No.

Date 58.12.23

2次元ストークス流れの抵抗の表現について

別所

概要

ストークス流れの境界積分方程式の解は核関数の内の対数項のとり方によっては物体の寸法が異ると異なると言う問題が生ずる。

これは元来ストークス流れの表現式はその分だけ不定である事に起因する。

これをさける為には常にある基準長さによって無次元化した境界積分方程式のみを扱かえばよい。

つまり同じ積分方程式で物体の寸法を変えるとこの現象が生ずる。

またこれをストークス流れはオゼーン流れのレイノルズ数の小さい極限と見なしてオゼーン流れでの抗力に直して考えるとこれは抗力のレイノルズ数への依存性を示している事がわかる。

本報ではこの間の経緯を確認し、また今迄に得られた極値問題の解についての簡単な考察を加える。

1. 境界積分方程式の不定性

ストークス流れの境界積分方程式は無次元化すると

$$\left.\begin{aligned} &\int_C (X_s' U_1^l + Y_s' V_1^l)\, ds = 1 \\ &\int_C (X_s' U_2^l + Y_s' V_2^l)\, ds = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} U_1^l &= \frac{1}{4\pi}\left[\log\frac{l}{R} - \frac{(y-y')^2}{R^2}\right] \\ V_1^l &= \frac{1}{4\pi}\frac{(x-x')(y-y')}{R^2} = U_2^l, \\ V_2^l &= \frac{1}{4\pi}\left[\log\frac{l}{R} - \frac{(x-x')^2}{R^2}\right] \end{aligned}\right\} (1.2) \qquad \left.\begin{aligned} X_s' &= \frac{l X_s}{\mu U} \\ Y_s' &= \frac{l Y_s}{\mu U} \end{aligned}\right\} (1.3)$$

で l は基準長さとする。

l としては 全長 L の半分 $l = \frac{L}{2}$

面積の等しい円の半径 $l = \sqrt{\frac{Area}{\pi}} = a$

浸水長の等しい平板の~~長さ~~の半分

(Sを片側の浸水長として) $l = \frac{S}{2}$ (1.4)

等が考えられる。

抗力は

$$\frac{D_s(l)}{\mu U} = \int_C X_s' ds = \frac{1}{\mu U}\int_C X_s\, l\, ds, \quad (1.5)$$

で与えられ、

$$\int Y_s' ds = 0, \quad (1.6)$$

である。

(1.1)の解は物体の寸法が異なると異なった解をもつ。

即ち、今物体の寸法がλ倍になったとすると(1.2)より

$$\left.\begin{aligned} U_1^{\lambda} - U_1^{l} &= \frac{1}{4\pi}\log\lambda, \quad V_1^{\lambda} = V_1^{l} \\ V_2^{\lambda} - V_2^{l} &= \frac{1}{4\pi}\log\lambda, \end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

* $\boxed{\text{流量}}$

$$\left.\begin{aligned} &\int_c \left[X_s'(\lambda l)\,U_1^{\lambda} + Y_s'(\lambda l)\,V_1^{\lambda}\right] ds = 1 + \frac{D_s(\lambda l)}{4\pi\mu U} \\ &\int \left[X_s'(\lambda l)\,U_2^{\lambda} + Y_s'(\lambda l)\,V_2^{\lambda}\right] ds = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.8)$$

となる。

それなら(1.1)の解を $X_s'(l)$, $Y_s'(l)$, $D_s(l)$ 等と

記せば明らかだ

$$\left.\begin{aligned} X_s'(l) &= \frac{X_s'(\lambda l)}{1 + \frac{D_s(l)}{4\pi\mu U}\log\lambda}, \quad Y_s'(l) = \frac{Y_s'(\lambda l)}{1 + \frac{D_s(l)}{4\pi\mu U}\log\lambda}, \\ D_s(l) &= \frac{D_s(\lambda l)}{1 + \frac{D_s(\lambda l)}{4\pi\mu U}\log\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

となる。

揚力 抗力については 書直して

とおくと 積分方程式は全く同じであるから解も同じである。

即ち
$$\left.\begin{aligned}&\int_c [X_s'(l)U_1^\lambda + Y_s'(l)V_1^\lambda]ds = 1\\ &\int_c [X_s'(l)U_2^\lambda + Y_s'(l)V_1^\lambda]ds = 0\end{aligned}\right\}.$$

しかし この時 U_j^l を使って解くとすると
$$\left.\begin{aligned}&\int_c [X_s'(\lambda l)U_1^l + Y_s'(\lambda l)V_1^l]ds = 1\\ &\int_c [X_s'(\lambda l)U_2^l + Y_s'(\lambda l)V_2^l]ds = 0\end{aligned}\right\}$$

となって 上式と異なる故 解も異なると考えられる。

(1.7)を代入すれば (前頁*へ)

$$\frac{4\pi\mu U}{D_s(l)} = \frac{4\pi\mu U}{D_s(\lambda l)} + \log\lambda , \qquad \cdots (1.10)$$

とも書ける。

それなら 径は円筒 では $D_s(l) = -8\pi\mu U$ なら、

$\lambda = e^{-\frac{1}{2}} \fallingdotseq .6065$ で $D_s(\lambda l) = \infty$, $\frac{4\pi\mu U}{D_s(\lambda l)} = 0$ となる。

つまり常に $D_s(\lambda l) = \infty$ となる寸法はあって その時上式から

$$\frac{4\pi\mu U}{D_s(l)} = +\log\lambda , \quad D_s(\lambda l) = \infty , \qquad (1.11)$$

となっているので、ある寸法で $D_s \to \infty$ となっても別に不便はない。

一般に今迄えられた抗力は負値であるが (1.10) より、正値をとる場合もあるわけで

$$\frac{4\pi\mu U}{D_s(\lambda l)} = \frac{4\pi\mu U}{D_s(l)} - \log\lambda > 0 , \qquad (1.12)$$

つまり λ が1より上式を満たすだけ大きければよい訳で 上述の円の場合では $\lambda < .6065$ では正となる。

しかしこのように寸法によって抗力が変わるのは工合が悪いのでもう一度原点にかえって検討しよう。

2. オゼーン流れの極限としてのストークス流れの抗力

二次元ストークス流れの速度場は対数成分のため不定となるのでそれを定める為には例えばオゼーン流れのレイノルズ数の小さい極限として定義せざるを得ない。

そうすると積分方程式には前節と似た不定性があって、実際の抵抗 D と前節で定義した抵抗 D_s の間には、

$$\frac{4\pi\mu U}{D(l)} = 1 - \log\frac{\gamma k l}{2} + \frac{4\pi\mu U}{D_s(l)}, \qquad (2\cdot1)$$

なる関係が出て来る。　$\log\gamma = .57721$

寸法が λ 倍となると勿論

$$\frac{4\pi\mu U}{D(\lambda l)} = 1 - \log\left(\frac{\gamma k \lambda l}{2}\right) + \frac{4\pi\mu U}{D_s(\lambda l)}. \qquad (2\cdot2)$$

となり、結局前節における抗力の変動はレイノルズ数が変化した事による抗力の変動を意味していた事がわかる。

それ故この現象は何等かの意味でレイノルズ数を指定して抗力を比較すべきであると言う至極当り前の事を意味していた訳である。

No. 8

Date

3. 計算値についての考察

さてレイノルズ数を指定するにはいろいろの方法が考えられるが、ここでは基準長さとして(1.4)の3種類の場合を考えよう。

$$R_\ell = \frac{2U\ell}{\nu}, \quad R_L = \frac{UL}{\nu}, \quad R_A = \frac{2Ua}{\nu}, \quad R_S = \frac{US}{\nu}, \qquad (3.1)$$

夫々の基準長さを(2.1)のℓとしてとればよい。

数値を入れて書き直すと、

$$\frac{4\pi\mu U}{D(\ell)} = 1.8091 - \lg(R_\ell) + \frac{4\pi\mu U}{D_S(\ell)}, \qquad (3.2)$$

$(\lg 6.105 = 1.8091)$

円筒では

$$\frac{4\pi\mu U}{D(a)} = 1.3091 - \lg(R_A), \qquad (3.3)$$

平板では

$$\frac{4\pi\mu U}{D(\frac{S}{2})} = 2.5024 - \lg(R_S), \qquad (3.4)$$

$(\lg 12.21 = 2.5024)$

$= 1.8091 - \lg(R_\ell)$

それ故夫々の場合のレイノルズ数を指定しておけば D_s の大きさの大小と D の大小とは対応する。

例えば面積一定で最小抵抗を求める問題では R_a は一定となるので D_s（負値をとっているから）は $|D_s|$ の最大値を与えるものが求める解となる。

（$D_s > 0$ となるものは D_s の小さい方が良いわけである）

円と最適形状の計算値について次表をうる。

	a	$L/2$	計算値 $R=\dfrac{D_s}{\mu U}$	$\dfrac{4\pi}{R}$	$\frac{L}{2}=1$の時の $4\pi/R$
円	1	1	-8π	$-.5$	$-.5$
最	1	1.651	-32.9	$-.3820$	$+.1194$
適		2	-22.2	$-.5661$	$.1270$
形		5	-8.47	-1.484	$.1258$

最後の欄は $\frac{L}{2}=1$ とした時の値で大体一致している。

比較の為に半長軸 a，短軸 $b\ (=\frac{L}{2})$ の楕円については

$$\frac{4\pi\mu U}{D(\frac{L}{2})}=\frac{a}{a+b}-\log\frac{\gamma k}{4}(a+b)\quad,\quad\cdots\quad(3.5)$$

であるから (2.1) の形に直すと

$$\left.\begin{aligned}\frac{4\pi\mu U}{D(\frac{L}{2})}&=1-\log\frac{\gamma kL}{4}+\frac{4\pi\mu U}{D_s(\frac{L}{2})},\\ \frac{4\pi\mu U}{D_s(\frac{L}{2})}&=-\frac{\beta}{1+\beta}-\log\left(\frac{1+\beta}{2}\right),\quad \beta=\frac{b}{a}\end{aligned}\right\}\quad(3.6)$$

また面積を基準にとると

$$\left.\begin{aligned}\frac{4\pi\mu U}{D(\sqrt{ab})}&=1-\log\left(\frac{\gamma k\sqrt{ab}}{2}\right)+\frac{4\pi\mu U}{D_s(\sqrt{ab})}\\ \frac{4\pi\mu U}{D_s(\sqrt{ab})}&=-\frac{\beta}{1+\beta}-\log\left(\frac{1+\beta}{2\sqrt{\beta}}\right),\end{aligned}\right\}\quad(3.7)$$

となり，附図の如き値をうる。

これらの値から次の事がわかる。

i) 面積一定とすると(面積の平方根を基準長とした
レイノルズ数をとると) 確かに得られた最適形状は
楕円等に比して抵抗が小さい。

ii) 全長から計算したレイノルズ数で比較すると、
明らかに平板が最小抵抗値を与える。
つまり面積が小さいと抵抗は小さくなる。

iii) 全長を指定し面積の指定をはずすと i)の形
状に一致するが、これは $\xi = const$ としたためで
この条件をはずすと ii)の場合で平板が解となる。

iv) 結局 L 一定として計算する時も えられる 形状は面積,
一次,二次モーメント一定の条件,つまり $\xi = a + bx + cx^2$
となるようにすると 面積等が一定の時の最適形状
であって, 長さをとったレイノルズ数の同じ所で
比較すれば面積の小さい方が抵抗が小さい
と言う事である。

v) 最適形状の抵抗値は 1/5の少し大きい 楕円のものに近い。

結局長さを指定しただけでは平板が最小抵抗を与えるようだがこれは停留値ではないと考えられる。これは薄い形状の理論式からわかるように平板抵抗に面積による抗力が附けくわわる形である（$\overline{\text{頁}}$ 35 のように）からである。

面積が大きいと抗力も大きいようであるがこれは次のように説明出来る。

変形 δn による抵抗増加 δD は、

$$\delta D = \mu \int_c \zeta^2 \delta n \, ds,$$

であるから $\delta n \geq 0$ のような面積の増加に対しては常に $\delta D > 0$ つまり抵抗は増加する。

$\delta n > 0$ の条件は長さ，面積指定の計算例では大体満足されているようである。

その他に浸水長を指定する極値問題も考えられるがこの場合は上の長さ指定の場合と同様停留値はなさそうに見えるので今はこれ以上考えない事にしよう。

$\frac{b}{a}$	$\frac{4\pi\mu U}{D_s(a)}$	$\frac{4\pi\mu U}{D_s(\sqrt{ab})}$
1	−0.5	−.5
.75	−.2950	−.5[illegible]
.5	−.0457	−.7388
$\frac{1}{2.457}$ = .407	+.0624	−0.8365
.3	+.2000	−1.0040
.25	+.2700	−1.1163
0	+.6931	−∞