi y' \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_0(ty) J_1(ty') \frac{dt}{t},$$

よって

$$S(x, y; x', y') = \frac{y'}{2} \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_0(ty) J_1(ty') dt, \quad (5)$$

$$G(x, y; x', y') = -\frac{yy'}{2} \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_1(ty) J_1(ty') dt, \quad (6)$$

これを積分して ($x < x'$ とし)

$$-\frac{e^{-t}}{t}$$

昭和 年 月 日

$$S_A(x, y; x', y') = -\frac{y'}{2} \int_0^{\infty} e^{-t(x-x')} J_0(ty) J_1(ty') \frac{dt}{t}, \quad (7)$$

$$G_A(x, y; x', y') = \frac{yy'}{2} \int_0^{\infty} e^{-t(x-x')} J_1(ty) J_1(ty') \frac{dt}{t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S_A = -S, \quad \frac{\partial}{\partial x} G_A = -G, \quad (9)$$

ゆえに

$$J_0(t\omega) = J_0(ty) J_0(ty') + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ty) J_n(ty') \cos n\theta,$$

2本を微分して

$$\frac{(y'-y\cos\theta)}{\omega} J_1(t\omega) = J_0(ty) J_1(ty') - 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ty) J_n'(ty') \cos n\theta,$$

左辺/右辺が異なるから両辺を積分して

$$J_0(ty) J_1(ty') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(y'-y\cos\theta)}{\omega} J_1(t\omega) d\theta, \quad (10)$$

$$J_1(ty) J_1'(ty') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(y'-y\cos\theta)}{\omega} J_1(t\omega) \cos\theta d\theta,$$

$$J_1(ty) J_0'(ty') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(y-y'\cos\theta)}{\omega} J_1(t\omega) d\theta.$$

右辺の係数を得るからこの後2式を差引いて

$$J_1(\frac{x}{y}) + \frac{J_1(\frac{x}{y'})}{2} = J_0(\frac{x}{\omega})$$

右辺の係数を利用すると

$$\frac{1}{t} J_1(ty) J_1(ty') = \frac{yy'}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{\omega} J_1(t\omega) d\theta, \quad (11)$$

(10), (11) を (7) (8) に代入して

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} J_1(t\omega) dt = \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \omega^2}} \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} J_1(t\omega) \frac{dt}{t} = \frac{\sqrt{x^2 + \omega^2} + x}{\omega^2}$$

右の積分を実行すると

$$\begin{aligned} S_A(x, y, 0, y') &= -\frac{y'}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{y' - y \cos \theta}{\omega^2} d\theta \int_0^{\infty} e^{-t(x)} J_1(t\omega) \frac{dt}{t} \\ &= -\frac{y'}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(y' - y \cos \theta)}{\omega^2} [x + \sqrt{x^2 + \omega^2}] d\theta, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_A &= \frac{(yy')^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\omega^2} d\theta \int_0^{\infty} e^{-t(x)} J_1(t\omega) dt \\ &= \frac{(yy')^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\omega^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \omega^2}}\right) d\theta, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{y' - y \cos \theta}{\omega^2} d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{for } y > y' \\ -\frac{1}{y'} & \text{for } y < y' \end{cases} \\ \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\omega^2} d\theta &= \begin{cases} \frac{1}{2y^2} & \text{for } y > y' \\ \frac{1}{2y'^2} & \text{for } y < y' \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{1}{1 - 2t \cos \theta + t^2} = \frac{1}{1 - t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n t^n \cos n\theta, \quad \text{for } t < 1,$$

$\epsilon_0 = 1, \epsilon_n = 2 \text{ for } n \geq 1$

これより

$$\begin{aligned} S_A(x, y, 0, y') &= -xA = -\frac{y'}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{y' - y \cos \theta}{\omega^2} \frac{x^2 + \omega^2}{\sqrt{x^2 + \omega^2}} d\theta \\ &= xA - \frac{x^2 y'}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(y' - y \cos \theta) d\theta}{\omega^2 \sqrt{x^2 + \omega^2}} - \frac{y'}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(y' - y \cos \theta) d\theta}{\sqrt{x^2 + \omega^2}} \\ A &= \begin{cases} 0 & \text{for } y > y' \\ \frac{1}{2} & \text{for } y < y' \end{cases} \quad (15) \end{aligned}$$

$$G_A(x, y; 0, y') = \frac{1}{4} B(y, y') + \frac{\omega(y y')^2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\omega^2 \sqrt{x^2 + \omega^2}} \quad (16)$$

$$B(y, y') = \begin{cases} y'^2 & \text{for } y > y' \\ y^2 & \text{for } y' > y \end{cases}$$

与え

$$G_A(x, y; 0, y') \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} B(y, y') \quad (17)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

$$S_A(x, y; 0, y') \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2\omega A(y, y') \quad (18)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

(15), (16) を x で微分して

$$S(x, y; 0, y') = -\frac{\partial}{\partial x} S_A = -A + \frac{x}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(y - y \cos \theta)}{\sqrt{x^2 + \omega^2}} \frac{d\theta}{\omega^2} \quad (19)$$

$$= -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} G_A \quad \frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S = +\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} G = +\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(y' - y \cos \theta)}{R^3} d\theta, \quad (20)$$

$$G(x, y; 0, y') = -\frac{\partial}{\partial x} G_A = +y \frac{\partial}{\partial y} S_A$$

$$= -\frac{(y y')^2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{R^3} d\theta, \quad (21)$$

右辺の部分を積分して

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} = -\frac{y y' \sin^2 \theta}{R^3}$$

$$G(x, y) = -\frac{y y'}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta}{R} d\theta, \quad (22)$$

昭和 年 月 日

246

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -y \frac{\partial \int}{\partial y} = \frac{2yy'}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{R^3} d\theta, \quad (22)$$

よゝらの積分を

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\omega^2 R} = \frac{1}{r_2(y+y')^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1-\alpha^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\omega^2 R} = \frac{-1}{r_2(y+y')^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\varphi d\varphi}{''} \\ I_3 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\omega^2 R} = \frac{1}{r_2(y+y')^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\varphi d\varphi}{''} \\ I_4 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{R} = \frac{1}{r_2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ I_5 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{R} = -\frac{1}{r_2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\varphi d\varphi}{''} \\ I_6 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{R^3} = \frac{1}{r_2^3} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \\ I_7 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{R^3} = \frac{-1}{r_2^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\varphi d\varphi}{''} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\theta = \pi - 2\varphi, \quad \cos \theta = -\cos 2\varphi, \quad \sin^2 \theta = \sin^2 2\varphi$$

$$R^2 = x^2 + \omega^2 = x^2 + y^2 + y'^2 + 2yy'(1-2\alpha^2 \sin^2 \varphi) = r_2^2 - 4yy' \alpha^2 \sin^2 \varphi$$

$$= r_2^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi)$$

$$k^2 = \frac{4yy'}{r_2^2} = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad k'^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (24)$$

$$r_1^2 = x^2 + (y-y')^2, \quad r_2^2 = x^2 + (y+y')^2$$

$$\omega^2 = (y+y')^2 \{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi\}$$

$$\alpha^2 = \frac{4yy'}{(y+y')^2}$$

昭和 年 月 日

今完全楕円積分を導入し

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\Pi(\alpha, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

(25)

とかくと、

$$I_1 = \frac{1}{r_2(y+y')} \Pi(\alpha, k) \quad (26)$$

$$I_1 + I_2 = \frac{2}{r_2(y+y')} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha^2 \sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= \frac{2}{\alpha^2 r_2(y+y')^2} \int_0^{\pi/2} \frac{[(\alpha^2 \sin^2 \varphi - 1) + 1] d\varphi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= \frac{1}{2yy'/r_2} [-K(k) + \Pi(\alpha, k)] \quad (27)$$

$$I_2 = -\frac{K(k)}{2yy'/r_2} + \left(\frac{2}{\alpha^2} - 1\right) \frac{\Pi(\alpha, k)}{r_2(y+y')} \quad (28)$$

$$I_3 = \frac{4}{r_2(y+y')} \Pi'(\alpha, k)$$

$$\frac{2}{\alpha^2} - 1 = \frac{(y+y')^2}{2yy'} - 1$$

$$\Pi'(\alpha, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (29)$$

この Π' は Π, E, K で表わされるが数値を求めるときはこれを数値積分するのが最も便利のようなのでこのまゝの Π' としておく。

又特に $y = y', \alpha = 1$ のときは

昭和 年 月 日

$$\Pi'(1, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} [K - E], \quad (30)$$

とあるから $\Pi(1, k)$ は 對稱的 に 無限大 と なる。

$$I_4 = \frac{K(k)}{r_2} \quad (31) \checkmark$$

$$I_4 + I_5 = \frac{2}{r_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{r_2 k^2} [K - E] \quad (32) \checkmark$$

$$I_5 = \frac{2}{k^2 r_2} \left[-E + \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K \right] \checkmark$$

$$I_6 = \frac{1}{r_2^3} \frac{E(k)}{k^2} = \frac{E(k)}{r_1^2 r_2} \quad (33) \checkmark$$

$$I_6 + I_7 = \frac{2}{r_2^3 k^2 R} [E - k^{1/2} K] \quad (34) \checkmark$$

$$I_7 = \frac{1}{r_2^3 k^2} \left[\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) E - \frac{2k^{1/2}}{k^2} K \right] \checkmark$$

$$\begin{aligned} J_1 &= y' I_1 - y I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(y' - y \cos \theta)}{a^2 R} d\theta \\ &= \frac{K(k)}{2y r_2} + \frac{1}{r_2 (y+y')^2} \left\{ y' - \frac{y^2 + y'^2}{2y'} \right\} \Pi(\alpha, k) \\ &= \frac{1}{2y' r_2} \left[K(k) + \frac{(y'^2 - y^2)}{(y+y')^2} \Pi(\alpha, k) \right] \quad (35) \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(y' - y \cos \theta)}{R} d\theta = y' I_4 - y I_5 \\ &= \frac{2y}{r_2 R^2} E + \left\{ \frac{(y'-y) - (y+y')k^2}{k^2 r_2} \right\} K(k), \quad (36) \checkmark \end{aligned}$$

$$J_3 = y' I_6 - y I_7 = + \frac{2y}{r_2^3 k^2} K + \frac{E(k)}{r_1^2 r_2} \left\{ y' - y \frac{(1+k^2)}{k^2} \right\} \quad (37)$$

$$y^2 = \frac{V_2^2 (1 + \frac{V_1^2}{V_2^2})}{2y}$$

A-8

$$= \frac{1 + \frac{V_1^2}{V_2^2}}{2y} = \frac{1 + \frac{V_1^2}{V_2^2}}{2y}$$

昭和 年 月 日

$$S_A = xA - \frac{x^2 y'}{\pi} J_1 - \frac{y'}{\pi} J_2$$

$$= xA - \frac{x^2}{2\pi V_2} \left[K + \frac{(y'^2 - y^2)}{(y+y')^2} \Pi(\alpha, k) \right]$$

$$- \frac{2xyy'}{\pi V_2 k^2} E - \frac{y'(y'-y) - (y+y')k'^2}{\pi k^2 V_2} K$$

$$= xA - \frac{V_2}{2\pi} E - \frac{x^2}{2\pi V_2} \frac{(y'^2 - y^2)}{(y+y')^2} \Pi(\alpha, k)$$

$$- \frac{K}{2\pi V_2} \left[x^2 + \left\{ \left(\frac{y'}{y} - 1 \right) - \left(\frac{y'}{y} + 1 \right) k'^2 \right\} \right], \quad (38)$$

$$S = -A + \frac{x}{\pi} J_1 = -A +$$

$$+ \frac{x}{2\pi y' V_2} \left[K(k) + \frac{(y'^2 - y^2)}{(y+y')^2} \Pi(\alpha, k) \right], \quad (39)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{J_3}{\pi} = \frac{K(k)}{2\pi V_2 y'} + \frac{(y'^2 - y^2 - x^2)}{2\pi y' V_2 V_1^2} E(k), \quad (40)$$

$$G_A = \frac{B}{4} + \frac{x(y y')^2}{\pi} J_3 = \frac{B}{4} + \frac{4x(y y')^2}{\pi V_2 (y+y')^2} \Pi(\alpha, k), \quad (41)$$

$$G = -\frac{y y'}{\pi} J_5 = -\frac{V_2}{2\pi} \left[E - \frac{(1+k'^2)}{2} K \right], \quad (42)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{x y y'}{\pi} J_7 = \frac{x V_2}{2\pi V_1^2} \left[\left(1 - \frac{k'^2}{2} \right) E - k'^2 K \right],$$

$$= \frac{-x}{2\pi V_2} \left[K(k) - \frac{(V_1^2 + V_2^2)}{2V_1^2} E(k) \right], \quad (43)$$

$$\frac{1}{4}(4 \log 2 - 1) = .4431$$

A-9

$$4 \log 2 = 2.7726$$

$$2 \log 2 = 1.38629, \log 2 = .69315$$

昭和 年 月 日

$$K(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \log 2 + \log\left(\frac{1}{k}\right) + \dots$$

$$E(k) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{k^2}{4} [4 \log 2 - 1 - 2 \log k] + \dots$$

(44)

与了 根 1 附 加 了 の 2". $y = y' = D$

$$r_1 = |c|, r_2 = \sqrt{x^2 + 4D^2}, x \rightarrow 0 \rightarrow 0 \text{ 方}$$

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D}{\pi c} \left[1 - \log 2 - \frac{1}{2} \log \left| \frac{2D}{x} \right| \right], \quad (45)$$

$$G_A = \frac{D^2}{4} + \frac{x}{\pi k r_2^2} [K(k) - E(k)]$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{D^2}{4} + \frac{x D}{2\pi c} \left[2 \log 2 - 1 + \log \left| \frac{2D}{x} \right| \right], \quad (46)$$

$$G'(x, y, y') = G + \frac{y}{2\pi} \log\left(\frac{y}{r_1}\right) \longrightarrow \text{regular everywhere} \quad (47) \checkmark$$

$$\xrightarrow[r_1 \rightarrow 0]{y = y'} \frac{y}{\pi} \left(1 - \log 2 - \frac{1}{2} \log \frac{y}{y} \right)$$

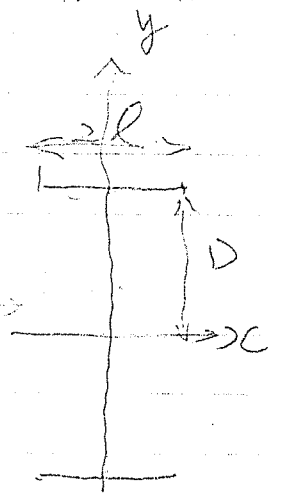
$$r_2 = 2y$$

昭和 年 月 日

附録B ダクトの近似解

l/D が充分小さい時は A(45) のように展開出来るので、2次元流と全く同じ解を得る。

さて、ここでは本文6節の積分方程式のかわりに、§6(11)の流れ関数で考えよう。



$$\psi(x, y) = \int_{-l}^l \gamma(x') G(x, y; x', D) dx', \quad \dots (1)$$

境界条件は

$$\psi(x, y) = -\frac{y^2}{2} + C$$

であり、ダクト形状の

$$y = D - \alpha x - \frac{\beta}{2} x^2, \quad \dots (2)$$

と表わされるならば、高次の項を省略して、

$$\psi(x, y) = -\frac{D^2}{2} + (\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2) D, \quad \dots (3)$$

$$x = l \cos \theta$$

$$\gamma(x') = \frac{f(\theta')}{\sin \theta'}, \quad f(\theta) = \sum_n a_n \cos n\theta \quad \dots (4)$$

とすれば A(45) を代入すれば (1) は

$$C - \frac{D^2}{2} + (\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2) D = \frac{Dl}{2\pi} \int_0^\pi f(\theta') d\theta' [B + \log |\cos \theta - \cos \theta'|],$$

$$B = 2 - 2 \log 2 - \log \left(\frac{2D}{l} \right), \quad \dots (5)$$

1400
201

昭和 年 月 日

$$C - \frac{D^2}{2} + \left(\alpha \cos \theta + \frac{\beta l}{2} \cos \theta \right) l D$$

$$= \frac{Dl}{2} \left[(B - l/2) a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n\theta}{n} \right] \quad (6)$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} a_1$$

$$\frac{\beta l}{4} = -\frac{a_2}{4}$$

(7)

$$a_0 = -a_1 - a_2 = 2\alpha + \beta l \quad (8)$$

$$C - \frac{D^2}{2} + \frac{\beta l^2 D}{4} = \frac{Dl}{2} (B - l/2) (2\alpha + \beta l)$$

$$C = \frac{D^2}{2} + Dl(B - l/2)\alpha + \frac{\beta D l^2}{2} (B - l/2 - \frac{1}{2}) \quad (9)$$

$$T = \int \gamma dx = \pi l a_0 = \pi l (2\alpha + \beta l) \quad (10)$$

$$\psi(0, D) = C - \frac{D^2}{2} = +Dl \left[(B - l/2)\alpha + \frac{\beta l}{2} (B - l/2 - \frac{1}{2}) \right] \quad (11)$$

$$\rightarrow \psi = \frac{\psi(0, D)}{(D^2/2)} = \left(\frac{2l}{D} \right) \left[-(l/2 - B)\alpha - \frac{\beta l}{2} (l/2 + \frac{1}{2} - B) \right]$$

$$\beta l = -\alpha, \quad (\text{後端 } v \text{ 固定}) \quad -\alpha x + \frac{\alpha}{2} x^2 = \alpha x \left(\frac{x}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{l} =$$

$$\frac{2l\alpha}{D} \left[-l/2 + B + \frac{1}{2}(l/2 - B + \frac{1}{2}) \right]$$

$$\frac{B}{2} - \frac{1}{2} l/2 + \frac{1}{4}$$

* 2722 平板梁の $T = (2l)\alpha\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{2(n+1)} (-)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) (-)^n = -\log 2 + (\log 2 - 1) = -1.$$

B-3

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)} = -x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)} (-)^n$$

昭和 年 月 日

このラカがある時は 正整数条件は

$$\psi(x, D) = C - \psi_+ (x, D) = C - S G_A(x, D; 0, D)$$

$$= C - \frac{SD^2}{4} \left[1 + \frac{2x}{\pi D} \left\{ 2\log 2 - 1 + \log \frac{2D}{|x|} \right\} \right], \quad (12)$$

$$\log \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n} \cos 2n\theta$$

$$\cos \theta \cos 2n\theta = \frac{\cos 2n\theta + \dots}{2}$$

$$\cos \theta \log \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \cos \theta \log 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n} \left[\cos 2n\theta + \cos 2(n+1)\theta \right]$$

$$= \cos \theta \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) (-)^n \cos 2(n+1)\theta, \quad (13)$$

$\theta > \pi$

$$C - \frac{SD^2}{4} \left[1 + \frac{2x}{\pi D} \left(2\log 2 - 1 + \log \frac{2D}{|x|} + \log 2 - \frac{1}{2} \right) \cos \theta + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n(n+1)} \cos 2(n+1)\theta \right]$$

$$= \frac{Dl}{2} \left[(B - \log 2) a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos n\theta \right], \quad (14)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$$

$$-\frac{5SD}{2\pi} \left(3\log 2 - \frac{3}{2} + \log \frac{2D}{l} \right) = -\frac{Dl}{2} a_1$$

$$a_{2n} = 0 \quad \text{for } n \geq 1$$

$$-\frac{5SD}{4\pi} \frac{(-)^n}{n(n+1)} = -\frac{Dl}{2(2n+1)} a_{2n+1}, \quad n \geq 1$$

$$C - \frac{5}{4} D^2 = \frac{Dl}{2} (B - \log 2) a_0$$

$$a_0 = - \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} = -\frac{5}{\pi} \left(3\log 2 - \frac{3}{2} + \log \frac{2D}{l} \right)$$

$$= \frac{5}{\pi} \left(3\log 2 - 2 + \log \frac{2D}{l} \right) = \frac{5}{\pi} (L_0 + B)$$

$\log 2 +$

$(L_0 + B)$

$(L_0 + B)$

昭和 年 月 日

$$a_1 = \frac{S}{\pi} \left(3\beta^2 - \frac{3}{2} + \beta \frac{2D}{\lambda} \right)$$

$$a_n = \frac{S}{2\pi} \frac{(n+1)}{2(n+1)} (-)^n \quad (15)$$

$$C = \frac{S}{\pi} D^2 + \frac{SD\ell}{2\pi} (B - \beta^2)^2$$

$$P = \pi l a_0 = S\ell (B - \beta^2), \quad (17)$$

$$\psi(0, D) = \left[-\frac{S}{\pi} D^2 = \frac{SD\ell}{2\pi} (B - \beta^2)^2 \right] \quad (18)$$

$$-w = \frac{\psi(0, D)}{D^2} = \frac{S\ell}{\pi D} (\beta^2 - B)^2$$

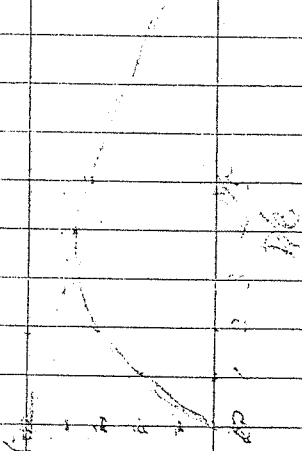
(11) (18) の w の式の係数の数値を β の他について次頁表に示す。

スリッパの大きい時 ($S > 1$) は $\alpha (> 0)$ による部分と S による部分が同程度と大きさと存して互に打ち消し合う車になるがスリッパが 1 より小さい時は α による部分がずっと大きくなる。

さて $\alpha > 0$ の時はダクト内で減速している車になる。

増速する為には $\alpha < 0$ としなければならぬ。
~~減速~~ $\beta < 0$ としなければならぬ。

e/D	$h_1 = \frac{2}{3}z$	$h_2 = z - B$	$(h_2 - B) \frac{2}{3}$	$h_2 + \frac{1}{2} - B$	$x \frac{h_2}{B}$	$\frac{h_2}{z} (h_2 - B)$	
1	.6931	.7725	1.5450	1.2725	1.2725	.1900	
$\frac{1}{2}$	1.3862	1.9656	1.4656	1.9656	.9828	.3419	
$\frac{1}{3}$	1.7918	1.8712	1.2474	2.3712	.7904	.3715	
$\frac{1}{4}$	2.0794	2.1588	1.0794	2.6588	.6645	.3709	
$\frac{1}{5}$	2.3026	2.3820	.9528	2.8820	.4964	.3612	
2	0	.0794	.3176	.5794	1.1588	.0040	
$h_2 - B = 3 \frac{1}{2} z - z + \frac{1}{2} z = 2.5z + \frac{1}{2} z = 3z$							



昭和 年 月 日

本体との干渉を考える時は 6.6 の方法の方が便利
 のようである。
 見す

$$V(x, D) = -\frac{1}{D} \int \gamma(x') \frac{\partial}{\partial x} G(x, D; x', D) dx'$$

と仮定 A (45) より

$$-\frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} G(x, D; x', D) \doteq \frac{-1}{2\pi(x-x')} \quad \dots (19)$$

と仮定

$$V(x, D) \doteq \frac{-1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\gamma(x') dx'}{x-x'} \quad \dots (20)$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(\theta') d\theta'}{\cos\theta - \cos\theta'} = \frac{1}{2\pi D} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta$$

本文 p. 17 (12) より右辺第1項を省略すると本体記号
 の如く位置の垂直速度 v_H は

$$v_H = -\frac{1}{2\pi D} \frac{dA(x)}{dx} \quad \dots (21)$$

これがダクト上で x 方向に一律とすると

$$a_1 = -\frac{1}{\pi D} \left[\frac{dA}{dx} \right] \quad \dots (22)$$

$$-\bar{v} \quad a_0 = -a_1 \quad \dots (23)$$

これを代入すれば 元に戻って

$$\psi(0, D) = \frac{Dl}{2} (B - k_1^2) a_0 = \frac{l}{2\pi} (k_1^2 - B) \frac{dA}{dx} \quad \dots (24)$$

$$-w = \frac{\psi(0, D)}{(D^2/2)} = \frac{l}{\pi D^2} (k_1^2 - B) \frac{dA}{dx}$$

附録 C 数値積分について

1) 先ず

$$G_A(x, y; x', y') = \frac{B}{A} + \frac{4\pi(y y')}{\pi^2 (y+y')^2} \Pi'(\alpha, k) \quad (1)$$

$$B = \begin{cases} y'^2 & \text{for } y > y' \\ y^2 & \text{for } y' > y \end{cases}$$

$$\Pi'(\alpha, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2)$$

$$\alpha^2 = \frac{4yy'}{(y+y')^2} < 1, \quad k^2 = 1 - \alpha^2, \quad k'^2 = 1 - k^2$$

$$r_1^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2, \quad r_2^2 = (x-x')^2 + (y+y')^2$$

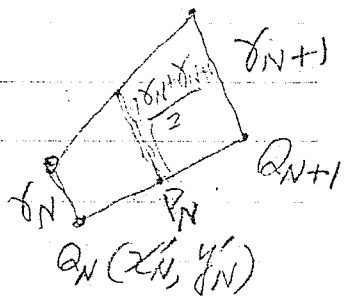
a) $\alpha < 1$ に対しては数値積分と問題はない。

b) $\alpha = 1$ に対しては ($y = y'$)

$$\Pi'(1, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} [K(k) - E(k)], \quad (3)$$

2) 流れ関数の計算には表面曲線を多角形で近似し, σ はその向で直線分布と仮定する。

又境界条件は Q_N と Q_{N+1} の中点 P_N で指定するものとする。



i) 境界条件を $P_M (N \neq M)$ で指定する時で且つ

$$\overline{P_M P_N} > \beta \quad (\text{ある適当な値, 例えは } \beta), \quad (4)$$

の時

$$I_N^M = \int_{Q_N}^{Q_{N+1}} \sigma(s) G(s, P_M) ds, \quad (5)$$

を $\Sigma \Delta P^{\circ}$ の順で積分すると

$$\begin{aligned}
J_N^M &= \frac{Q_N Q_{N+1}}{6} \left[\gamma_N G(Q_N, P_M) + \frac{4(\gamma_N + \gamma_{N+1})}{3} G(Q'_N, P_M) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{N+1} G(Q_{N+1}, P_M) \right], \\
&= \frac{Q_N Q_{N+1}}{6} \left[\gamma_N \{ G(Q_N, P_M) + 2G(Q'_N, P_M) \} \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{N+1} \{ 2G(Q'_N, P_M) + G(Q_{N+1}, P_M) \} \right], \quad (6)
\end{aligned}$$

$$Q_N Q_{N+1} = \sqrt{(x'_{N+1} - x'_N)^2 + (y'_{N+1} - y'_N)^2}$$

$$P_M \equiv (x, y), \quad Q'_N \equiv \left(\frac{x'_N + x'_{N+1}}{2}, \frac{y'_N + y'_{N+1}}{2} \right)$$

ii) $P_M P_N < \beta$ の時は G の対数的特異点をとり出して次のようにする方がよからう。
 先ず”

$$G'(x, y; x', y') = G(x, y; x', y') + \frac{y}{2\pi} \log \left(\frac{y}{r} \right), \quad (7)$$

とおくと

$$G(x, y; x, y) = \frac{y}{\pi} \left(1 - \frac{\beta}{2} \log 2 - \log y \right); \quad (8)$$

となるから

$$J_N^M = J_N^M - L_N^M, \quad (9)$$

$$J_N^M = \int_{Q_N}^{Q_{N+1}} \gamma G'(Q, P_M) ds; \quad (10)$$

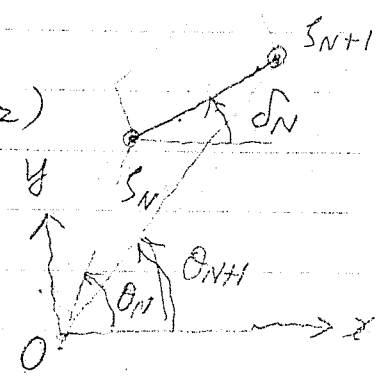
$$L_N^M = \frac{y}{2\pi} \int_{Q_N}^{Q_{N+1}} \gamma \log \frac{1}{r} ds, \quad (11)$$

とある J_N^M は前項と全く同様に積分する。

従つて (6) の $G \rightarrow G'$ とおきかへればよい。

L_N^M については 複素積分を利用して 2 分の 1 に積分出来る。

$$L_N^M = \frac{y}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{s_N}^{s_{N+1}} \gamma(s) \log(z-s) ds e^{-i\theta_N}, \quad (12)$$



$$s_N = x'_N + iy'_N,$$

$$z = x_M + iy_M$$

$$\gamma(s) = \gamma_N + (\gamma_{NH} - \gamma_N) \frac{(s - s_N)(N_H - N)}{s_{NH} - s_N}, \quad (13)$$

さて

$$\int_{s_N}^{s_{NH}} \log(z-s) ds = \frac{(z - s_{NH}) + (z - s_N)}{(s_N - s_{NH})} + (z - s_N) \log(z - s_N) - (z - s_{NH}) \log(z - s_{NH}), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int_{s_N}^{s_{NH}} (z-s) \log(z-s) ds &= - \int_{z-s_N}^{z-s_{NH}} (z-t) \log t dt \\ &= -z \left[\frac{1}{2} \log^2 t - \log t \right] + \int \frac{1}{2} \log^2 t - \frac{1}{2} \log t dt \\ &= -z \left[\frac{1}{2} \log^2 t - \log t \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \log^3 t - \frac{1}{2} \log^2 t \right] = \frac{t(t-2z)}{2} \log t + t(z - \frac{t}{4}) \\ &= \frac{-(z-s_{NH})(z+s_{NH})}{2} \log(z-s_{NH}) + \frac{(z-s_N)^2}{2} \log(z-s_N) \\ &\quad + z(s_N - s_{NH}) - \frac{1}{4} [(z-s_{NH})^2 - (z-s_N)^2], \quad (15) \\ &\quad (z - s_{NH} - s_N)(s_N - s_{NH}) \end{aligned}$$

$\frac{z}{2} - \frac{3}{4} S_N + \frac{1}{4} S_{N+1}$
昭和 年 月 日

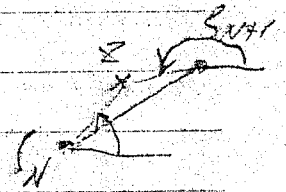
$$\int_{S_N}^{S_{N+1}} (S-S_N) \log(z-S) dS = - \frac{(z-S_{NH})^2}{2} \log(z-S_{NH}) + \frac{(z-S_N)^2}{2} \log(z-S_N) \\ + (S_N - S_{NH}) \left[(z-S_N) - \frac{1}{2} (z - \frac{S_{NH}+S_N}{2}) \right] \quad (15)$$

つまり $z = \frac{S_{NH}+S_N}{2}$ とする時は注意が必要

(z-S) の argument は π を 47° 可也。

その時は

$$\int_{S_N}^{S_{N+1}} \log(z-S) dS = (S_{NH} - S_N) \left[-1 + \log\left(\frac{S_{NH}-S_N}{2}\right) + \frac{\pi}{2} i \right] \quad (14)$$



$$\frac{1}{S_{NH} S_N} \int_{S_N}^{S_{N+1}} (S-S_N) \log(z-S) dS = - \frac{\pi}{2} i (S_{NH} - S_N) + \frac{1}{2} (S_{NH} - S_N)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} i \right) (S_{NH} - S_N) \quad (15')$$

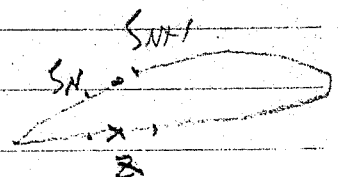
それ故

$$L_N^N = \frac{y}{2\pi} \left[\gamma_N \left\{ \log\left|\frac{S_{NH}-S_N}{2}\right| - \frac{3}{2} \right\} + \frac{1}{2} \gamma_{NH} \right] |S_{NH}-S_N| \quad (16)$$

M≠N の時は大體面倒な式であるので

本体の時は M=N のみ (9) のように分離して上式により見積つてもよい。

しかし、ダクトの場合は、薄肉の管に z が反対側にある時は G が対数的に大きくなるのでこの分離をしないで大體積分がおちると考えられる。

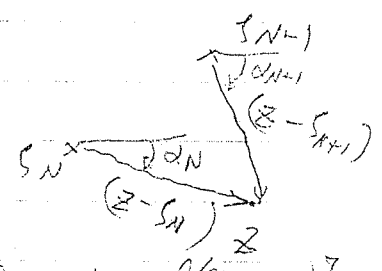


昭和 年 月 日

$$z - s_N = \prod_{NM} e^{i\alpha_{NM}}, \quad z - s_{N+1} = \prod_{NM} e^{i\alpha_{NH,M}}$$

とある。

$$\Delta s_N = |s_{N+1} - s_N|$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Re} e^{-i\delta_N} \int \log(z-s) ds &= -\Delta s_N + \left[\gamma_{NM} \log \gamma_{NM} - \gamma_{NH,M} \log \gamma_{NH,M} \right] \\ &= \left[(\alpha_{NM} - \delta_N) \alpha_{NM} - (\alpha_{NH,M} - \delta_N) \alpha_{NH,M} \right] \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} e^{-i\delta_N} \int \frac{(s-s_N)}{(s_{N+1}-s_N)} \log(z-s) ds = -\frac{\Delta s_N}{4} - \frac{\gamma_{NH,M}}{2}$$

$$\begin{aligned} + \frac{1}{2\Delta s_N} \left[\gamma_{NM}^2 \log \gamma_{NM} - \gamma_{NH,M}^2 \log \gamma_{NH,M} \right. \\ \left. - 2(\alpha_{NM} - \delta_N) \alpha_{NM} + 2(\alpha_{NH,M} - \delta_N) \alpha_{NH,M} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_N^M &= \gamma_N \left[\gamma_{NM} \log \gamma_{NM} - \gamma_{NH,M} \log \gamma_{NH,M} - \left\{ (\alpha_{NM}^2 - \alpha_{NH,M}^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta_N (\alpha_{NH,M} - \alpha_{NM}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \Delta s_N \right] \end{aligned}$$

$$+ (\delta_{NH} - \delta_N) \left[-\frac{\Delta s_N}{4} - \frac{\gamma_{NH,M}}{2} + \frac{1}{2\Delta s_N} \left\{ \dots \right\} \right]$$

for $M \neq N$.

昭和 年 月 日

附録D 軸流ポンプ理論との関係

ダクトが充分長かつかつダクトの御角, キャムバーが
たゞの場合で原流にフルペラ (1/4ペラ) を
置けば軸流ポンプの模型が出来る。

それ故 兎がダクトが充分長い場合の近似
解を求めよう。

流れの函数は

$$\psi(x, y) = \int_{-l}^l \delta(x') G(x, y; x', D) dx', \quad \dots (1)$$

これを理論的に考察する事にして, δ が
 x の近傍で略々一定とし

$$l \gg \lambda \gg D$$

なる λ の区間の種分値で函数 ψ が決まると
すれば

$$\psi(x, y) \doteq \delta(x) \int_{-1}^1 G(x, y; x', D) dx'$$

$$= \delta(x) \left[G_A(x, y; \lambda, D) - G_A(x, y; -\lambda, D) \right]$$

定まるから $A(1/\lambda)$ より $\lambda \gg D$ のとき

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_A(x, y; \lambda, D) = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_A(x, y; -\lambda, D) = \frac{y^2}{2} \quad \dots (2)$$

なる故

$$\psi(x, y) \doteq -\frac{y^2}{2} \delta(x), \quad \dots (3)$$

昭和 年 月 日

なる近似値を得る。

Actuator Disc がある時は、境界条件は

$$\psi(0, D) = \frac{D^2}{2} C - S G_A(x, D; 0, D), \quad \dots (4)$$

となる故 (3) に代入して (C は未定定数)

$$\gamma(x) = -C + \frac{2S}{D} G_A(x, D; 0, D), \quad \dots (5)$$

なる解を得る。

ダクト内の流量は (4) に A.D. の流量 $\sqrt{S} G_A$ を加えて

$$\psi(x, D) + S G_A(x, D; 0, D) = \frac{D^2}{2} C \quad (6)$$

となるが、ダクトの中には流量 $S(\pi D^2)$ の吹込みがあるのであるからその半分宛か、入口、出口からはひつて乗るだけはないから

$$C = S/2, \quad \dots (7)$$

と結論すべきである。

なお (6) は x の始何に値中から成立つからダクト内の連続の定理が成立している事を示す。

つまり

$$u = \frac{2}{\rho \omega} (\psi + S G_A) = S/2, \quad \dots (8)$$

でダクト内全体に軸方向速度は一定である。

次にダクトに強く推力はイ4ペラーに強く推力減少に等しくそれは本文 P.16 (9) により

$$\Delta T = -2\pi P S \psi(0, D) = 0 \quad (9)$$

昭和 年 月 日

一方無限深さの運動量保存から算出した
実効推力 T_E は、式(6)より

$$T_E = \pi \rho D^2 S (1 + \frac{S}{2}) \quad (10)$$

であるから、イタロー-推力は $\Delta T = 0$ 故

$$T = T_E = \pi \rho D^2 S (1 + \frac{S}{2}) \quad (11)$$

となる。

よって、ダクト・プロペラ系の効率 η は、プロペラ単独の
場合と変らず、運動量理論によれば*

$$\eta = \eta_a \cdot \eta_t = \left(\frac{1}{1 + \frac{S}{2}} \right) \left(1 - \frac{\omega'}{2\omega} \right) \quad (12)$$

ω はプロペラ回転角速度、 ω' は無限深流の水流の
角速度増力比とする。

となるが、ダクトの中では軸方向速度は不変
であるから、プロペラをホ θ = θ のプロペラ-と見な
した時、ホ θ = θ の効率 η_p は

$$\eta_p = \eta_t = 1 - \frac{\omega'}{2\omega} \quad (13)$$

(12) と (13) の差は、いわゆる船体効率であり

$$\eta_h = \frac{T_E V}{T V_A} = \frac{1}{(1 + \frac{S}{2})} \quad (14)$$

であるから、確かに

$$\eta = \eta_p \cdot \eta_h$$

となり、(12) に一致する。

* 花園; 船体船用プロペラニホジラケ 1971

昭和 年 月 日

一方ポンプ理論によれば* ロータのみの効率は (p.307, (13.2) と (13.3) から (13.1) を使って)

$$\eta_p = \frac{C_m \Omega T}{\omega \Omega M} = 1 - \frac{C_{u2}}{2\omega' r}, \quad (15)$$

C_{u2} は無限後方の切線方向速度増であるから

$$C_{u2} = \omega' r, \quad (16)$$

であるから

$$\eta_p = 1 - \frac{\omega'}{2\omega}, \quad (15')$$

となり (13) に一致する。

一方無限整数渦理論モデル (前註 p.7) によれば 軸方向ポテンシャルは今議論しているものであって 径方向に流れて来た通りであるから 切線方向速度ポテンシャルはつりてはダクトの存在によつて何等変化を受けない。

それ故 $\omega' r$ と s の間には次の関係が存在するはずである。(前註 p.8)

$$\frac{h}{r} = \frac{1 + \frac{s}{2}}{(\omega - \frac{\omega'}{2})r} = \frac{\omega' r}{s}, \quad (18)$$

又置換 $s, \omega - \frac{\omega'}{2} = \omega - \frac{\omega'}{2} = \omega' r$ とすると

$$\omega' r = C_{u2} = \frac{sP}{2\pi r}, \quad (17)$$

となり両者は全く一致する。

(18) 式の後者式を (11) に代入すれば

$$T = \pi D^2 C_{u2} \left(\omega' r - \frac{C_{u2}}{2} \right), \quad (19)$$

となつてポンプ理論の式に一致する。

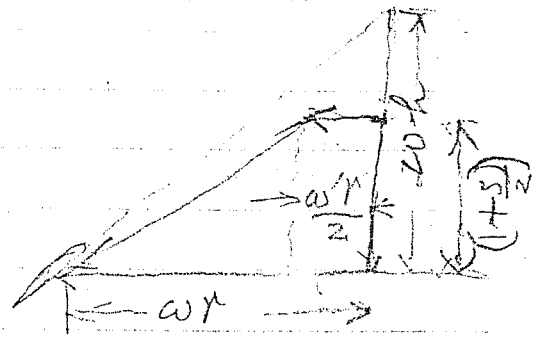
* 藤本武助 "流体の力学と流体機械" p.307

又効率最高のものはどちらか

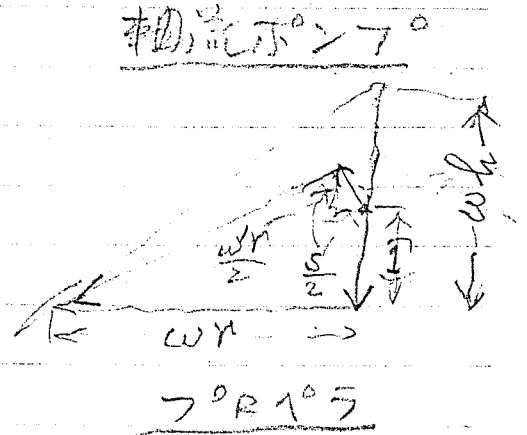
$$P = \text{const.} \quad (19)$$

となり同じである。

特に軸流ポンプではこの条件は後流中に渦のない条件であり従って又 A. D. モデルから適用出来る事になる。



フレイラ、又はイムペラの流入状態を圖示すれば右図の如くなり、結局



全く同じ事を考えているがポンプ理論では軸流速度を $(\frac{\omega r}{2})$ の替りに C_m とおいて未知のまに置いているあるいはあらかじめ与えている所が異なるだけである。

なお序でながらポンプ理論で使う速度三角形形はこのように考えるとフレイラ理論でいえば無限上流および無限後流側の速度分布に対応している。

昭和 年 月 日

ポンプの形状性能は比較回転数 n_s (r.p.m) により決まる

$$n_s = n Q^{\frac{1}{2}} H^{-\frac{3}{4}}$$

n : 回転数 (r.p.m), Q : 流量 (m^3/s), H : 揚程 (m)
一方プロペラ性能は出力定数 B_p と直径定数 δ で決まる。

$$B_p = \frac{P}{V_A^{2.5}}, \quad \delta = nD/V_A$$

n : プロペラ回転数 (r.p.m), P : 馬力 (H.P.), V_A : 前進速度 (kts)
 D : プロペラ直径

今 B_p, δ を用いて n_s を表現すると

$$\frac{n_s}{R^{\frac{3}{4}}} = C \left(\frac{\delta}{\sqrt{B_p}} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \delta$$

$$C = \frac{60 \times \frac{5}{4} \pi^{\frac{5}{4}} (60 \times 514^{\frac{2.5}{4}})^{\frac{3}{2}}}{75^{\frac{3}{4}} (60 \times 514)^{\frac{3}{2}}} = 12.7$$

但し R は $Q = R V_A \times 0.514 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)$ で定義される係数
でありから $R > 1$

なお 荷重係数 $C_T = T / \left(\frac{\rho}{2} \left(\frac{\pi D^4}{4} \right) V_A^2 \right)$
と B_p, δ は

$$\frac{\sqrt{B_p}}{\delta} \cdot \frac{\sqrt{75} \times 60 \times 514}{60 (514)^{2.5}} = \sqrt{\frac{\pi P}{2}} C_T$$

なる関係がある。

例として 4 種のプロペラで計算すると

B_p	δ	η	$n_s/R^{\frac{3}{4}}$
50	260	.51	11,487
10	120	.70	14,660

となるが 現用の軸流ポンプの最高の n_s は 400 程度であるので 船用プロペラとは大高量なり 荷重係数が極端に大きくなりかわかる。