



# 乱流境界層理論による抵抗最少条件について

別所正利

概要		頁
1. 2次元の場合		0-1~4
2. " - 薄い物体		7
3. 3次元回転体の場合		9
4. " - 細長体		12~13

附録 A	ストークスの流れ関数と可逆定理	A-1~5
" B	細長体近似	B-1
C	翼断面積分の導出	C-1~4
D	抵抗積分の導出	D-1~4
E	先端附近の解	E-1~4
F	線型解について	F-1~2

参考文献 Hess, J.L., "On the Problem of Shaping an Axisymmetric Body to Obtain Low Drag at Large Reynolds Numbers" J.S.R., vol. 20, No. 1, 1976

## 概要

境界層理論では 外側のポテンシャル流れの速度分布をもとにして 境界層内の流れを解析し、抵抗を算出する。

従って この意味では 抵抗は 物体の周りのポテンシャル流れに依存し、また そのポテンシャル流れは、近似的に境界層厚さが充分薄いものとして <sup>近似</sup>計算する。

その抵抗については 層流境界層では 剥離点の位置に大いに依存するが、抵抗減少の爲には 剥離点を出来る限り後方に移動させる事が主眼点となり、これは速度分布によって定まる故、望ましい速度分布となるような物体形状を求める方法と共に研究されて来た。

実用上の目的からは 層流部分は充分短かくて 乱流境界層として考える方が望ましい。

しかしこの場合も 剥離の問題があつて、一般的には複雑であるが、運動量厚さの近似計算式で 物体後端のそれによつて 抵抗が与えられるとする、つまり 乱流剥離は起らないと仮定すると、

抵抗は物体表面の速度分布の積分によって与えられる。  
ポテンシヤル流れの

事になる。

抵抗の最小化問題は、  
 その積分を最小とする物体形状を求め

ればよい事になり、問題はポテンシヤル流れを

求める事とその積分の極小化問題となる。

以上の事柄を考察の下に  
 Hess は Truelsen 等の理論に基づいて抵抗  
 積分を構成し、回転体特に四角錐円体と  
 空洞形状（物体側面の大部分で速度一定の物体形状）  
 について抵抗を調査し、また二次元形状について  
 も検討している。

これらの研究には所謂 inverse method, 与えられた速度分布をもつ物体形状を作る方法が  
 必須で、二次元では従来等角写像関数を求める  
 方法で行われていたが、三次元では従来一般的方法は  
 あまり発見されておらず、Hess 等は回転体  
 の軸上に特異点を分布させて速度分布からその強さを  
 定める方法を採用している。

この方法では精度がわるく、また先端の曲率半径が大きい時は困難である。

この点は表面上に特異点を置く事で解決される。  
与えられた速度分布を持つ物体形状を作るには、先ず  
適当な物体を選んで速度分布を計算し、与えられたもの  
との差の速度分布を与えるような物体の変形分を  
求め、それだけ変形させて再びその操作を繰り返す。

この方法の要点は物体の微小変形による速度  
変化を見積る式を導出する事にあるが、これは  
微小変形による  
境界条件がわかれば「仮定な」事で後に見る通り  
ある。

またこの微小変形による速度変化を見積る式に  
よって抵抗積分の変分から、それが極値と  
なる為の条件式を導出する事が出来る。

Hess はそのような条件式を求められないので、  
殆ど Trial & Error 式に計算を進めているので  
結論が弱く至って「仮定」である。

以上のような形で、本覚書では、2次元形状  
3次元回転体について Hess の抵抗公式の変分  
を採り、物体の微小変形と速度変化の関係を  
導入して、速度分布と物体形状の関係を  
極値条件として  
与える式を導出する。

極値条件式が求めらば、それから最小抵抗  
を求めるには上述の逐次近似法を適用出来る。

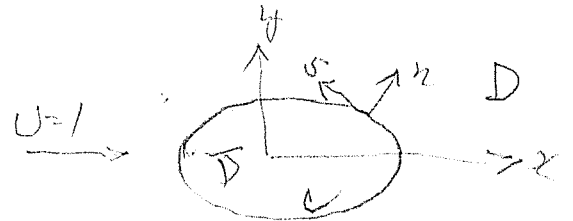
2次元問題では Hess は等角寫像法を使って  
最小抵抗形状を計算しているが、この条件式を  
使えばそれとよく似たものが容易に求められる。

この場合抵抗値としては楕円の最小と最大と等しい  
のであるが、この条件式には 楕型理論的に楕円も一つの  
解と考えられる点も便利である。

# 1. 2次元の場合

Hess によれば2次元の積分の最少値問題を解けばよい。

$$J = \int_C g^4 ds, \quad (1.1)$$



2.12

$$g = -\frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad \Phi = x + \phi, \quad (1.2)$$

ここで  $\phi$  は  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad (1.3)$

なる境界条件を満たす速度ポテンシャルと可とする。

以下この定理により一般論として

$$\phi(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_C [\phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \log R - \frac{\partial \phi}{\partial n} \log R] ds, \quad (1.4)$$

2.12  $R = \overline{PQ}$

なる定理がある。

また対応する流線関数は次のように表わされる。

$$\psi(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_C [\psi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \log R - \frac{\partial \psi}{\partial n} \log R] ds, \quad (1.5)$$

2-2-1, 1-2-2 の関係により

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad (1.6)$$

(1.3) の条件はよく知られてゐるように  $\psi = -\psi$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \psi = -\psi, \quad (1.7)$$

と表わす。

したがって

$$\int_c \left[ y \frac{\partial \psi}{\partial n} \log R - \frac{\partial y}{\partial n} \log R \right] ds = 0 \quad \text{for } Q \in D.$$

で導きから, (1.5) から

$$\psi(Q) = -\frac{1}{2\pi} \int_c \frac{\partial \Psi(P)}{\partial n} \log R ds, \quad \dots (1.8)$$

$$\Psi(P) = y + \psi(P), \quad \dots (1.9)$$

(1.2), (1.6) より (1.8) は

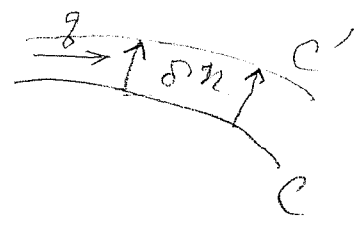
$$\psi(Q) = -\frac{1}{2\pi} \int_c \psi(P) \log R ds, \quad \dots (1.8')$$

とかけますが, これはサーコローゼン分解による表現であって, その強さは表面上の速度である事を示す。

境界値問題は この (1.8') で解くと直ちに速度分布が得られるので便利である。

さて  $C$  が僅かに歪開して  $C'$  となったとしよう。

これに応じて流線密度も  $\delta\psi$  だけ変化するだろう。



$$\psi'|_{C'} = -y|_{C'}, \quad \psi|_C = -y|_C$$

$$\delta\psi = \psi' - \psi$$

とすると

$$\psi'|_{C'} = \psi|_C - \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_C \delta n = \psi'|_C - \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_C \delta n = \psi|_C$$

$$\text{一方 } \psi'|_{C'} = -y|_{C'} = -\left( y - \frac{\partial y}{\partial n} \delta n \right) \Big|_C$$

$$\therefore \psi'|_C = -y + \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta n, \quad \dots (1.10)$$

$$\therefore \delta\psi|_c = \psi|_c - \psi|_c = \int \delta\eta, \quad \dots \quad (1.11)$$

したがって、速度変化  $\delta g = \frac{\partial}{\partial \eta}(\delta\psi)$

は (1.5) に代入して

$$\int \delta\eta = \frac{1}{2\pi} \int_c \left[ \int \delta\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \log R - \delta g \log R \right] ds, \quad (1.12)$$

と書いておめする事が出来る。

$\int \delta\eta$  は小さい量であるので上式は近似的に

$$\int \delta\eta \approx - \frac{1}{\pi} \int_c \delta g \log R ds, \quad \dots \quad (1.13)$$

としても良いようである。

この形は (1.8') と同形であるので便利である。  
(定数が違っている点に注意)

よってこの僅かな変形による  $J$  の変分を考えよう。

明らかに

$$\delta J = 4 \int_c g^3 \delta g ds, \quad \dots \quad (1.14)$$

増境最小の条件は

$$\delta J = 0, \quad \dots \quad (1.15)$$

であるがこの形のまゝでは

$$\delta g = 0 \quad \dots \quad (1.16)$$

であればよいようにも見えるが、<sup>これは</sup> (1.12) と (1.13) に代入すると

$\delta\eta = 0$  となり、<sup>これは</sup> あらう、(1.16) を満たす物体は <sup>存在し</sup> ない事を示すのであろう。



そこで (1.14) を少し変形するために

$$\psi_3 \Big|_c = g^3, \quad \dots \dots (1.17)$$

のような境界条件を満らし、流れの荷重  $\psi_3$  を導入しよう。  
無限遠でゼロ

この時 (1.14) は

$$\delta J = 4 \int_c \psi_3 \frac{\partial \delta \psi}{\partial n} ds, \quad \dots (1.18)$$

と書けるから グリーン の 定理 より

$$\delta J = 4 \int_c \delta \psi \frac{\partial \psi_3}{\partial n} ds, \quad \dots (1.19)$$

となり、さらに (1.11) より

$$\delta J = 4 \int_c g \frac{\partial \psi_3}{\partial n} \delta h ds, \quad \dots (1.20)$$

あるいは  $\psi_3$  に 対応する 速度ポテンシャル  $\phi_3$  とすると

$$\delta J = 4 \int_c g \frac{\partial \phi_3}{\partial s} \delta h ds, \quad \dots (1.21)$$

副条件として 面積一定 とすれば

$$\int_c \delta h ds = 0, \quad \dots (1.22)$$

重心位置 不変 ならは

$$\int_c x \delta h ds = 0, \quad \dots (1.23)$$

2次モーメント 不変 ならは

$$\int_c x^2 \delta h ds = 0, \quad \dots (1.24)$$

であるから 2 次条件の下に  $\delta J = 0$  を満足するには

$$\int \frac{\partial \phi_3}{\partial s} = C + Bx + Ax^2, \quad (1.25)$$

であればよい。

つまり  $J$  を最小にする物体の速度分布は上式を満足して "存在可能" ならぬ。

これを解析的に求めるのは一寸絶望的であるから、逐次近似的に求める方法について以下考えよう。

まず適当な物体 (楕円がよいだろう) を採って (1.8') を解いて  $C$  上の  $\int \phi$  を求める。

この  $\int \phi$  に  $\delta \int \phi$  だけ補正すれば (1.25) を満たすものとすると  $\delta \int \phi$  は 2 次の項を省略して 1 次式を満足せねばならぬ。

$$\int \frac{\partial \phi_3}{\partial s} + \delta \int \frac{\partial \phi_3}{\partial s} + \int \frac{\partial (\delta \phi_3)}{\partial s} = C + Bx + Ax^2, \quad (1.26)$$

ここに  $\delta \phi_3$  は  $\delta \psi_3$  の遷移ポテンシャルで  $\delta \psi_3$  の境界条件は

$$\delta \psi_3 = 3 \int \delta \phi \quad (1.27)$$

これを (1.5) に代入して

$$3 \int \delta \phi = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[ 3 \int \delta \phi \frac{\partial}{\partial n} \log R + \frac{\partial (\delta \phi)}{\partial s} \log R \right] ds, \quad (1.28)$$

を解いて  $\frac{\partial (\delta \phi_3)}{\partial s}$  が求められるが、このとき (1.13) のように近似してもよいだろう。

$$\int \delta g = \delta g \doteq \frac{1}{\pi} \int_C \frac{2(\delta g_3)}{25} A, R \text{ as } , \dots (1.28')$$

つまり (1.26) と (1.28) または (1.28') を 併立させて 解くと  $\delta g$  が  
求まる。(C, A, B は 未定定数)

この  $\delta g$  を (1.12) もしくは (1.13) に 代入し, (1.22) ~ (1.24) の  
条件を 附加加えると  $\delta h$  が 求まる。

元の 形を  $\delta h$  だけ 変形させて 同じ 操作を 繰返し  
適当な 所で 計算を とめる。

2. 2次元の場合 - 薄い物体

薄い物体では

$$\rho = 1 + u, \quad |u| \ll 1, \quad \dots (2.1)$$

と近似出来るから (1.1) の  $J$  は

$$J \doteq 2 \int_{-1}^1 (1+u)^2 dx \doteq 4 + 8 \int_{-1}^1 u dx, \quad (2.2)$$

のように近似出来る。

しかしこの形では

$$u=0, \quad \text{ただし } \rho \propto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2.3)$$

のような現実的でない形が解となる。

これは (2.2) の近似式では  $J$  は  $u$  の一次形式になってしまったので 極値問題は一般に非線形拘束の解ではなく、 $J=0$  とか  $-\infty$  とするような解になってしまう事を意味する。

そこで前節の結果を応用してみよう。

極値条件は (1.25) であるから、今は

$$\rho \frac{\partial \phi_3}{\partial x} = C + Bx + Ax^2, \quad \dots (2.4)$$

これは (1.17) より

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{\partial \psi_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \rho^3 \doteq 3 \frac{\partial u}{\partial x} = -3 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.5)$$

この最後の関係は連続の方程式である。

それ故  $\phi_3 = -3\psi = -3\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2}$ , . . . . . (2.6)

(2.4)に代入し;  $g \neq 1$  とすると

$$-3\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} = C + Bx + Ax^2, \quad \dots \quad (2.7)$$

となり,  $\eta$ が求められる。

特に,  $A=B=0$  の時は  $\eta$ は放物線である。

Hessは等角寫像を援用して, (1.1)の極値問題を数値的に解き, 彼の言う near-optimum "blunt" bodyを得たが,  $\eta$ は放物線形状に極めて近い。

その形状はまた楕円の非常に近い。

薄い物体の近似では楕円では  $u = \text{const}$ , であるから, (1.1)の形から楕円の解を予想するのが自然に見えるが結果は以上のような具合で大分異なる\*。

この事は結局、線型化するかで解が異なることを見る事の意味を以てしている。  
どの段階から

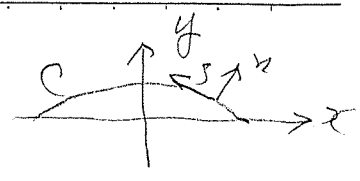
\*  $\phi_3$ の境界条件は (1.17)で, この段階で  $u = \text{const}$  ( $g = \text{const}$ ) とおくと  $\phi_3 = \text{const}$ , であるから (2.4)は満足している故、一つの解である。

### 3. 3次元回転体の場合

Hessによれば「回転体では

$$J = \int_C \rho^{\frac{10}{3}} y^{\frac{7}{6}} ds, \quad \dots (3.1)$$

(ここで  $C$  は上半分だけ考える)



なる種分の極値問題を考えればよい」と言う。

この変分をとれば

$$\delta J = \int_C \left[ \frac{10}{3} \rho^{\frac{7}{3}} y^{\frac{7}{6}} \delta \rho + \frac{7}{6} \rho^{\frac{10}{3}} y^{\frac{1}{6}} \delta y \right] ds, \quad \dots (3.2)$$

変分  $\delta y, \delta \rho$  は  $C$  を  $\delta n$  だけ僅かに動かすだけの変位による変化分と考えれば「1節同様」に「附録A」のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta y &= \frac{\partial y}{\partial n} \delta n \\ \delta \rho &= -\frac{\partial \rho}{\partial s} \delta \phi, \quad \delta \phi = -\rho y \delta n \end{aligned} \right\} (3.3)$$

となる。

ここで更に「境界ポテンシャル  $\psi_2$  を導入し、その境界条件は流線関数  $\psi_2$  で

$$\psi_2 = \rho^{\frac{7}{3}} y^{\frac{7}{6}}, \quad \dots (3.4)$$

と与えられるとすれば「可逆性 (A-19) より

$$\int_C \rho^{\frac{7}{3}} y^{\frac{7}{6}} \delta \rho ds = \int_C \rho \frac{\partial \psi_2}{\partial s} y \delta n ds, \quad (3.5)$$

と存るから (3.2) は

$$\delta J = \int_C \left[ \frac{10}{3} \frac{\partial \phi_2}{\partial s} g y + \frac{7}{6} g^{\frac{10}{3}} y^{\frac{1}{6}} \frac{\partial y}{\partial u} \right] \delta n ds, \quad (3.7)$$

と存る。

今排水量, 重心の前後位置, 2次モーメントを  
与えられているとすれば

$$\left. \begin{aligned} \int_C y \delta n ds &= 0, \\ \int_C x y \delta n ds &= 0, \\ \int_C x^2 y \delta n ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

であるから  $\delta J = 0$  なる爲には, 任意定数  $A, B, C$  を

$$\frac{10}{3} \frac{\partial \phi_2}{\partial s} g + \frac{7}{6} g^{\frac{10}{3}} y^{-\frac{5}{6}} \frac{\partial y}{\partial u} = C + Bx + Ax^2, \quad (3.9)$$

とすればよい。

よつてこの最小排水物体の満たすべき条件は,  $\frac{\partial \phi_2}{\partial s}$  と  $y$  との間の関係である。

解法としては 1 節同様 最初に  $\phi$  については回転楕円体  
 を与えて,  $\phi$  を計算し, それから (3.4) の境界条件で  
 (A.8) に より  $\frac{\partial \phi_2}{\partial s}$  を求める。

それからよって (3.9) の左辺を計算するが (3.9) の右辺を  
 満たす  $\delta \phi$  が, ( $y$  はこのまゝ),  $\delta \phi$  だけ  $\phi$  が  $\phi$  の  $\delta \phi$  を  
 満たすものとする。

(3.9) の左辺の変分をとり, 2 次以上の項を省略すると

$$\frac{10}{3} \left( \phi \frac{\partial \delta \phi_2}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial s} \delta \phi \right) + \frac{7}{6} \left( \frac{10}{3} \phi^{\frac{17}{3}} y^{-\frac{5}{3}} \delta \phi \frac{\partial y}{\partial n} \right) \quad (3.10)$$

これ  $\delta \phi$  は  $\delta \phi_2 = \frac{7}{3} \phi^{\frac{4}{3}} y^{\frac{7}{3}} \delta \phi$  (3.11)

なる境界条件を満たすものとしてある。

(3.10) と (3.11) の境界微分方程式とを聯立  
 させて  $\delta \phi$  が求められるから, それを (A.15) 又は  
 (A.16) に代入して  $\delta \eta$  が求められる。

$\delta \eta$  だけ変形して同じ操作をくり返す。



## 4. 3次元回転体 - 細長体

細長体では (3.9) 式より  $g \doteq 1$  と近似すると

$$\frac{7}{6} y^{-\frac{5}{6}} - \frac{10}{3} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = C + Bx + Ax^2, \quad (4.1)$$

$\phi_2$  の境界条件は (3.4) より

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{17}{6} y^{-\frac{5}{6}} \frac{dy}{dx}, \quad (4.2)$$

附録(B.7) 式より (今は  $A(x)$  は <sup>(一般に)</sup> 定数と仮定してある)

$$\frac{\partial A_2(x)}{\partial x} = \frac{7\pi}{3} y^{\frac{1}{6}} \frac{dy}{dx}, \quad (4.3)$$

(B.6) より

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^{\frac{17}{6}} \log \left( \frac{2\sqrt{1-x^2}}{y} \right), \quad (4.4)$$

ここで  $y(x)$  は楕円に近しいものとし

$$\log \frac{2\sqrt{1-x^2}}{y} \doteq \log \frac{2}{\beta}, \quad (4.5)$$

と近似すれば  $\beta = B/L$  (中,  $B$  と  $L$ ) である。

(4.1) に代入すると

$$\frac{7}{6} y^{-\frac{5}{6}} - \left( \frac{10}{3} \log \frac{2}{\beta} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} = C + Bx + Ax^2, \quad (4.6)$$

を得る。

$\beta \rightarrow 0$  とし左辺第1項を無視出来るとすれば

新式

$$\frac{d^2}{dx^2} y^{\frac{17}{6}} = C + Bx + Ax^2, \quad (4.7)$$

これは (2.7) と <sup>略々</sup> 同形 であり、特に  $B=A=0$  の解は

$$y = \beta(1-x^2)^{\frac{6}{17}}, \quad (4.8)$$

となり、これは 2つの放物線と楕円の中間の  
曲線であるかどちらかと言うと放物線に  
近い。

# 附録 A ストークスの流れ関数と可逆定理

速度ポテンシャルを  $\phi$  とすると

$$\phi(Q) = \int_C \left[ \psi(P) \frac{\partial S^*}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} S^* \right] y ds, \quad \dots (A.1)$$

$$S^*(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R}, \quad R^2 = (x-x')^2 + y^2 + y'^2 - 2yy'\cos\theta, \quad (A.2)$$

$$P = (x, y), \quad Q = (x', y'),$$

流れ関数  $\psi$  の定義は上の通りとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \text{又} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial s}, & \frac{\partial \phi}{\partial s} &= -\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial n}, \end{aligned} \right\} (A.3)$$

$$\therefore \frac{\partial S^*(P, Q)}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial T(P, Q)}{\partial y}, \quad \frac{\partial S^*(P, Q)}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial T(P, Q)}{\partial x}, \quad (A.4)$$

よって  $T(P, Q)$  なる関数を導入すると、やはり

$$\frac{\partial S^*(P, Q)}{\partial n} = \frac{1}{y} \frac{\partial T}{\partial s}, \quad \frac{\partial S^*(P, Q)}{\partial s} = -\frac{1}{y} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (A.4')$$

(A.1) の右辺を部分積分すると  
(この関係を使って)

$$\begin{aligned} \phi(Q) &= \int_C \left[ \psi(P) \frac{\partial S^*}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial s} T \right] ds \\ &= - \int_C \left[ \frac{\partial \phi}{\partial s} T + \frac{\psi}{y} \frac{\partial T}{\partial n} \right] ds, \quad \dots (A.5) \end{aligned}$$

2.7" さらに

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = \frac{1}{y'} \frac{\partial G}{\partial y'}, \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = -\frac{1}{y'} \frac{\partial G}{\partial x'}, \quad (A.6)$$

$$\begin{aligned} G(\phi, \alpha) &= -\frac{yy'}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{R} d\theta, \quad \dots \\ &= -\frac{yy'}{2} \int_0^\infty e^{-t|x-x'|} J_1(ty) J_1(ty') dt, \quad \dots \end{aligned} \quad (A.7)$$

なる周縁を導入すれば

$$\psi(\alpha) = - \int_C \left[ \frac{\partial \phi}{\partial s} G + \frac{\psi}{y} \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds, \quad \dots (A.8)$$

さらに  $\phi = x$ ,  $\psi = \frac{y^2}{2}$  とおくと

$$\int_C \left[ -\frac{\partial y}{\partial n} G + y \frac{\partial}{\partial n} G \right] ds = 0 \quad \text{for } \alpha \in D, \quad (A.9)$$

さらに  $\Phi = x + \phi$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -g$ ,  $\psi = -\frac{y^2}{2}$  とおくと (A.10)

とすれば (A.8) から (A.9) を辺々相加すると (onc)

$$\psi = \int_C g G ds, \quad \dots (A.11)$$

これは  $g$  なる強さの Ring Vortex による表現である。

今  $C$  が  $\delta n$  だけ外側に変形して  $C'$  となることを示す。

$$\text{元々} \quad \delta\psi = \psi' - \psi$$

$$\text{と} \quad \psi'|_{C'} = -\frac{y^2}{2}|_{C'}, \quad \psi|_C = -\frac{y^2}{2}|_C \quad \left. \vphantom{\psi'|_{C'}} \right\} \text{(A.12)}$$

$$\text{とすると} \quad \psi'|_C = \psi'|_{C'} - \frac{\partial\psi'}{\partial n} \delta n = -\frac{y^2}{2}|_C + y \frac{\partial\phi}{\partial s}|_C \delta n$$

ここで

$$\delta\psi|_C = \psi'|_C - \psi|_C = -y \left( \frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial s} \right) \delta n$$

$$= -y g \delta n, \quad \text{on } C \quad \text{(A.13)}$$

つまり、 $\delta\psi$  の境界条件は上式で与えられる。

それ故にこの変形による速度変化

$$\delta g = -\frac{\partial\delta\phi}{\partial s} \quad \text{(A.14)}$$

は (A.8) により

$$\delta\psi = \int_C \left[ \delta g G + g \delta n \frac{\partial}{\partial n} G \right] ds, \quad \text{(A.15)}$$

と存子から、左辺に (A.13) を与えて上式を解けば

$\delta g$  が求まる。

$\delta\psi$  は小さく、存子の二近似的に上式は の境界方程式

$$-g y \delta n \doteq 2 \int_C \delta g G ds, \quad \text{(A.16)}$$

これを実用的には良きようである。

最後に可逆定理を示すところ。

無限遠方で正則な2つのポテンシャル  $\phi_1, \phi_2$  を考えたとグリーン関数の定理より、次の可逆性がある。

$$\int_C \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} y ds = \int_C \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} y ds, \quad \dots (A.17)$$

(A.13)の関係により、 $\psi_1, \psi_2$  を共に  $\phi_1, \phi_2$  の流れ度勢とすると

$$\int_C \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} y ds = \int_C \phi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial s} ds = - \int_C \psi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial s} ds$$

と等号から求めは

$$\int_C \psi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial s} ds = \int_C \psi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial s} ds, \quad \dots (A.18)$$

特に  $\phi_1$  を  $\delta\phi$  とおくと  $\frac{\partial \phi_1}{\partial s} = -\delta q$  となる。

$$\int_C \psi_2 \delta q ds = \int_C q \frac{\partial \phi_2}{\partial s} y \delta n ds, \quad (A.19)$$

となる。

$G(P, Q)$  は従来の回転体の流れ関係で使った記号と同じであるが、ここでは  $P$  と  $Q$  が入れかわったことに注意。

回転体の流れ関係で  $S(P, Q)$  としたものをここでいう「空洞流れ」系の  $T(P, Q)$  とし、同じものである。

この系統では  $S^*$  を導入し、

$$S^*(P, Q) = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R} = \frac{1}{\pi R^2} k(\theta),$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial S^*}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial T}{\partial x},$$

$G(P, Q) = G(Q, P)$  であるが  $T(P, Q) \neq T(Q, P)$  である。

(A.6) の関係は  $P$  点について

$$\frac{\partial T(Q, P)}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial T(Q, P)}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial G}{\partial x} \quad (?)$$

となる。

# 附録 B 細長体近似\*

細長体近似では、

$$\begin{aligned} \phi(x', y') &= \frac{-1}{4\pi} \int_{-1}^1 A(x) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} dx \\ &= + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{dA}{dx} \frac{dx}{R} \quad , \quad \dots (B.1) \end{aligned}$$

2.12  $R = \sqrt{(x-x')^2 + y'^2}$

∴  $A(x) = \pi y^2(x)$  ; 面積曲線 , (B.2)

そこで  $P_n, Q_n$  をルジャンドル多項式とすると

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n(\xi) P_n(\mu) P_n(\mu') \quad , \quad \dots (B.3)$$

$$\xi = \mu \xi, \quad y = \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2}, \quad \mu' = x'$$

与る関係があるから

$$Q_n(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 1} \log\left(\frac{2\sqrt{1-x^2}}{y}\right) \quad , \quad \dots (B.4)$$

と近似出来るとして

$$\phi(x, y) \doteq + \frac{1}{2\pi} \frac{dA(x)}{dx} \log\left(\frac{2\sqrt{1-x^2}}{y(x)}\right) \quad , \quad (B.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \doteq \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \doteq + \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 A}{dx^2} \log\left(\frac{2\sqrt{1-x^2}}{y}\right) \quad , \quad (B.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \doteq \frac{-1}{2\pi y} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{d y(x)}{dx} \quad , \quad (B.7)$$

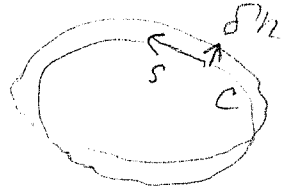
$$y \doteq \beta \sqrt{1-x^2} \quad \text{より}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\log(\frac{2}{\beta})}{2\pi} \frac{d^2 A}{dx^2} \quad , \quad \dots (B.8)$$



附録 C 見掛質量積分の変分

$$I = \int_C \bar{\Phi} \frac{\partial \chi}{\partial n} ds, \quad \dots (C.1)$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } C \\ \bar{\Phi} &= \chi + \phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \chi}{\partial n} \end{aligned} \right\} (C.2)$$

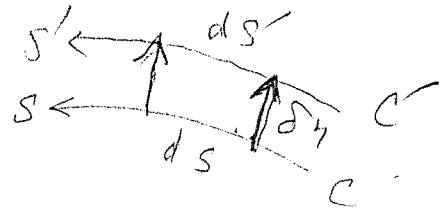
今  $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} = -g, \quad \dots (C.3)$

とおき (C.1) を部分積分すると、(Φは一定と仮定すると)

$$I = - \int_C y \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} ds = \int_C y g ds, \quad \dots (C.4)$$

C が delta n だけ滑りかたに変形して

C' になつたときの I を



$$I' = \int_{C'} y' g' ds', \quad \dots (C.5)$$

といて  $\delta I = I' - I = - \int_C y g ds + \int_{C'} y' g' ds', \quad (C.6)$

とおこう。

よて  $ds' = \sqrt{(ds)^2 + \left(\frac{\partial(\delta n)}{\partial s}\right)^2 (ds)^2}$   
 $\approx ds \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta n}{\partial s}\right)^2 \right], \quad \dots (C.7)$

とあるから、滑りかたの変形といて

$$\frac{\partial(\delta n)}{\partial s} = O(\epsilon), \quad \dots (C.8)$$

と定義するならば<sup>(9)</sup>二次以上の項を無視して、(C.7)は

$$ds' \doteq ds, \quad \text{---} \quad (C.9)$$

又  $C'$  のまわりの速度ポテンシャルは  $C$  の所で  
解析接続されるとすると

$$\begin{aligned} g'|_C &\doteq g'|_{C'} - \frac{\partial g'}{\partial n}|_{C'} \delta n \\ &\doteq g'|_{C'} - \frac{\partial g}{\partial n}|_C \delta n, \quad \text{---} \quad (C.10) \end{aligned}$$

となるか

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial n} &= - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial n \partial s} = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial n^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial s^2}, \\ &= - \frac{\bar{g}}{\rho}, \quad \text{---} \quad (C.11) \end{aligned}$$

2.12  $\rho$  は  $C$  の曲率半径。

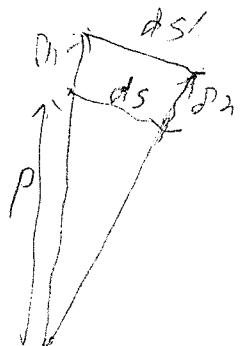
$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial n^2} = - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial s^2} = \bar{g}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial n^2} \xrightarrow{\text{on } C} 0 \quad (C.12)$$

(C.11) は連続の定理を利用して導出している。

$$\Delta \doteq \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial^2}{\partial s^2},$$

ゆえに (C.9) の仮定の下では  $\rho \rightarrow \infty$  とし、  
(C.10) は二次以上を無視すると。

$$g'|_C \doteq g'|_{C'}, \quad \text{---} \quad (C.13)$$



右辺 (C.6) は

$$\delta I = \int_C (y' \delta y' - y \delta y) ds = \int_C (\delta y \delta y' + y \delta y) ds, \quad (C.14)$$

$$\text{よって} \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial h} \delta h, \quad (C.15)$$

$$\delta \phi \text{ は } \delta \phi = (\bar{\Phi}' - \bar{\Phi}) = \phi' - \phi, \quad (C.16)$$

$$\text{よって} \quad \delta \phi = - \frac{\partial \phi}{\partial s} \delta s$$

で、その境界条件は流線同数から

$$\psi|_C = \psi'|_C - \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta h = -y' + \frac{\partial \phi}{\partial s} \delta s.$$

$$\therefore \delta \psi|_C = \psi'|_C - \psi|_C = -\delta y + \frac{\partial \phi}{\partial s} \delta s = \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} \delta h \right) \delta s = -g \delta h, \quad (C.17)$$

よって 相互定理により

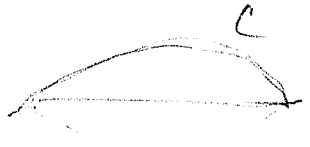
$$\begin{aligned} \int_C y \delta y ds &= - \int_C \psi \frac{\partial \delta y}{\partial n} ds = - \int_C \delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \\ &= \int_C g \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta h ds, \quad (C.18) \end{aligned}$$

よって

$$\delta I = \int_C \frac{\partial}{\partial n} (y + \psi) \int \delta h ds = \int_C g^2 \delta h ds, \quad (C.19)$$

よって Bergman-Fischer の結果に一致する。

この証明法は 3次元では一般に適用出来ないが、回転体では全く可なり。その場合は

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_C \bar{\Phi} \frac{\partial x}{\partial n} y ds, \quad (C.20) \\ &= 2\pi \int_C \bar{\Phi} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{y^2}{2} \right) ds, \end{aligned}$$


部分積分に

$$I = -2\pi \int_C \frac{y^2}{2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} ds = 2\pi \int_C \left( \frac{y^2}{2} q \right) ds, \quad (C.21)$$

$$\delta I = 2\pi \int_C \left[ q y \frac{\partial y}{\partial n} \delta n + \frac{y^2}{2} \delta q \right] ds. \quad (C.22)$$

附録 A) により、 $\psi$  を ストークスの流れ関数として  
の相関定理

$$\int_C \frac{y^2}{2} \delta q ds = + \int_C \psi \frac{\partial \delta \Phi}{\partial s} ds = - \int_C \delta \psi \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds, \quad (C.23)$$

$$\delta \psi = -q y \delta n. \quad \text{であるから (A.13) より}$$

$$\delta I = +2\pi \int_C q^2 y \delta n ds, \quad \dots \quad (C.24)$$

を得る。

## 附録D 抵抗積分の変分

本文では物体が変形した時線素  $ds$  は不変とし、速度  $g$  も不変として変分をとっている。

附録Cの考察からこの仮定は許されると思うから、もう少し丁寧にやってみよう。

i) 2次元の場合

$$J = \int_C g^4 ds, \quad (D.1)$$

$\phi_3, \psi_3$  は (1.17) より 無限遠でゼロ

$$\psi_3 = g^3, \quad (D.2)$$

$$J = - \int_C \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} \psi_3 ds = \int_C \bar{\Phi} \frac{\partial \psi_3}{\partial s} ds = \int_C \bar{\Phi} \frac{\partial \psi_3}{\partial n} ds,$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \Big|_C = 0 \quad \text{であるから}$$

$$J = \int_C \left( \bar{\Phi} \frac{\partial \psi_3}{\partial n} - \psi_3 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) ds, \quad (D.3)$$

と書ける。

今  $C$  が  $C'$  に変形した時

$$J' = \int_{C'} \left( \bar{\Phi}' \frac{\partial \psi_3'}{\partial n} - \psi_3' \frac{\partial \bar{\Phi}'}{\partial n} \right) ds, \quad (D.4)$$

$$\Delta J = J' - J, \quad (D.5)$$

としよう。

(D.4) の場合はグリーンの定理により積分路を境界に  
同じで「外」から

$$\delta J = \int_C \left[ \bar{\Phi}' \frac{\partial \phi_3'}{\partial n} - \bar{\Phi} \frac{\partial \phi_3}{\partial n} - \phi_3' \frac{\partial \bar{\Phi}'}{\partial n} + \phi_3 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right] ds \quad (C.5)$$

$$\doteq \int_C \left[ \delta \bar{\Phi} \frac{\partial \phi_3}{\partial n} + \bar{\Phi} \frac{\partial \delta \phi_3}{\partial n} - \phi_3 \frac{\partial \delta \bar{\Phi}}{\partial n} \right] ds$$

$$= \int_C \left[ \bar{\Phi} \frac{\partial \delta \phi_3}{\partial n} \right] ds, \quad \left[ \int_C \delta \bar{\Phi} \frac{\partial \phi_3}{\partial n} ds = \int_C \phi_3 \frac{\partial \delta \bar{\Phi}}{\partial n} ds \right] \quad (C.6)$$

2.12  $\delta \bar{\Phi} = \bar{\Phi}' - \bar{\Phi} = \phi' - \phi$ , 無限遠で  $r \rightarrow \infty$  則

$$\frac{\partial (\delta \bar{\Phi})}{\partial n} = \frac{\partial \delta \psi}{\partial s} = -\frac{\partial (q \delta n)}{\partial s}, \quad (C.7)$$

$$\delta \phi_3 = \phi_3' - \phi_3$$

$$\delta \psi_3 = \psi_3' - \psi_3 \quad r''$$

$$\delta \psi_3|_C = \psi_3'|_C - \psi_3|_C = q_1^3 - q^3 - \frac{\partial \psi_3'}{\partial n} \delta n$$

$$= 3q^2 \delta q + \frac{\partial \phi_3}{\partial s} \delta n, \quad \dots \quad (C.8)$$

$$\int_C \bar{\Phi} \frac{\partial \delta \phi_3}{\partial n} ds = \int_C \bar{\Phi} \frac{\partial \delta \psi_3}{\partial s} ds = + \int_C \delta \psi_3 q ds,$$

$$= \int_C (3q^3 \delta q + \frac{\partial \phi_3}{\partial s} q \delta n) ds, \quad \dots \quad (C.9)$$

$$\left[ \int_C \phi_3 \frac{\partial \delta \bar{\Phi}}{\partial n} ds = - \int_C \delta \psi \frac{\partial \phi_3}{\partial s} ds = \int_C q \frac{\partial \phi_3}{\partial s} \delta n ds, \quad (C.10) \right]$$

$$\therefore \delta J = \int_C \left[ 3g^3 \delta g + g \frac{\partial \Phi}{\partial S} \delta n \right] ds, \quad (C.11)$$

$$\begin{aligned} \int_C g^3 \delta g ds &= \int_C \gamma_3 \frac{\partial \delta \gamma}{\partial n} ds = \int_C \delta \gamma \frac{\partial \gamma_3}{\partial n} ds \\ &= \int_C g \frac{\partial \Phi}{\partial S} \delta n ds, \quad (C.12) \end{aligned}$$

$$\therefore \delta J = \int_C g \frac{\partial \Phi}{\partial S} \delta n ds, \quad (C.13)$$

ii) 三次元回転体の場合,

$$J = \int_c g^{\frac{10}{3}} y^{\frac{7}{6}} ds, \quad (E-1)$$

$$\psi_2 = g^{\frac{7}{3}} y^{\frac{7}{6}}, \quad (E-2) \quad [(3.4)]$$

$$J = - \int_c \psi_2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} ds = \int_c \left( \bar{\Psi} \frac{\partial \phi_2}{\partial s} - \psi_2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} \right) ds, \quad (E-3)$$

$$\bar{\Psi}|_c = 0.$$

$$J' = \int_{c'} \left( \bar{\Psi}' \frac{\partial \phi_2'}{\partial s} - \psi_2' \frac{\partial \bar{\Phi}'}{\partial s} \right) ds$$

$$= \int_c \left[ \bar{\Psi}' \frac{\partial \phi_2'}{\partial s} - \psi_2' \frac{\partial \bar{\Phi}'}{\partial s} \right] ds, \quad (E-4)$$

$$\therefore \delta J = J' - J = \int_c \left[ \delta \bar{\Psi} \frac{\partial \phi_2}{\partial s} + \delta \psi_2 g - \psi_2 \frac{\partial \delta \phi}{\partial s} \right] ds, \quad (E-5)$$

$$\delta \psi|_c = -g y \delta n, \quad (E-6)$$

$$\delta \psi|_c = \left. \begin{aligned} & \left( \psi_2'|_{c'} - \psi_2|_c \right) = \frac{7}{3} g^{\frac{4}{3}} y^{\frac{7}{6}} \delta g + \frac{7}{6} g^{\frac{7}{3}} y^{\frac{1}{6}} \delta y \\ & \left( - \frac{\partial \psi_2'}{\partial n} \delta n \right) \end{aligned} \right\} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} \delta n, \quad (E-7)$$

$$\delta J = \int_c \left[ \frac{10}{3} g^{\frac{7}{3}} y^{\frac{7}{6}} \delta g + \frac{7}{6} g^{\frac{10}{3}} y^{\frac{1}{6}} \delta y \right] ds, \quad (E-8)$$

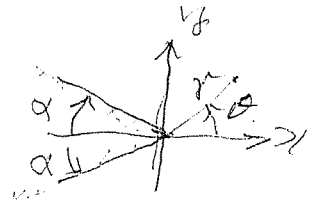
これは (3.2) に一致する。



# 附録 E 先端附近の解

## 1) 2次元

先端附近で1図のように半角 $\alpha$ の楔状をなしているとしよう。



複素ポテンシャルは

$$f(z) = z^m = r^m e^{im\theta} \quad (E.1)$$

$$m = \frac{\pi}{\pi - \alpha}, \quad m-1 = \frac{\alpha}{\pi - \alpha} > 0, \quad 2 > m > 1,$$

$$\frac{df}{dz} = m z^{m-1}, \quad g = \left| \frac{df}{dz} \right| = m r^{m-1}, \quad (E.2)$$

$$\psi_3 = B + i\psi_4 = A z^n, \quad \psi_3 = A r^n \sin n\theta, \quad (E.3)$$

$$9 \text{ 桁にかけると } \psi_3 = g_3 = m^3 r^{3(m-1)}, \quad (E.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{先端近傍} \quad n = 3(m-1), \quad n(\pi - \alpha) = 3\alpha, \\ A = \frac{m^3}{\sin 3\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (E.5)$$

$$\therefore \frac{d\psi_3}{dz} = 3(m-1)A z^{3m-4} = \underbrace{\left| \frac{d\psi_3}{dz} \right|}_{g_5} = 3(m-1)A r^{3m-4}, \quad (E.6)$$

$$g_3 g_5 = 3m(m-1)A r^{4m-5}, \quad (E.7)$$

よって  $r$  に1度わりなく一定値をとる為には

$$m = \frac{5}{4}, \quad \alpha = \frac{\pi}{5} = 36^\circ, \quad (E.8)$$

この時

$$g = \frac{5}{4} r^{\frac{1}{4}}, \quad g_3 = \frac{3}{4} A r^{-\frac{1}{4}}, \quad (E.9)$$

ii) 3次元回転体

極座標を導入し

$$\phi = r^\nu P_\nu(\mu), \quad \mu = \cos\theta, \quad (E.10)$$



$P_\nu$  は  $\nu$  次のルジャンドル関数 とすると  $r$  の  $\nu$  次の流束密度

$$\psi = \frac{r^{\nu+1}}{r^{\nu+1}} (1-\mu^2) \frac{dP_\nu(\mu)}{d\mu}, \quad \dots (E.11) \quad (\text{Lamb. 12 F3})$$

$$\text{例1} \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = (1-\mu^2) \frac{\partial \phi}{\partial \mu}, \quad (E.12)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{dP_\nu}{d\mu} \right\} = -\nu(\nu+1) P_\nu$$

$$\text{したがって} \quad \phi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \nu r^{\nu-1} P_\nu(\mu), \quad \dots (E.13)$$

$$\text{2次元} \quad \psi_2 = \frac{r^7}{r^5} \frac{r^7}{r^2} \propto r^{\frac{7}{3}(\nu-\frac{1}{2})}, \quad (E.14)$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \propto r^{\frac{7}{3}(\nu-\frac{1}{2})-2} = r^{\frac{7}{3}\nu - \frac{19}{6}}, \quad (E.15)$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \propto r^{\frac{10}{3}\nu - \frac{25}{6}} \quad (E.16)$$

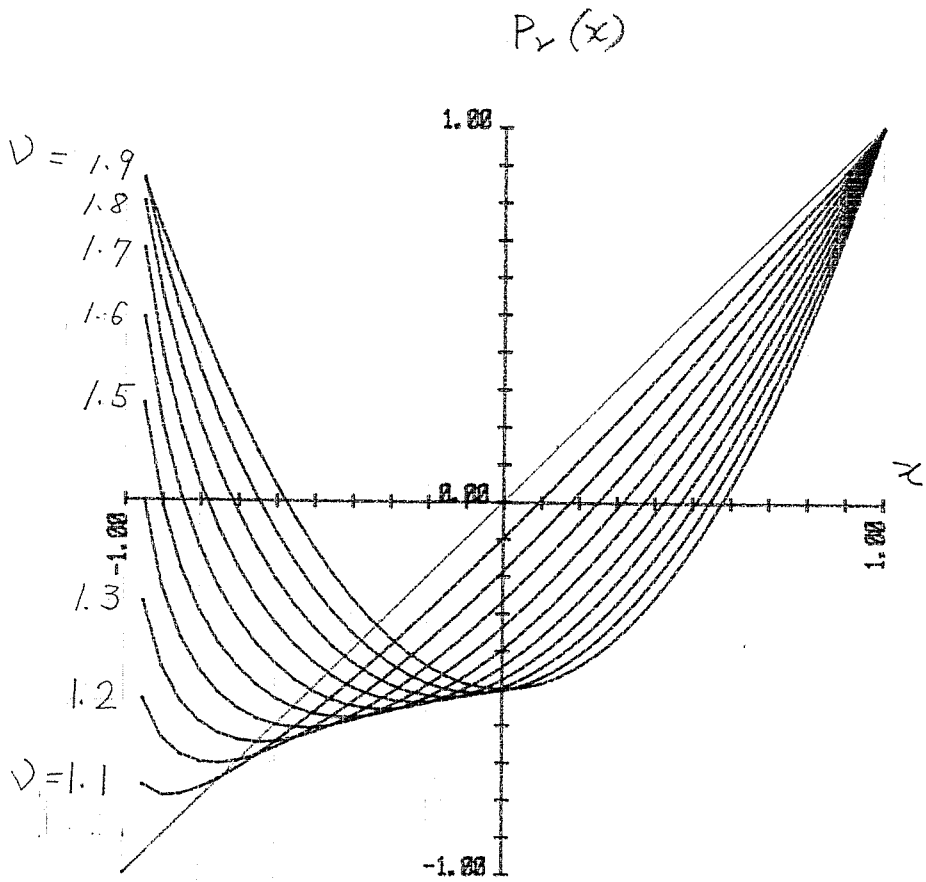
したがって無関係な  $\nu = 1.7$

$$\nu = 1.25, \quad \dots (E.17)$$

$\nu = 1.25$  とすると  $\frac{dP_\nu}{d\mu}$  の零点は

$$\mu = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -.7011, \quad \alpha = 45.48^\circ \quad (E.18)$$

$$\text{したがって} \quad \phi \propto r^{\frac{1}{4}}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \propto r^{-\frac{3}{4}}, \quad \dots (E.19)$$



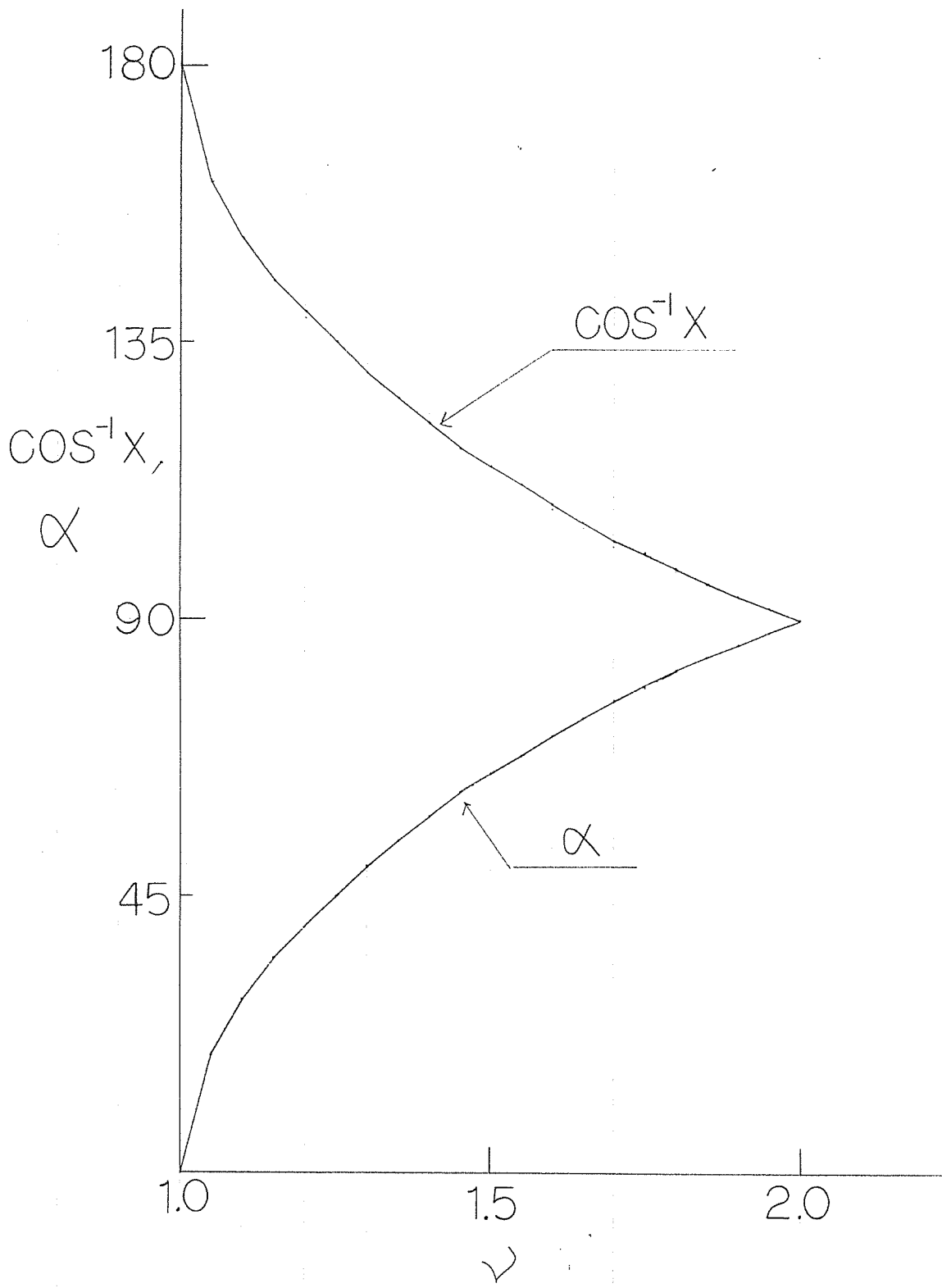


FIG.

$\nu$	$x$	$\cos^{-1}x$	$\alpha = 180 - \cos^{-1}x$
1.0	-		
1.05	-.94487	160.89	19.11
1.1	-.88514	152.27	27.73
1.15	-.82376	145.46	34.54
1.2	-.76214	139.65	40.35
1.25	-.70115	134.52	45.48
1.3	-.64133	129.89	50.11
1.35	-.58306	125.67	54.33
1.4	-.52657	121.77	58.23
1.45	-.47201	118.16	61.84
1.5	-.41944	114.80	65.20
1.55	-.36891	111.65	68.35
1.6	-.32042	108.69	71.31
1.65	-.27393	105.90	74.10
1.7	-.22941	103.26	76.74
1.75	-.18679	100.77	79.23
1.8	-.14602	98.40	81.60
1.85	-.10703	96.14	83.86
1.9	-.06974	94.00	86.00
1.95	-.03409	91.95	88.05
2.0	0	90.0	90.00

iii) 2次元 Cusp の速度分布

$$f(z) = z + az^m \quad \Rightarrow m > 1$$

$$\psi = r \lambda \theta + a r^m \lambda \sin \theta$$

$$r^{m-1} = - \frac{\lambda \theta}{a \lambda \sin \theta}$$

$$r \text{ は } \frac{\pi}{m} < \theta < \pi \text{ // 1 変数}$$

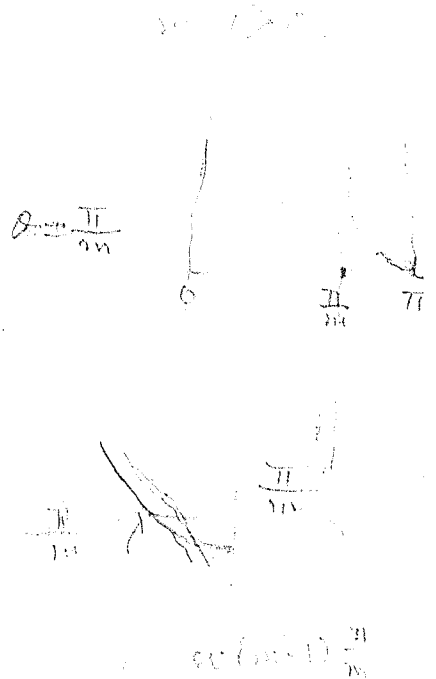
$$r = 0 \text{ for } \theta = \pi$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= 1 + m a z^{m-1} \\ &= 1 + m a r^{m-1} e^{i(m-1)\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{q}{s} = \left| \frac{df}{dz} \right| = \sqrt{1 + m^2 a^2 r^{2m-2} + 2 m a r^{m-1} \cos(m-1)\theta}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2 m \cos(m-1)\theta \lambda \theta}{\lambda \sin \theta} + \frac{m^2 \lambda^2 \theta^2}{\lambda^2 m \theta}}$$

$$\frac{1}{s} \left( 1 + m a r^{m-1} \cos(m-1)\theta \right)$$



3次元と同様体では略図同様

iv) Joukowski - Sym. - Section a Cusp.

$$\xi = z + \frac{k^2}{z} \quad a = k^2$$

$$f(z) = V(z+d) + \frac{Va^2}{z+d}$$



$$z = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4k^2}}{2}, \quad \xi = z + k = 1$$

$$z = \frac{1 + 2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 4k^2}}{2} \approx \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{k^2}}}{\sqrt{k^2}} + k + \frac{1}{2}$$

$$k + \frac{1}{2} + \sqrt{k^2} \left(1 + \frac{1}{8k^2}\right)$$

$$f(z) = V \left( k + \sqrt{k^2} + \frac{1}{2} + d \right) + \frac{Va^2}{k+d + \sqrt{k^2} + \frac{1}{2}}$$

$$\approx V(k+d) + \frac{Va^2}{k+d} + V \left( \sqrt{k^2} + \frac{a^2}{(k+d)^2} \sqrt{k^2} \right)$$

$$1 + \frac{1}{8\sqrt{k^2}}$$

$$= \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{\sqrt{k^2} + \frac{1}{2}}{2a} + \frac{(\sqrt{k^2} + \frac{1}{2})^2}{a^2} \right)$$

$$= 2a + \frac{1}{a} \left( \sqrt{k^2} + \frac{1}{2} \right) + \dots$$

$$\approx 2a + \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{k^2}}{a} + \dots$$

$$\frac{df}{dz} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{k^2}} \right)$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{k}{a} + \frac{3\sqrt{k^2}}{2a} + \dots$$

$$a = k + d$$

$$V_{max} = V \left( 2 + \frac{1}{2a} \right)$$

$$V_{min} = V \left( 2 - \frac{1}{2a} \right)$$

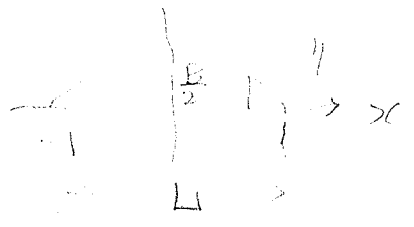
*[Handwritten signature]*

附録 F 線型解 について

i)  $z = 2\delta$

$$\eta''(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2, \quad (F.1)$$

$$\eta(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4, \quad (F.2)$$



$$\eta(\pm l) = 0 \quad \left. \begin{aligned} a_2 + a_4 &= 0 \\ a_1 + a_3 &= 0 \\ a_0 &= \frac{B}{2} \end{aligned} \right\} (F.3)$$

$$A = 2 \int_0^l \eta dx = 4 \left[ a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{3} \right] = 2B\delta, \quad (F.4)$$

$$M = 2 \int_0^l \eta x dx = 4 \left( \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{3} \right) = \frac{8}{15} a_1 = 2A \cdot \left( \frac{l \cdot c \cdot b}{L} \right), \quad (F.5)$$

$$I = 2 \int_0^l \eta x^2 dx = 4 \left( \frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_4}{7} \right) = 4A \left( \frac{x}{L} \right)^2, \quad (F.6)$$

(F.3) & (F.4) より

$$\left. \begin{aligned} a_2 + a_4 &= -\frac{B}{2} \\ 2B\delta &= 2B + \frac{4}{3} a_2 + \frac{4}{3} a_4 \end{aligned} \right\} (F.7)$$

$$2B\delta = 2B + \frac{2}{3} B + \frac{8}{15} a_2, \quad a_2 = \frac{15}{8} B \left( 2\delta - \frac{8}{5} \right)$$

$$a_2 = \frac{15}{4} B \left( \delta - \frac{4}{5} \right), \quad a_4 = -\frac{15}{4} B \left( \delta - \frac{4}{5} \right) + \frac{5}{2} B = \frac{5}{2} B \left( 1 - \frac{3}{5} \delta \right), \quad (F.8)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{x}{L} \right)^2 &= \frac{1}{2B\delta} \left[ \frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_4}{7} \right] = \frac{1}{2\delta} \left[ \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \left( \delta - \frac{4}{5} \right) + \frac{5}{14} \left( 1 - \frac{3}{5} \delta \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\delta} \left[ -\frac{8}{105} + \frac{3}{14} \delta \right] = \frac{3}{28} \left[ 1 - \frac{46}{45\delta} \right], \quad (F.9) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 &= \frac{B}{2} \left[ 1 + \frac{15}{2} \left( \delta - \frac{4}{5} \right) x^2 + 5 \left( 1 - \frac{3}{2} \delta \right) x^4 \right] \\
 &= \frac{B}{2} \left[ 1 - 6x^2 + 5x^4 + \frac{15}{2} \delta x^2 (1 - x^2) \right] \quad \dots (F.10) \\
 &= \frac{B}{2} (1 - x^2) \left[ 1 + 5 \left( \frac{3}{2} \delta - 1 \right) x^2 \right], \quad \dots (F.10)
 \end{aligned}$$

最終的に

$$\begin{aligned}
 \eta(x) &= \frac{B}{2} (1 - x^2) \left[ 1 + 5 \left( \frac{3}{2} \delta - 1 \right) x^2 \right] \\
 &\quad + a_1 x (1 - x^2), \quad \dots (F.11)
 \end{aligned}$$

ii) 3次元回転群

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \eta^{\frac{7}{6}} \right) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \quad \dots (F.12)$$

であるから  $B, \delta, A, M$  等を  $\eta^{\frac{7}{6}}$  の積分として定義すると  
 上と同じである。  $\eta$  を \*印で区別すると。

$$\begin{aligned}
 \frac{B^*}{2} &= \left( \frac{B}{2} \right)^{\frac{7}{6}} \\
 A^* &= 2 \int_{-1}^1 \eta^{\frac{1}{6}} dx = 2 B^* \delta^* \\
 M^* &= 2 \int_{-1}^1 \eta^{\frac{1}{6}} x dx = \frac{8}{15} a_1
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{B^*}{2} \\ A^* \\ M^* \end{aligned}} \right\} (F.13)$$

「電位」

$$\psi = \int_C \left[ \gamma G - \frac{\gamma}{\gamma} \frac{\partial}{\partial n'} G \right] ds(x', y')$$

$$\gamma = -\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \gamma}{\partial n}$$

$$G = -\frac{\gamma \gamma'}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{R} d\theta = -\frac{\gamma \gamma'}{2} \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_1(t\gamma) J_1(t\gamma') dt$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\gamma'}{2} \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_0(t\gamma) J_1(t\gamma') dt \quad \left[ \begin{array}{l} \text{「問題」} \\ \text{「問題」} \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\gamma}{2} \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_1(t\gamma) J_0(t\gamma') dt$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} G, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \gamma \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} G = -\frac{\gamma \gamma'}{2} \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_0(t\gamma) J_1(t\gamma') t dt = \gamma \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y'} G &= -\frac{\gamma \gamma'}{2} \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_1(t\gamma) J_0(t\gamma') t dt \\ &= -\gamma' \frac{\partial T}{\partial x} = \end{aligned}$$

$$\gamma \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\gamma \gamma'}{2} \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_1(t\gamma) J_1(t\gamma') t dt = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$\gamma' \frac{\partial T}{\partial y'} = -\frac{\gamma \gamma'}{2} \int_0^{\infty} e^{-t|x-x'|} J_1(t\gamma) J_1(t\gamma') t dt = \frac{\partial G}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dy} [yy' J_1(xy) J_1(xy')] = y' J_1(xy) [y J_1(xy) + xy J_1'(xy)]$$

$$= xy' J_0(xy) J_1(xy')$$

$$\left. \begin{aligned} J_{n-1} + J_{n+1} &= \frac{2y}{x} J_n \\ J_{n-1}' - J_{n+1}' &= 2 J_n' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (z^2 J_0)' &= 2z J_1 \\ J_0' &= -J_1 \end{aligned}$$

$$\frac{2y}{x} J_1 + 2 J_1' = 2 J_0 \quad , \quad J_1 + \cancel{2} J_1' = 2 J_0$$

$$\frac{d}{dy} [ \quad " \quad ] = xy' J_1(xy) J_0(xy') //$$

$$\frac{d}{dy} [y' J_0(xy) J_1(xy')] = -xy' J_1(xy) J_1(xy')$$

$$\frac{d}{dy} [y' J_0(xy) J_1(xy')] = J_0(xy) [J_1(xy') + xy' J_1'(xy')] J_0'$$

$$= xy' J_0(xy) J_0(xy')$$

$$2z^2 J_1 = \frac{2}{z} J_2 + J_2' \quad , \quad z^2 J_1 = (z^2 J_2)'$$

$$y^2 J_1(y) = y^2 \frac{d}{dy} [z^2 J_2(y)]$$

$$\frac{2}{2y} (y^2 J_2(y)) = \frac{1}{y} \frac{d}{dy} (y^2 J_2) = \frac{2y}{y} J_1 = 2 J_1(y)$$

$$\frac{2}{2y} (y^2 J_1(y)) = \frac{2}{2} J_1 = J_1 + 2 J_1' = 2 J_0$$

$$2 J_0(z) J_1(z') + 2 J_1(z) J_0(z')$$

$$y^2 J_0(y) = \dots$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = y \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -y \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -y' \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = y' \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} = -y \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} - y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y}$$

$$= -y \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = y' \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} \right] = y' \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\int \frac{\partial G}{\partial y} ds' = \int \frac{\partial T}{\partial y} ds'$$

$$= \int \frac{\partial T}{\partial y} ds'$$

$$\psi = \int_c \left[ \frac{\partial G}{\partial y} - y \frac{\partial T}{\partial y} \right] ds'$$

$$\frac{y^2}{2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} + g$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y^2}{2} + \psi \right) = y \frac{\partial \psi}{\partial x} = gy$$

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = - \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{2}{z - \bar{z}} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

流函数  $\chi$

$$u = \frac{2}{z - \bar{z}} \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$v = \frac{2i}{z - \bar{z}} \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$\therefore u - iv = \frac{4}{z - \bar{z}} \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

$$\text{流函数 } \chi = - \frac{1}{4} (L\psi),$$

今  $L\phi = 0$  有流函数  $\chi$  存在。

$$\phi(x, y) = f(z) + \overline{f(\bar{z})}$$

2"8.17"

$$L\phi = \frac{2}{z - \bar{z}} (f'(z) - \overline{f'(\bar{z})}) = 0$$

$$\therefore f'(z) = \overline{f'(\bar{z})} \quad \text{即} \quad f'(z) = C : \text{real}$$

$$f(z) = Cz$$

$$\phi = -\frac{(z - \bar{z})^2}{8}$$

$$L\phi = \cancel{z} \cdot 0 \quad u - iv = \frac{4}{z - \bar{z}} \frac{\partial \phi}{\partial z} = +1$$

$$\phi = f(z)\overline{f(z)}$$

$$f f' \overline{f'} + \frac{2}{z - \bar{z}} (f' \overline{f} - f \overline{f'}) = 0$$

$$f + \frac{2}{z - \bar{z}} \left( \frac{\overline{f}}{f'} - \frac{f}{f'} \right) = 0$$

$$\therefore \frac{f}{f'} = 2(z - \lambda) \quad ; \lambda \text{ real}$$

$$\angle f' < \angle f \quad L\phi \equiv \mathcal{L} f \overline{f} = 0$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{2(z - \lambda)} \quad , \quad \log f = \frac{1}{2} \log(z - \lambda) + C_1$$

$$f(z) = \sqrt{z - \lambda}$$

$$\therefore \phi = \int A(\lambda) d\lambda \sqrt{(z - \lambda)(\bar{z} - \lambda)}$$

次に

$$L\psi = \phi = f\bar{f}$$

任意関数を求めよう

$$\psi = h\bar{h}c\bar{c}, \quad \text{但し } L(h\bar{h}) = 0$$

と仮定

$$L\psi = h\bar{h} \left[ c'\bar{c}' + \frac{\bar{c}c' - c\bar{c}'}{2(z-\bar{z})} \right] + c'\bar{c}'h\bar{h}' + c\bar{c}'h\bar{h}'$$

$$\therefore \frac{h'}{h} = \frac{1}{2(z-\lambda)} \quad \text{と仮定}$$

$$\begin{aligned} L\psi &= h\bar{h} \left[ c'\bar{c}' + \frac{\bar{c}c' - c\bar{c}'}{2(z-\bar{z})} + \frac{c'\bar{c}'}{2(z-\lambda)} + \frac{c\bar{c}'}{2(z-\lambda)} \right] \\ &= h\bar{h} \left[ c'\bar{c}' + \frac{1}{2(z-\bar{z})} \left\{ c'\bar{c}' \left( \frac{z-\lambda}{z-\lambda} \right) - \frac{\bar{z}-\lambda}{z-\lambda} c\bar{c}' \right\} \right] \end{aligned}$$

よって  $c = (z-\lambda)$  と仮定

$$L\psi = h\bar{h} \left[ 1 + \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{2} h\bar{h}$$

$$\therefore \psi = \frac{2}{3} (z-\lambda)(\bar{z}-\lambda) f(z)\bar{f}(\bar{z})$$

$$= \frac{2}{3} (z-\lambda)(\bar{z}-\lambda) \phi(z, \bar{z})$$