No. 4
Date 58. 9. 13 改

2. 最適形状問題

境界条件は物体表面上で

$$u = v = 0 \quad , \text{on } C \qquad (2.1)$$

で(1.7)によればこれは次式と等価である。

$$\overline{\phi(z)} - \bar{z}\,\phi'(z) = \psi(z) \quad , \quad \cdots \qquad (2.2)$$

今z面の物体周Cをζ面の単位円に写像するとし
その写像関数を次のようにおこう。

$$z(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n+1}}{\zeta^{2n+1}} \quad , \quad \cdots \qquad (2.3)$$

(但し簡単の為に前後左右対称形状を考える)

それなら
$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)C_{2n+1}}{\zeta^{2n+2}} \xrightarrow[|\zeta|\gg 1]{} 1 \quad , \qquad (2.4)$$

今
$$\phi(z(\zeta)) = \Phi(\zeta) \quad , \quad \psi(z(\zeta)) = \Psi(\zeta) \quad , \qquad (2.5)$$

とかくと(2.2)は次のようにも書ける。

$$\Phi(\zeta) = z(\zeta)\,\overline{\frac{d}{dz}\Phi(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} \quad , \quad \text{for } |\zeta| = 1 \quad , \qquad (2.6)$$

無限遠方では前節同様

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= M\left[\log\zeta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n}}{2n\,\zeta^{2n}}\right] , \\ \frac{d\Phi}{d\zeta} &= M\left[\frac{1}{\zeta} + \sum_{n=1} \frac{A_{2n}}{\zeta^{2n+1}}\right] , \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

$$\Psi = -M\left[\log\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{\zeta^{2n}}\right] , \qquad (2.8)$$

係数は全て実とする。

さらに

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= M\log\zeta + \Phi_1(\zeta)\\ \hat{\Psi}(\zeta) &= -M\log\zeta + \Psi_1(\zeta)\end{aligned}\right\} \cdots \quad (2.9)$$

とおくと(2.6)は

$$\Phi_1(\zeta) = z(\zeta)\,\overline{\frac{d\zeta}{dz}\frac{d\Phi}{d\zeta}} + \overline{\Psi_1(\zeta)}, \quad (2.10)$$

となり，$\Phi_1(\zeta)$は $|\zeta|>1$ で一価正則であるから，コーシーの定理により

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\Phi_1(t)}{\zeta - t}\,dt, \quad \cdots (2.11)$$

積分は単位円の周りに行うとすると，そこでは(2.10)が成立つので右辺に(2.10)を代入し，さらに(2.8)から

$$\overline{\Psi_1(\zeta)} = -M\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}\zeta^{2n}, \quad \left(\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}\right), \quad (2.12)$$

となるからこれは単位円内で正則であり

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\overline{\Psi_1(t)}}{\zeta - t}\,dt = 0, \quad \cdots (2.13)$$

なる事を考慮すると(2.11)から

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1} \frac{z(t)\,\overline{\dfrac{d\Phi(t)}{dz}}}{\zeta - t}\,dt, \quad |\zeta| \geq 1, \quad (2.14)$$

なる微積分方程式をうる。

(Muskhelishvili 流の解法，cf. "Bergman & Schiffer" "Partial differential eq. …" p. 257)

今は境界値問題において最適形状問題を考えよう。

抵抗最小物体では面上で渦度が一定であればよい。

(1.8)よりその条件が与えられるが、そのような関数として

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) , \quad \cdots\cdots \quad (2.15)$$

がある。

$$I\left[\frac{d\Phi}{dz}\right] = \mp\frac{\pi}{4} i , \quad for \ \theta \gtrless 0 , \ (\zeta = e^{i\theta}) , \quad (2.16)$$

それ故

$$\Phi(\zeta) = \int \frac{d\Phi}{d\zeta} d\zeta = \int \frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \frac{1}{2}\int \lg\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)\frac{dz}{d\zeta} d\zeta$$

(2.4)を代入して

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2}\int^{\zeta}\left[\lg\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right]\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)C_{2n+1}}{\zeta^{2n+2}}\right] d\zeta ,$$

附録Aの積分を使えば

$$\Phi(\zeta) = \lg\zeta + I_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)C_{2n+1} I_{2n+2}\left(\frac{1}{\zeta}\right) , \quad (2.17)$$

$n+\nu=\mu$

$$\therefore \Phi_1(\zeta) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu(2\nu+1)\zeta^{2\nu}} + \sum_{n=0}\sum_{\nu=0}\frac{(2n+1)C_{2n+1}}{(2\nu+1)(2n+2\nu+2)\zeta^{2n+2\nu+2}}$$

$$= -\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\zeta^{2\mu+2}}\left[\frac{1}{(2\mu+2)(2\mu+3)} - \sum_{n=0}^{\mu}\frac{(2n+1)C_{2n+1}}{(2\mu-2n+1)(2\mu+2)}\right] , \quad (2.18)$$

$$\therefore A_{2\mu+2} = \frac{1}{2\mu+3} - \sum_{n=0}^{\mu}\frac{(2n+1)C_{2n+1}}{(2\mu-2n+1)} , \quad \cdots \quad (2.19)$$

次に $\overline{\dfrac{d\Phi}{dz}} = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{\frac{1}{\zeta}+1}{\frac{1}{\zeta}-1}\right) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\zeta^{2\nu+1}}{(2\nu+1)}$, (2·20)

[$\frac{d\Phi}{dz}$ の cut は $z=\pm1$ の方向の直線であるが、この場合は
それに対応して $\zeta=1\sim+\infty$, $\zeta=-1\sim-\infty$ の直線となる
いずれにしても上式は $|\zeta|<1$ で正則である]

であるから

$$Z(\zeta)\overline{\frac{d\Phi}{dz}} = \left(\zeta + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n+1}}{\zeta^{2n+1}}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\zeta^{2\nu+1}}{2\nu+1}\right)$$

$$= F(\zeta) + G\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad \cdots (2·21)$$

$$F(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\zeta^{2\nu+2}}{2\nu+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{\zeta^{2\nu-2n}C_{2n+1}}{(2\nu+1)}, \quad (2·23)$$

$$G\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\frac{C_{2n+1}}{(2\nu+1)\zeta^{2n-2\nu}} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta^{2\mu}}\sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{C_{2n+1}}{(2n-2\mu+1)}, \quad (2·24)$$

(2·10)に代入すると

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1(\zeta) = G\left(\frac{1}{\zeta}\right) \\ &\overline{\Psi_1(\zeta)} = -F(\zeta), \quad \Phi_1(\zeta) = -F\left(\frac{1}{\zeta}\right), \end{aligned}\right\} (2·25)$$

この第1式は C_{2n+1} を定める方程式となる。

即ち (2·18) と (2·24) から ζ の係数を等置すると

$$-\frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{2\mu+1} - \sum_{n=0}^{\mu-1}\frac{(2n+1)C_{2n+1}}{(2\mu-2n-1)}\right] = \sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{C_{2n+1}}{(2n-2\mu+1)}, \quad (2·26)$$

$\mu\geq1$

$$\frac{1}{2\mu}\sum_{n=0}^{\mu-1}\frac{(2n+1)C_{2n+1}}{2\mu-2n-1} - \sum^{\infty}\frac{C_{2n+1}}{2n-2\mu+1} = \frac{1}{\quad}$$

$$\frac{C_1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{2n+1}}{2n-1} = \frac{1}{2\times 3},$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{C_1}{3} + 3C_3\right) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_{2n+1}}{2n-3} = \frac{1}{4\times 5}, \qquad (2.26')$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{C_1}{5} + \frac{3C_3}{3} + 5C_5\right) - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{C_{2n+1}}{2n-3} = \frac{1}{6\times 7},$$

$$\frac{1}{2\mu} \sum_{n=0}^{\mu-1} \frac{(2n+1)C_{2n+1}}{2\mu-2n-1} - \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{C_{2n+1}}{2n-2\mu+1} = \frac{1}{2\mu(2\mu+1)}$$

これを解いて C_{2n+1} をもとめ (2.3) に代入して ε を計算出来る。

C_9 まで書いて見ると

$$\frac{C_1}{2} - C_3 - \frac{C_5}{3} - \frac{C_7}{5} - \frac{C_9}{17} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{C_1}{12} + \frac{3}{4}C_3 - C_5 - \frac{C_7}{3} - \frac{C_9}{5} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{C_1}{30} + \frac{C_3}{6} + \frac{5}{6}C_5 - C_7 - \frac{C_9}{3} = \frac{1}{42}$$

$$\frac{C_1}{56} + \frac{3}{40}C_3 + \frac{5}{24}C_5 + \frac{7}{8}C_7 - C_9 = \frac{1}{72}$$

$$\frac{C_1}{90} + \frac{3}{170}C_3 + \frac{C_5}{10} + \frac{7}{30}C_7 + \frac{9}{10}C_7 = \frac{1}{110}$$

C_5 までとって係数をもとめると $C_1 = .3994$, $C_3 = .0309$, $C_5 = .0065$.

$\frac{L}{2} = 1.4368$, $\frac{B}{2} = .6250$, $L/B = 2.2988$ (植野 Cal. 2.34)

$$C_B = \frac{\pi(1 - C_1^2 - 3C_3^2 - 5C_5^2)}{LB} = \frac{\pi}{4}\,\frac{.8374}{.8980} = .7324$$

C_3 までとると $C_1 = .3818$, $C_3 = .0242$, $L/2 = 1.406$, $B/2 = .642$, $L/B = 2.19$

別法） (2.15)を書き直して，

$$\frac{dz}{d\zeta} = 2\frac{d\Phi}{d\zeta}\Big/ \lg\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) \quad , \quad \cdots \qquad (2.27)$$

(2.7)にならって

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{2n}}{\zeta^{2n}} \quad , \quad A_0 = 1 \quad , \qquad (2.28)$$

とおくと

$$z(\zeta) = 2\int^{\zeta}\frac{\frac{d\Phi}{d\zeta}\,d\zeta}{\lg\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)} + Const. \quad \cdots \qquad (2.29)$$

附録Bの J_n 関数を使うと

$$z(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} J_{2n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = J_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \sum_{\nu=1}\frac{A'_{2\nu}}{(2\nu-1)\zeta^{2\nu-1}} , \qquad (2.30)$$

$$\therefore\ \overline{z(\zeta)\frac{d\Phi}{dz}} = \bar{H}(\zeta) + G\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\zeta^{2\nu+1}}{2\nu+1}\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}J_{2n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\zeta^{2\nu+1}}{2\nu+1}\left[\zeta - \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{a_{2\mu}}{(2\mu-1)\zeta^{2\mu-1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A'_{2n+2}}{(2n+1)\zeta^{2n+1}}\right]$$

(2.31)

$$\bar{H}(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\zeta^{2\nu+2}}{2\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\frac{\zeta^{2\nu-2\mu+2}\,a_{2\mu}}{2\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{\zeta^{2(n-\nu)}A'_{2n+2}}{(2\nu+1)(2n+1)} ,$$

$\cdots$ (2.32)

$$G\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\sum\sum\frac{a_{2\mu+2}}{(2\nu+1)(2\mu+1)\zeta^{2(\mu-\nu)}} + \sum\sum\frac{A'_{2n+2}}{(2\nu+1)(2n+1)\zeta^{2(n-\nu)}}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta^{2n}}\sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{a_{2\mu+2}}{(2\mu+1)(2\mu-2n+1)} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta^{2\mu}}\sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{A'_{2n+2}}{(2n+1)(2n-2\mu+1)}$$

$\mu - \nu = n$ (2.33)

(2.25) により $\quad \Phi_1(\zeta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n}}{2n\,\zeta^{2n}} = G\left(\frac{1}{\zeta}\right)$

であるから ζ の係数を equate して

$$-\frac{A_{2n}}{2n} = -\sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{a_{2\mu+2}}{(2\mu+1)(2\mu-2n+1)} + \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{A'_{2\mu+2}}{(2\mu+1)(2\mu-2n+1)}, \quad \cdots$$

(B.8) を代入すると

$$\frac{A_{2n}}{2n} = \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{1}{(2\mu+1)(2\mu-2n+1)}\left[a_{2\mu+2} + \sum_{\nu=1}^{\mu+1} A_{2\nu}\, a_{2\mu-2\nu+2}\right], \quad (2.34)$$

別法その2)

(2.14)を Muskhelishvili 流に変形すると、

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{z(t)-z(\zeta)}{\zeta - t}\,\overline{\frac{d\Phi}{dz}}\,dt \quad , \cdots \quad (2.35)$$

$$\because \quad z(\zeta)\oint \frac{\overline{\frac{d\Phi}{dz}}}{\zeta - t}\,dt = 0, \quad \text{for } |\zeta|>1$$

そて

$$\frac{z(t)-z(\zeta)}{\zeta - t} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n+1}}{(\zeta t)^{2n+1}}\frac{(\zeta^{2n+1} - t^{2n+1})}{\zeta - t}$$

$$= -1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}\left(\frac{1}{\zeta t^{2n+1}} + \frac{1}{\zeta^2 t^{2n}} + \frac{1}{\zeta^3 t^{2n-1}} + \cdots + \frac{1}{\zeta^{2n+1} t}\right),$$

又

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \overline{\frac{d\Phi}{dz}}\frac{dt}{t^{2n+2m}} = \frac{1}{2\pi i}\oint \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{2\nu-2n+2m-1}}{(2\nu+1)}\,dt$$

$$= \frac{1}{2n-2m+1} \quad , \text{その他は } 0 .$$

$$\therefore \quad \Phi_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\zeta^{2m+2}(2n-2m+1)} \quad , \cdots (2.36).$$

$$\frac{d\Phi_1}{d\zeta} = -\frac{1}{\zeta} + \frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{1}{\zeta} + \frac{dz}{2d\zeta}\log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right),$$

であるから

$$\frac{dz}{2d\zeta}\log\frac{\zeta+1}{\zeta-1} - \frac{1}{\zeta} = -\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}\sum_{m=0}^{n}\frac{(2m+2)}{(2n-2m+1)\zeta^{2m+3}}$$

$$= -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+2)}{\zeta^{2m+3}}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{C_{2n+1}}{2n-2m+1} \quad , \quad (2.37)$$

附録Bの展開係数 a_{2n} を使うと

$$\frac{dz}{d\zeta} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{a_{2\mu}}{\zeta^{2\mu}} - \sum_{\mu=0}^{\infty}a_{2\mu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+2)}{\zeta^{2\mu+2m+2}}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{c_{2n+1}}{2n-2m+1} \quad , (2.38)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)c_{2n+1}}{\zeta^{2n+2}}$$

であるから上式は

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)c_{2n+1}}{\zeta^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\zeta^{2n+2}}\left[a_{2n+2} - \sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{(2n-2\mu+2)a_{2\mu}c_{2\nu+1}}{(2\nu-2n+2\mu+1)}\right] \quad , (2.38')$$

$$\therefore \quad (2n+1)c_{2n+1} = -a_{2n+2} + \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=n-\mu}^{\infty}\frac{(2n-2\mu+2)a_{2\mu}c_{2\nu+1}}{(2\nu-2n+2\mu+1)} \quad , (2.39)$$

(2.36)の右辺は(2.24)に等しい。

又(2.37)の左辺を展開すると(2.26)に等しいものが得られる。

なお ムスケリシュビリ流では $\frac{z(t)-z(\zeta)}{t-\zeta}$ は $\zeta=t$ で正則だから (2.35) 積分方程式として Φ を求める事が出来ると言う訳で、今の場合も z の微積分方程式と見たて解いて良い訳である。

抵抗係数 (?)

$|U|=1$ としたから (1.14) より 抗力 D は

$$|D| = 8\pi\mu U \qquad (3.6)$$

「2次元流れ・・・」の考察より、本当の抵抗は

$$D = \frac{4\pi\mu U}{\frac{1}{2} - \log\left(\frac{\gamma U}{4\nu} l\right)}, \qquad \gamma : \text{Euler's const.}$$

ここに $l = \dfrac{L}{2\left[1 + c_1 + c_3 + \cdots\right]}$, L : 長さ.

附録 A　I_{2n}

$$I_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{2}\int^{\zeta} \lg\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\,d\zeta - \lg\zeta, \qquad (A\cdot 1)$$

$$I_{2n+2}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{2}\int^{1} \frac{d\zeta}{\zeta^{2n+2}} \lg\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right), \qquad (A\cdot 2)$$

$$I_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)} \int^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{2\nu+1}} - \lg\zeta = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\nu(2\nu+1)\,\zeta^{2\nu}}, \qquad (A\cdot 3)$$

$$I_{2n+2}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)} \int^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{2n+2\nu+3}} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)(2n+2\nu+2)\,\zeta^{2n+2\nu+2}}, \qquad (A\cdot 4)$$

附録 B　$J_{2n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$

$$J_{2n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -2\int_{\infty}^{\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta^{2n+1}\,l_g\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)}, \quad n \geq 1 \qquad (B.1)$$

$$J_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -2\int_{1}^{\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta\,l_g\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)},$$

$$l_g\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right) = -2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)\zeta^{2\nu+1}}, \quad \cdots (B.2)$$

$$\frac{1}{\zeta\,l_g\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(a_{2\mu}/\zeta^{2\mu}\right), \quad \cdots (B.3)$$

$a_{2\mu}$は次のようになる。

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{2m}}{\zeta^{2m}}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)\zeta^{2\nu}}\right) = 1 \qquad \mu \quad m+\nu=\mu$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\zeta^{2\mu}}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{a_{2m}}{(2\mu-2m+1)},$$

つまり

$$a_0 = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\mu}\frac{a_{2m}}{2\mu-2m+1} = 0 \qquad \cdots (B.4)$$

$$a_{2\mu} + \frac{a_{2\mu-2}}{3} + \frac{a_{2\mu-4}}{5} + \cdots + \frac{a_0}{2\mu+1} = 0$$

特に　$a_2 = -\frac{1}{3}$，$a_4 = -\frac{a_2}{3} - \frac{1}{5} = -\frac{4}{45}$

$$a_6 = \frac{-44}{3\times5\times7\times9}, \quad a_8 = \frac{-112}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot9} = \frac{-16}{25\times81}$$

$$J_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \left[\zeta - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{a_{2\mu}}{(2\mu-1)\zeta^{2\mu-1}}\right], \quad \cdots (B.5)$$

(定数が残っているがこれをJ_0の定義としよう)

$$J_{2n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{a_{2\mu}}{(2n+2\mu-1)\zeta^{2n+2\mu-1}}, \quad n \geq 1, \quad (B.6)$$

特に

$$J_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \left[\zeta + \frac{1}{3\zeta} + \frac{4}{135\zeta^3} + \frac{44}{4725\zeta^5} + \cdots\right],$$

$$J_{2n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{1}{(2n-1)\zeta^{2n-1}} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{a_{2\mu}}{(2n+2\mu-1)\zeta^{2n+2\mu-1}},$$

$n+\mu = \nu$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} J_{2n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_{2n}\, a_{2\mu}}{(2n+2\mu-1)\zeta^{2n+2\mu-1}} = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\nu} \frac{A_{2n}\, a_{2\nu-2n}}{(2\nu-1)\zeta^{2\nu-1}}$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)\zeta^{2\nu-1}} \sum_{n=1}^{\nu} A_{2n}\, a_{2\nu-2n}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A'_{2\nu}}{(2\nu-1)\zeta^{2\nu-1}}, \quad \cdots (B.7)$$

$$A'_{2\nu} = -\sum_{n=1}^{\nu} A_{2n}\, a_{2\nu-2n}, \quad (B.8)$$

$\nu = \mu + 1$

$n = \nu$

2. 境界値問題

境界条件は物体表面上で

$$u = v = 0 \quad \text{on } C, \tag{2.1}$$

これは(1.7)によれば

$$\overline{\phi(z)} = \bar{z}\,\phi'(z) + \psi(z), \tag{2.2}$$

と等価である。

ここで z-pl. の物体形状 C は ζ-pl. の半径 a の円に写像されるとしよう。その写像関数は

$$z(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n}, \quad \cdots \tag{2.3}$$

つまり

$$z \xrightarrow[|\zeta|\gg 1]{} \zeta, \qquad \frac{dz}{d\zeta} \xrightarrow[|\zeta|\gg 1]{} 1, \tag{2.4}$$

としよう。

今

$$\phi(z(\zeta)) = \Phi(\zeta), \quad \psi(z(\zeta)) = \Psi(\zeta), \tag{2.5}$$

と書きなおすと(2.2)は

$$\overline{\Phi(\zeta)} = \overline{z(\zeta)}\,\frac{d}{dz}\Phi(\zeta) + \Psi(\zeta), \quad \text{on } |\zeta| = a \tag{2.6}$$

ところで無限遠方では(2.4)の条件があるから、前節同様の議論により、ζ-pl. について(1.16)が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= M \lg \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\zeta^n} \\ \Psi(\zeta) &= -M \lg \zeta - (1+M) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\zeta^n} \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

それ故、$\bar{\zeta} = \frac{a^2}{\zeta}$ である事を考慮すると

$$\overline{\Phi(\zeta)} = M\lg\bar{\zeta} + \sum_{n=1}\frac{\bar{A}_n}{\bar{\zeta}^n} = M\lg\frac{a^2}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{A}_n\zeta^n}{a^{2n}}, \quad (2.8)$$
$$= \bar{\Phi}\left(\frac{a^2}{\zeta}\right),$$

又 (2.3)より

$$\overline{z(\zeta)} = \bar{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{C}_n}{\bar{\zeta}^n} = \frac{a^2}{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{C}_n}{a^{2n}}\zeta^n$$
$$= \frac{a^2}{\zeta}f(\zeta), \qquad\qquad (2.9)$$
$$f(\zeta) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{C}_n}{a^{2(n+1)}}\zeta^n,$$

となるから (2.6)は

$$\bar{\Phi}\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) = \frac{a^2}{\zeta}f(\zeta)\frac{d\Phi(\zeta)}{dz} + \Psi(\zeta), \quad (2.10)$$

と書けるがこれはζの正則関数同志の関係となっているからζの全平面で成立つ。

(あるいは鏡像原理によってと言ってもよい)。

(2.7)を代入すると

$$M\lg\frac{a^2}{\zeta} + \sum_{n=0}\frac{\bar{A}_n\zeta^n}{a^{2n}} - \frac{a^2}{\zeta}f(\zeta)\frac{d\zeta}{dz}\left[\frac{M}{\zeta} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nA_n}{\zeta^{n+1}}\right]$$

$$= -M\lg\zeta - (1+M) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\zeta^n}, \quad (2.11)$$

$\zeta^n\ (n \geq 1)$ の係数は右辺にはないから

$$A_n = 0 \quad \text{for } n \geq 1, \quad (2.12)$$

No. 6

Date

前に A_0 は 0 としたがここでは あった方が良く

$$A_0 + 2M\log a = -(1+M) \; , \qquad \cdots (2.13)$$

それ故

$$\overline{\Phi}(\zeta) = M\log\left(\frac{\zeta}{a^2}\right) - (1+M) \; , \qquad \cdots (2.14)$$

となり、

$$\overline{\overline{\Phi}(\zeta)} = -M\log\zeta - (1+M) \; , \qquad \cdots (2.15)$$

∴

$$\psi(\zeta) = -M\log\zeta - (1+M) - \frac{Ma^2}{\zeta^2} f(\zeta)\frac{d\zeta}{dz} \; , \qquad (2.16)$$

渦度は

$$\xi = 4\,\mathrm{Im}\left[\frac{M}{\zeta}\frac{d\zeta}{dz}\right] \; , \qquad \cdots (2.17)$$

3. 最適形状

抵抗最小形状では偏差が一定であればよい。所が偏差は(2.17)で与えられるから、それが一定であるような最も簡単な関数は

$$\frac{1}{\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \alpha \log\left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right) \quad , \cdots\cdots \quad (3.1)$$

$$\mathrm{Im}\left[\log\frac{\zeta-a}{\zeta-a}\right]_{|\zeta|=1} = \pm\frac{\pi}{2} \quad \text{for } \theta \gtrless 0 \quad , (3.2)$$

一方(2.4)の関係があるから

$$-2\alpha = 1 \quad , \cdots\cdots \quad (3.2')$$

それ故

$$|\delta| = M\pi \quad , \cdots\cdots \quad (3.3)$$

(3.1)は

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{2}{\zeta\log\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)} \quad , \cdots\cdots$$

つまり

$$z - z(\zeta=a) = -2\int_a^\zeta \frac{d\zeta/\zeta}{\log\left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a}\right)} \quad , \cdots \quad (3.4)$$

$$z - z\big|_a = -2i\int_0^\theta \frac{d\theta}{\frac{\pi}{2}i + \log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= -2\int_0^\theta \frac{\frac{\pi}{2} + i\log\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\pi^2}{4} + \left[\log\tan\frac{\theta}{2}\right]^2}\,d\theta, \quad (3.5)$$

一次と2次のモーメントが与えられる時は

$$\zeta^2 = c + bz + az^2, \quad (z = x+iy) \quad \cdots (3.6)$$

その時は (3.1)のかわりに (aを1とする)

$$\frac{1}{\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\zeta^n + \frac{1}{\zeta^n}\right) \log\left(\frac{\zeta^{n+1}-1}{\zeta^{n+1}+1}\right), \quad (3.7)$$

但し $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1, \quad \cdots (3.8)$$

とおくと

$$|\zeta| = \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad \zeta = e^{i\theta} \cdots (3.9)$$

そこで任意のa_nを与えて(3.7)からzをもとめる。

そうすると(3.6)のxはa_nの関数として表わされる。

それと(3.9)を比較してa_nが定まる。

と言えるがこれは大変な手間である。

そこで以下逐次近似解法を考える

方法は(2.17)を利用し、まず最初に与えられた形状を単位円に写像する関数をもとめて解を計算し、その形状を微少変形させた時のζの変化をもとめ それが(3.6)を満たすようにしてゆく。

その為に先ず与えられた形状を単位円に写像する関数を求める。

その為には次の形の関数が便利である

$$\zeta = z \exp\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}\right], \quad c_n : \mathrm{real}, \quad (3.10)$$

そうすると形状の上の点で

$$z = r(s)e^{i\alpha(s)}, \quad s : 周長 \quad (3.11)$$

とすると

$$\log\zeta = \log z - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}, \quad (3.12)$$

$$\mathrm{Re}[\log\zeta] = \log r - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{r^n}\cos\{n\alpha(s)\} = 0, \quad (3.13)$$

$\because |\zeta| = 1$,

から c_n が求められる。

この時の ζ の argument θ は次式で与えられる。

$$\theta = \mathrm{Im}[\log\zeta] = \alpha(s) + \sum_{n=1}\frac{c_n}{r^n}\sin[n\alpha(s)], \quad (3.14)$$

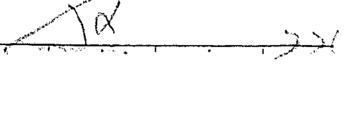
(3.12)から

$$\frac{\xi}{4M} = \mathrm{Im}\left\{\frac{d\zeta}{\zeta\, dz}\right\} = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n c_n}{z^{n+1}}\right], \quad (3.15)$$

所で

$$dz = i\, ds\, e^{i\beta(s)}, \quad (3.16)$$

β は法線が x 軸となす角とすると



$$\frac{\xi}{\eta}\Big|_c = \mathrm{Im}\left\{\frac{d\zeta}{\zeta\, dz}\right\} = -\frac{d\theta}{ds}\sin\beta \quad , \cdots\cdots (3.17)$$

であるから (3.14) で θ を計算しておけば b_n 諸として
計算出来るからあらためて (3.15) で計算する必要はない。

さて物体が法線方向に δn だけふくれるとしよう。

ζ— 平面ではそれは ε に対応するとすると等角写像
であるから ε はやはり単位円に法線方向で

$$\varepsilon = \frac{d\theta}{ds}\delta n \quad , \cdots\cdots (3.18)$$

である。

このふくれた円を単位円に写像する関数は

$$\zeta' = \zeta \exp\left[-\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{n}\right] \quad , (3.19)$$

とおくと (3.13) により

$$\log|\zeta'| = \log(1+\varepsilon) \fallingdotseq \varepsilon$$

であるから

$$\varepsilon = \frac{d\theta}{ds}\delta n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\theta \quad , \cdots (3.20)$$

で $\zeta = e^{i\theta'}$ とすると (3.14) より

$$\theta' = \theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \quad , \cdots (3.21)$$

$$\therefore \frac{d\theta'}{d\theta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos n\theta \quad , \cdots (3.22)$$

δnが小さいとすると高次の項を省略して

$$\frac{d\theta'}{d\theta} \fallingdotseq 1 \quad , \quad \cdots\cdots \quad (3.23)$$

となるようである。

この事は又直観的に s′面と s 面の対応からも

理解出来る。

さて ξ については

$$\left.\frac{\xi'}{4\pi}\right|_{c'} = -\frac{d\theta'}{ds'}\sin\beta' = -\frac{d\theta'}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{ds'}\sin(\beta+\delta\beta),$$

$$\fallingdotseq -\frac{d\theta}{ds}\left[\sin\beta + \delta\beta\cos\beta\right], \quad \cdots \quad (3.24)$$

$$\because \quad ds \fallingdotseq ds', \quad d\theta \fallingdotseq d\theta'$$

$$\delta\beta = \frac{\partial}{\partial s}(\delta n) \quad , \quad \cdots \quad (3.25)$$

$$\therefore \quad \frac{\delta\xi}{4\pi} = -\frac{d\theta}{ds}\cos\beta\,\frac{\partial\delta n}{\partial s} \quad , \quad (3.26)$$

(3.6) より

$$\xi\,\delta\xi = c + bx + ax^2 - \xi^2 \quad , \quad \cdots (3.27)$$

$$\therefore \quad -\frac{d\theta}{ds}\cos\beta\,\frac{\partial(\delta n)}{\partial s} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{c+bx+ax^2}{\xi} - \xi\right], \quad (3.28)$$

これと

$$\int_C \delta n \, ds = \int_C x \, \delta n \, ds = \int_C x^2 \delta n \, ds = 0, \quad (3.29)$$

から δn が求められる。

この δn を元の形状に加えてこの操作をくりかえせばよい。