M-10

No.

Date 58.10.24

2次元層流境界層の逆問題等

内容

参考文献

1) 後藤, 白倉;「減速翼列に適する翼型の研究」第1報, 第2,3報 日本機械学会論文集 B, 49巻, 444 (昭58.8) 445 (昭58.11)

2) J. Citavy, "Two-dimensional compressor Cascades with Optimum Velocity Distribution Over the Blades", Trans. ASME. J. Engineering for Power, Jan. 1975

概要

二次元層流境界層理論においては Karman-Pohlhausen 流の近似解法は簡便で精度も良いとされている。

それによれば運動量厚さは境界層の外側のポテンシャル流れの速度の簡単な関数として表わされるとなり，また剥離条件もレイノルズ数に関係なくポテンシャル流れの速度分布により定まる。

それ故例えば所望の運動量厚さをもつような速度分布は定まってしまい，そのような速度分布を持つ物体形状も定まる。

従ってまた最少抵抗を持つ物体を求める方法も定式化される。

1. 与えられた運動量厚さを持つ形状を求める方法

層流境界層では運動量厚さはよい近似で次式によって表わされると言う。

$$\frac{\theta^2}{\nu} = \frac{0.47}{q^6}\int_0^x q^5\,dx\ , \quad \cdots \quad (1.1)$$

θ: 運動量厚さ, $\nu = \mu/\rho$

q: 周速, x: 周に沿う長さ.

この式によって q が与えられると θ が計算出来る。

逆に θ が与えられるとすると q はどうなるだろうか。

今 $$\theta^2 q^6 = f(x)\ , \quad \cdots\cdots \quad (1.2)$$

とおくと $$q^5 = \left(\frac{f}{\theta^2}\right)^{\frac{5}{6}}\ , \quad (1.3)$$

であるから、これらを (1.1) に代入すると、

$$f(x) = 0.47\nu\int_0^x f^{\frac{5}{6}}\frac{dx}{\theta^{\frac{5}{3}}}\ , \quad \cdots \quad (1.4)$$

x で微分すると

$$f'(x) = 0.47\nu f^{\frac{5}{6}}/\theta^{\frac{5}{3}},\quad f^{-\frac{5}{6}}f' = 0.47\nu\,\theta^{-\frac{5}{3}}$$

$$\therefore\quad 6f^{\frac{1}{6}} = 0.47\nu\int_0^x\frac{dx}{\theta^{\frac{5}{3}}} + \text{Const}.$$

つまり $$q = \frac{0.47\nu}{6\,\theta^{\frac{1}{3}}}\int_0^x\frac{dx}{\theta^{\frac{5}{3}}} + \text{Const}\ , \quad (1.5)$$

右辺の定数は 0 とするより以外は考えられない。

特に平板では $q = V$: const. であるから (1.1) より

$$\theta = \sqrt{\frac{0.4712\nu x}{V}} \quad , \quad \cdots (1.6)$$

(1.5) に代入すると確かに (1.5) は成立っている。

また $x=0$ の近くで θ が

$$\theta \underset{x\to0}{\fallingdotseq} \alpha\sqrt{\frac{0.4712\nu}{V}} \quad \cdots (1.7)$$

と表わされるならば (1.5) より

$$q \underset{x\to0}{\fallingdotseq} \alpha V \quad , \quad \cdots (1.8)$$

である(先端は cusp)。

他方 $q \xrightarrow[x\to0]{} 0$, 例えば 先が丸くて

$$q \xrightarrow[x\to0]{} \beta\sqrt{x} \quad , \quad \cdots (1.9)$$

ならば (1.1) より

$$\theta^2 \xrightarrow[x\to0]{} \frac{2\times0.4712\nu}{7\beta}\sqrt{x} \quad , \quad \theta \propto x^{\frac{1}{4}} , \quad (1.10)$$

のようになる。

いずれにしても θ が与えられれば (1.5) により q が計算出来るから、これから ポテンシャル流れの逆解法により物体形状を求める事が出来る。

一般には薄い物体を取扱うので更に線型理論を用いれば容易に近似値をうる事が出来る。

2. 剥離について

第1近似として剥離はレイノルズ数に関係なく次式で与えられる。

$$\frac{g'}{g^6}\int_0^x g^5\,dx \leqq -0.33 \quad , \cdots \quad (2.1)$$

θについて表わすと，(1.5)から

$$g' = \frac{0.47\nu}{6\theta} - \frac{0.47\nu\,\theta'}{18\,\theta^{\frac{4}{3}}}\int_0^x \frac{dx}{\theta^{\frac{5}{3}}} = \frac{0.47\nu}{6\theta} - \frac{g\theta'}{3\theta}, \quad (2.2)$$

$$\therefore \ \Lambda = \frac{\theta^2}{\nu} g' = \frac{0.47}{6} - \frac{0.47}{18}\theta^{\frac{2}{3}}\theta'\int_0^x \frac{dx}{\theta^{\frac{5}{3}}} < -0.157 \quad , \cdots)$$

$$\theta^{\frac{2}{3}}\theta'\int_0^x \frac{dx}{\theta^{\frac{5}{3}}} \geq 9 \quad , \cdots \quad (2.3)$$

or $$\frac{d}{dx}\left(\theta^{\frac{5}{3}}\right)\int_0^x \frac{dx}{\theta^{\frac{5}{3}}} \geq 15 , \quad (2.3')$$

これ故逆問題ではあらかじめ上式で剥離点を指定出来るわけである。

逆問題で

$$\int_0^x \frac{dx}{\theta^{\frac{5}{3}}} = F(x) \quad , \cdots \quad (2.4)$$

が与えられるとすれば，大変簡単になって、

$$F'(x) = \frac{1}{\theta^{\frac{5}{3}}} \quad , \quad \left(\frac{1}{F'}\right)' = -\frac{F''}{(F')^2} = \frac{d}{dx}\left(\theta^{\frac{5}{3}}\right)$$

であるから (1.5)は

$$g = \frac{0.47\nu F}{6}\left(F'\right)^{-\frac{1}{5}} \quad , \cdots \quad (2.5)$$

(2.3')は

$$\frac{F''F}{(F')^2} \leq -15 \quad , \text{(separat.)} \quad (2.6)$$

あるいは

$$\frac{d}{dx}\lg(\bar{F}'\bar{F}^{15}) = \frac{d}{dx}\lg\left[\frac{1}{16}\frac{d}{dx}(\bar{F}^{16})\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\lg\left(\frac{d}{dx}\bar{F}^{16}\right) \le 0 \qquad (2.7)$$

gについても

$$\int_0^x g^5 dx = G(x), \qquad (2.8)$$

$$G' = g^5, \quad \left(\frac{1}{G'}\right)' = -\frac{G''}{(G')^2} = -5\frac{g'}{g^6}$$

であるから (2.1)は

$$\frac{GG''}{(G')^2} \le -\frac{5}{3}, \qquad (2.9)$$

あるいは

$$\frac{d}{dx}\lg\left[\frac{d}{dx}G^{\frac{5}{3}}\right] \le 0, \qquad (2.9')$$

それ故左辺が正ならば剥離しない。

もう少し直観的な表現をうるために剥離点の近傍で (2.8)のGが次のように展開されるとしよう。

$$G(x) = \frac{a}{2}\xi^2 + b\xi + c, \quad \xi = (x - x_s) \qquad (2.10)$$

$$G'(x) = a\xi + b = g^5, \quad G'' = a$$

それ故 (2.9)は

$$\frac{ac}{b^2} \le -\frac{5}{3}, \qquad (2.11)$$

所で (2.10)のように近似する事はその第2式より

$$g = (a\xi + b)^{\frac{1}{5}}, \qquad (2.12)$$

とする事であるから

$$g' = \frac{a}{5}(a\xi + b)^{-\frac{4}{5}}, \quad g'' = -\frac{4a^2}{25}(a\xi + b)^{-\frac{9}{5}}$$

とする事であり，$\xi \to 0$ とすると.

$$g''/g' = -\frac{4}{5}\frac{g}{c}$$

それ故(2.11)は.

$$-\frac{5}{4}\frac{g''c}{g'g^5} \le -\frac{5}{3}, \quad g'' \ge \frac{4}{3c}g'g^5, \qquad (2.13).$$

g, c は常に正で剥離は $g'<0$ の時に起るから

右辺は負，それ故 少くとも

$$g'' \ge 0 \quad , \quad \cdots\cdots \qquad (2.14)$$

ならば剥離は起らない。

これは速度分布曲線が後半部で直線か又は凹んでいる事であり，一見して見わけがつく。

3. 最少抵抗問題

Squire-Young 法によれば抵抗は次式で与えられると言う。

$$C_V = \frac{R_V}{\frac{\rho}{2}V^2 L} = \frac{2\theta_T}{L}\left(\frac{g_T}{V}\right)^{\frac{H+5}{2}} \fallingdotseq 2\theta_T\left(\frac{g_T}{V}\right)^{3.2} \quad \cdots (3.1)$$

但し剥離はないとして

g_T, θ_T は後端の速度および運動量厚さとする。

$g_T \fallingdotseq V$ であろうから (3.1) をさらに近似的に

$$C_V \fallingdotseq \frac{2m\theta_T}{L}\left(\frac{g_T}{V}\right)^3 \quad \cdots (3.2)$$

とし m を適当に定めて C_V を近似する事にすると (1.1) より

$$\theta_T g_T^3 = \left[0.47\nu \int_0^L g^5 dx\right]^{\frac{1}{2}} \quad \cdots (3.3)$$

上式に代入すると

$$C_V = 2m\left[\frac{0.47\nu}{VL}\int_0^L \left(\frac{g}{V}\right)^5 \frac{dx}{L}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1.371}{\sqrt{R}} m \left[\int_0^L \left(\frac{g}{V}\right)^5 \frac{dx}{L}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

平板では

$$C_{VF} = \frac{1.37}{\sqrt{R}} m \quad \left(\text{ブラジウス } C_{VF} = \frac{1.328}{\sqrt{R}}\right) \quad (3.5)$$

であるから

$$C_V / C_{VF} = \left[\int_0^L \left(\frac{g}{V}\right)^5 \frac{dx}{L}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

それ故 C_V を最小にする問題は次の積分を最小にする問題に等しい。

$$J = \int_0^L \left(\frac{g}{V}\right)^5 \frac{dx}{L} \quad \cdots (3.7)$$

解法は 別報の乱流境界層の時と同じであるから特に記さない。

また薄い物体近似を適用すると最適形状は放物線となる事も同じである。

しかしそれでは剥離するであろうから，副条件として剥離しない条件を入れなければなるまい。

剥離条件(2.7)において左辺の関数は単調に減少する関数のように見えるから，後端において

$$\frac{\delta'}{\delta^6}\int_0^L \delta^5 dx \geq -.33 \qquad \text{--- (3.8)}$$

であれば充分であろう。

この事からまた後端では δ' が有限，つまり cusp でなければなるまい。

(後端が丸ければ $\delta \to 0$, $\delta' \to -\infty$ だから常に剥離がある)