V　M-131

No.

Date 61・8・15

非圧縮性流体力学の境界値問題における変分原理

別所

内容

頁

概要　1

1. 理想流体　2

2. ストークス流れ　6

3. オゼーン流れ　8

4. ナビア・ストークス流れ　10

5. 計算について　12

6. 周期的オゼーン流れ　13

7 〃 ナビア・ストークス流れ（振動分）　15

8 〃 （定常分）　16〜20

参照文献　21

附録　固有関数の直交性　22〜24

概要

これまでナヴィエ・ストークス流れに関して可逆定理を導入して，それが種々の量の近似的見積にも有効である事を示して来た。

その手法は所謂Galerkin法であって流れの解法そのものに応用出来るはずであり，また近来重率残差法の一つとして応用例が報告されている。[4)~8)]

しかしそれらの例では純粋に数値解析的手法として導入され，対応する変分原理もQuasiと頭書がつけられている。

筆者の第1報では境界値問題の変分原理についても言及しているが，それらの方法では領域内で運動方程式を満たすものを許容関数としているので境界要素法のための変分原理となっている。

しかし非線型問題ではこれは役に立たず，どうしても有限要素法を採用せざるを得ない。

以下非粘性の場合から線型，非線型へと順を追って変分原理を考えてみる。

1. 理想流体

従来この場合については Kelvin の運動エネルギー最小の原理から説き起されているが，これは言うまでもなく渦無しの仮定と等価であるから，運動方程式とはあまり関係がない。

ここでは後節との対照上 運動(オイラー)方程式が変分学の方のオイラー方程式となる様な方法を考えてみる。

定常流れの運動方程式と連続の式は

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}G_x - v\zeta = 0 \\ &\frac{1}{\rho}G_y + (1+u)\zeta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

$$G = p + \frac{\rho}{2}\{(1+u)^2 + v^2\}, \qquad (1.2)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad \zeta = v_x - u_y, \qquad (1.3)$$

この形では自己随伴ではないのでやはり逆流れを導入して，(1.1)の2式に夫々 $\tilde{u}, \tilde{v}$ をかけて加え合せて積分すると

$$I_1 = \iint_D \left[\frac{1}{\rho}(G_x\tilde{u} + G_y\tilde{v}) + \zeta\{(1+u)\tilde{v} - \tilde{u}v\}\right] dx\,dy \qquad (1.4)$$

$$I_2 = \iint_D \left[\zeta\{(1+u)\tilde{v} - \tilde{u}v\} - \frac{1}{\rho}G(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y)\right] dx\,dy + \frac{1}{\rho}\oint_C G\left(\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial n} + \tilde{v}\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds, \qquad (1.5)$$

$$I_1 = I_2 \qquad (1.6)$$

逆流れをC上の境界条件は不要であるが任意なものと

とすると、I_1, I_2 の極値問題の解は(1.1)の解に等しい。

また I_2 では G をラグランジュの未定常数と考えると

連続の条件が自然条件として入っている。

今は連続の条件が満たされているとし汎関数を

考える事として I_2 の変分をとると

$$\delta I_2 = \iint_D [\zeta\{(1+u)\delta v - v\,\delta u\}]\,dx\,dy$$

$$= -\iint_D \left[\{(1+u)\zeta\}_x + (v\zeta)_y\right]\delta\psi\,dx\,dy$$

$$\delta u = \delta\psi_y,\quad \delta v = -\delta\psi_x,\quad \delta u = \delta v = 0 \ \text{on}\ C$$

$$\delta I_2 = -\iint_D [(1+u)\zeta_x + v\,\zeta_y]\,\delta\psi\,dx\,dy, \qquad (1.7)$$

つまり

$$(1+u)\zeta_x + v\zeta_y = 0, \qquad (1.8)$$

となってHelmholzの渦度輸送方程式である。

従って最初に渦がなければ渦が無く

$$\zeta = 0 \ \text{in}\ D, \qquad (1.9)$$

となり、流れ関数は調和関数となる。

それで(1.9)により

$$G_x = G_y = 0 \ \text{in}\ D. \qquad (1.10)$$

の解として
$$G = \mathrm{Const.} \quad \text{in } D \qquad (1.11)$$
となりベルヌーイの定理が得られる。

(1.7)によって速度場が本当に求められるのかどうか経験がないので不明であるが、ナビアストークス方程式では出来るという報告がある[3]。

Kelvin の定理では
$$I_3 = \frac{\rho}{2}\iint_D (\Psi_x^2 + \Psi_y^2)\,dx\,dy \qquad (1.12)$$
$$\Psi = \chi + u,$$
の変分をとって
$$\delta I_3 = \rho\iint_D (\Psi_x \delta\Psi_x + \Psi_y \delta\Psi_y)\,dx\,dy$$
$$= -\rho\iint_D (\Psi_{xx} + \Psi_{yy})\,\delta\Psi\,dx\,dy \qquad (1.13)$$
となる。

ポテンシャル流れでは比較関数として調和関数を採ることにすると領域上の積分は消えて境界上の積分のみとなり境界要素法の（部分積分により）変分原理が得られる。

$$I_4 = \frac{1}{2}\int_C \Phi_n(\Phi - 2\Psi_n)\,ds, \qquad \cdots\cdots (1.14)$$

Φ_0は与えられた境界条件で，Φ_0からのこの変換

[illegible]
は切断変換である。

2次元では以上のような議論はあまり意味がないようにも見えるが3次元翼理論，ゲージ理論では有用であろう[3]。

2. ストークス流れ

これは linear, self-adjoint であるから典型的な変分原理を構成する事が出来る場合である。

$$\delta I = -\iint_D \left[(\mu\nabla^2 u - p_x)\delta u + (\mu\nabla^2 v - p_y)\delta v\right] dxdy \quad , \quad (2.1)$$

$$\delta I = -\iint_D \left[-\mu\zeta\delta\zeta + p(\delta u_x + \delta v_y)\right] dxdy$$
$$+ \int_C \left[\mu\zeta(\delta u\, x_s - \delta v\, y_s) + p(\delta u\, x_n + \delta v\, y_n)\right] ds, \quad (2.2)$$

それならストークス流れを解く事は

$$I = \iint_D \left[\frac{\mu}{2}\zeta^2 - p(u_x + v_y)\right] dxdy$$
$$+ \int_C \left[\mu\zeta(u\cdot s) + p(u\cdot n)\right] ds \quad (2.3)$$

の変分問題となる。

(2.2)において流れ関数を導入し $\delta u = \delta v = 0$ on C とすれば部分積分して

$$\delta I = -\mu\iint_D (\nabla^4\psi)\delta\psi\, dxdy \quad , \quad (2.4)$$

つまり $\nabla^4\psi = 0$, (2.5)

となる。

これを解けば速度場は求まる。

圧力は運動方程式から調和関数である。

$$\nabla^2 p = 0 \quad , \qquad (2.6)$$

その C 上の法線微分は

$$\frac{\partial p}{\partial n} = p_x x_n + p_y y_n = \mu(-\zeta_y y_s - \zeta_x x_s) = -\mu\zeta_s \quad , \qquad (2.7)$$

ζ_s は既に求まっているから，圧力は調和関数の第2境界値問題の解として定まる。

この過程は前節と同じである。

境界要素法による時はこれを書換すれば よい訳であるが，この時は変分原理を使っても殆ど有利な所がないが有限要素法では直接階差方程式にする方法に比し比較関数の微分可能性を少くする事が出来る点で有利である。[4]

なおストークス流れで無限領域を扱うのは無理があるかどうか既に検討した事があるので今は触れない。

3. オゼーン流れ

線型ではあるが Self-adjoint でないので 逆流れを導入しなければならない。

$$I = \iint_D \left[\mu S \tilde{\zeta} - p(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) + \rho(\tilde{u} u_x + \tilde{v} v_x) \right] dx\,dy, \quad (3.1)$$

なる汎関数を考えて，逆流れについて変分をとると

$$\delta I = \iint_D \left[(\rho u_x + p_x - \mu \nabla^2 u)\delta \tilde{u} + (\rho v_x + p_y - \mu \nabla^2 v)\delta \tilde{v} \right] dx\,dy. \quad (3.2)$$

となる。 $(\delta \tilde{u} = \delta \tilde{v} = 0 \text{ on } C)$

pはやはりラグランジュの未定係数となって連続の式は自然条件として入って来る。

流れ関数を導入すれば渦度輸送方程式が出て来て，

$$\zeta_x = \nu \nabla^2 \zeta, \qquad \nabla^2 \psi_x = \nu \nabla^4 \psi, \quad (3.3)$$

この境界値問題として速度場が求められる。

圧力は調和関数であり，(2.6), (2.7) は変らないのでこれから圧力が求められる。

この定式化で疑問点は (3.1) を (u, v) について変分をとると全く収拾がつかなくなる点である。

しかし

$$\iint_D (\tilde{u} u_x + \tilde{v} v_x)\, dx\, dy = -\iint_D (u \tilde{u}_x + v \tilde{v}_x)\, dx\, dy$$

$$+ \int_C (u \tilde{u} + v \tilde{v})\, dy \quad , \qquad (3.3)$$

なる関係があるので，C上の境界条件が指定されてあれば，(u,v)で変分をとる時(3.1)の第3項に(3.3)を代入して実行すれば，逆流れの運動方程式が自然条件としてえられ一応辻つまは合うが，もう一つすっきりしないのも事実である。

4. ナビア・ストークス流れ

汎関数として

$$I = \iint_D \left[\mu\zeta^2 - G(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) + \rho\zeta\{(1+u)\tilde{v} - v\tilde{u}\} \right] dxdy, \quad (4.1)$$

を導入し, $(\tilde{u}, \tilde{v})$ について変分をとると

$$\delta I = \iint_D \left[\{G_x + \mu\zeta_y - \rho v\zeta\}\delta\tilde{u} + \{G_y - \mu\zeta_x + \rho(1+u)\zeta\}\delta\tilde{v} \right] dxdy$$

$$+ \int_C \left[\mu\zeta(\delta\tilde{u}\,dx - \delta\tilde{v}\,dy) - G(\delta\tilde{u}\,dy + \delta\tilde{v}\,dx) \right], \quad (4.2)$$

を得るから $\delta\tilde{u} = \delta\tilde{v} = 0$ on C ならば I の極値問題の解はナビア・ストークス流れとなる。

流れ関数を導入すれば (1.8) を導いたのと同じ手順で,

$$\delta I = \iint_D \left[\mu\nabla^2\zeta - \rho(1+u)\zeta_x - \rho v\zeta_y \right] \delta\tilde{\psi}\, dxdy, \quad (4.3)$$

となり, 渦度輸送方程式が出て来る。

速度場が求まると前回称

$$\frac{1}{\rho}\nabla^2 G = (v\zeta)_x - \{(1+u)\zeta\}_y \quad (4.3)$$

なるポアソン方程式を

$$G_n\big|_C = P_n = -\mu\zeta_s \quad (4.4)$$

なる境界条件で解いて 総圧が求められる。

今度はGは調和関数ではないのでF.E.M.で解くしかないであろう。

その為の変分原理は よく知られているように 汎関数で

$$J = \iint_D \left[\frac{1}{2}(G_x^2+G_y^2) - fG\right] dx\,dy, \qquad (4.5)$$

但し

$$f = \{(1+u)\zeta\}_y - (v\zeta)_x, \qquad (4.6)$$

あるいは

$$J' = \iint_D \left[\frac{1}{2}(\nabla G)^2 + (1+u)\zeta G_y - v\zeta G_x\right] dx\,dy, \qquad (4.7)$$

とおけば (4.3) と等価になる。

又(u, v)で変分をとる時は可逆定理により

$$\int_C (X * \tilde{X})\,ds = \rho \iint_D \left[\zeta\{v\tilde{u} - (1+u)\tilde{v}\} - \tilde{\zeta}\{u\tilde{v} - (\tilde{u}-1)v\}\right] dx\,dy \qquad (4.8)$$

なる関係があるので 少くとも物体が前後対称ならば上式は当然0となり，前節同様 逆流れの運動方程式が出て来るが，一般的にはよくわからない。

なお (4.1) のIは逆流れも同じ境界条件ならば抗力である。

分割算について 4/28)

以上の方法で解けるのかどうかはわからないが、同様な方法で Newton-Raphson 法を使って早く解けると言う報告があるので先ずは可能なのであろう。

おそらく直接階差法に比して ψは二次式，微分は1次式で連續，従って ζは要素上で一定とすればよいので大分楽になる。

気懸りな点としては ζは物体を離れると急速に小さくなるので遠い所での速度場がうまく求められるだろうかと言う点である。

この点については速度場の漸近展開が求められているのでそれを使ってIの遠くの領域の積分を部分積分で積分面(外接線)上の積分になおしておく等の方法もありうる。

6. 周期的オゼーン流れ

一般的な非定常問題についての変分原理では汎関数は前節のそれを更に時間的に積分したものとなり，少し複雑となるのでまたの機会の事とし，ここでは一定な周期的変動流れについて考える事にする。

この場合は定常の場合と殆ど同じで，まずオゼーン流れでは

$$\delta I = \iint_D \left[(\mu\zeta_y + p_x + \rho u_x + \rho i\omega u)\delta\tilde{u} + (-\mu\zeta_x + p_y + \rho v_x + \rho i\omega v)\delta\tilde{v} \right] dx\,dy$$

$$= \iint_D \left[\mu\zeta\delta\tilde{\zeta} - p(\delta\tilde{u}_x + \delta\tilde{v}_y) + i\omega\rho(u\delta\tilde{u} + v\delta\tilde{v}) + \rho(u_x\delta\tilde{u} + v_x\delta\tilde{v}) \right] dx\,dy, \qquad (6.1)$$

となるから（$\delta\tilde{u} = \delta\tilde{v} = 0$ on C），流れ関数を導入すると，

$$\delta I = -\iint_D \left[\mu\nabla^2\zeta - \rho\zeta_x + i\rho\omega\zeta \right] \delta\tilde{\psi}\, dx\,dy, \qquad (6.2)$$

つまり

$$\rho\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta = \mu\nabla^2\zeta, \qquad (6.3)$$

となる。

圧力については前同様に調和関数なので流れ場が求められた後，次の境界条件の下に計算する。

$$p_n = -\mu\zeta_s - \mu\left[\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)f\right], \qquad (6.4)$$

ここに f は C 上の ψ で境界条件から

$$\psi = f, \quad \psi_n = f_n \quad \text{on } C \tag{6.5}$$

さて $f = f_n = 0$ ならば運動方程式に夫々の共役複素をかけて

$$i\rho\omega u + \rho u_x + p_x + \mu \zeta_y = 0 \quad \times \hat{u}$$
$$i\rho\omega v + \rho v_x + p_y - \mu \zeta_x = 0 \quad \times \hat{v}$$

積分し（さらに）部分積分すると

$$\iint_D \left[i\rho\omega(u\hat{u} + v\hat{v}) + \mu\zeta\hat{\zeta} + \rho(u_x\hat{u} + v_x\hat{v}) \right] dx\,dy = 0, \tag{6.6}$$

を得るが，その実部を考えると

$$\iint_D \left[\mu\zeta\hat{\zeta} + \frac{\rho}{2}(u_x\hat{u} + v_x\hat{v} + \hat{u}_x u + \hat{v}_x v) \right] dx\,dy = 0 \tag{6.7}$$

第2項は x で積分出来て境界条件から 0 となるから

$$\mu \iint_D \zeta\hat{\zeta}\, dx\,dy \geqq 0 \tag{6.8}$$

それ故

$$\zeta = 0 \quad \text{in } D, \tag{6.9}$$

つまり流れは渦なしとなる。

一方渦なし流れで斉次の境界条件をもつものは恒等的に 0 の解しかないから，この解は一意的に定まる。

7. 周期的ナビア・ストークス流れ（振動分）

この部分は準線型であるのでオゼーン流れと略々同型となる。

同様な平均流れとして、

$$\delta I = \iint_D \Big[(\rho i\omega u + G_x + \mu\zeta_y - v\bar{\zeta} - \bar{v}\zeta)\delta\tilde{u} + (\rho i\omega v + G_y - \mu\zeta_x + (1+\bar{u})\zeta + u\bar{\zeta})\delta\tilde{v} \Big] dxdy, \tag{7.1}$$

但し

$$G = p + \rho(u + u\bar{u} + v\bar{v}), \tag{7.2}$$

部分積分して，$\delta\tilde{u} = \delta\tilde{v} = 0$ on C とすれば

$$\delta I = \iint_D \Big[\rho i\omega(u\delta\tilde{u} + v\delta\tilde{v}) + \mu\zeta\delta\tilde{\zeta} - G(\delta\tilde{u}_x + \delta\tilde{v}_y) + \{(1+\bar{u})\zeta + u\bar{\zeta}\}\delta\tilde{v} - (v\bar{\zeta} + \bar{v}\zeta)\delta\tilde{u} \Big] dxdy. \tag{7.3}$$

流れ関数を導入すれば，前同様これは渦度輸送方程式と等価になる。

$$\rho\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta - \mu\nabla^2\zeta + \rho\{u\bar{\zeta} + \bar{u}\zeta\}_x + \rho(v\bar{\zeta} + \bar{v}\zeta)_y = 0$$

or $$\rho\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta + \rho\left[u\bar{\zeta}_x + v\bar{\zeta}_y + \bar{u}\zeta_x + \bar{v}\zeta_y\right] = \mu\nabla^2\zeta, \tag{7.4}$$

G は

$$\frac{1}{\rho}\nabla^2 G = (v\bar{\zeta} + \bar{v}\zeta)_x - \{(1+\bar{u})\zeta + u\bar{\zeta}\}_y, \tag{7.5}$$

によって4節と同様にして境界条件(6.4)により積分される。

オゼーン流れでは $u=v=0$ on C なる境界条件では解は恒等的に0となる事は前節で見た。

しかし今の場合は固有解が存在すると考えられる。

さて 斉次の境界条件の下では

$$I=\iint_D\Big[(i\omega\rho u+G_x+\mu\zeta_y-\rho v\bar{\zeta}-\rho\bar{v}\zeta)\tilde{u}+(i\omega\rho v+G_y-\mu\zeta_x+\rho(\overline{U+u})\zeta+\rho u\bar{\zeta})\tilde{v}\Big]dxdy$$

$$=\iint_D\Big[i\rho\omega(u\tilde{u}+v\tilde{v})+\mu\zeta\tilde{\zeta}+\rho(\overline{U+u}\,\zeta+u\bar{\zeta})\tilde{v}-\rho(v\bar{\zeta}+\bar{v}\zeta)\tilde{u}\Big]dxdy$$

$$=0\ ,\quad\cdots\quad(17.6)$$

$(\tilde{u},\tilde{v})$ のかわりに $(\hat{u},\hat{v})$ をかけても同じで

$$J=\frac{1}{2}\iint_D\Big[i\rho\omega(u\hat{u}+v\hat{v})+\mu\zeta\hat{\zeta}+\rho(\overline{U+u}\,\zeta+\rho u\bar{\zeta})\hat{v}-\rho(v\bar{\zeta}+\bar{v}\zeta)\hat{u}\Big]dxdy$$

$$=0\ ,\quad(17.7)$$

実部と虚部に分けてかくと

$$\frac{1}{2}\iint_D\Big[\mu\zeta\hat{\zeta}+\frac{\rho}{2}(\bar{\zeta}\hat{v}+\hat{\bar{\zeta}}v)+\frac{\rho\bar{u}}{2}(\zeta\hat{v}+\hat{\zeta}v)-\frac{\rho\bar{v}}{2}(\zeta\hat{u}+\hat{\zeta}u)\Big]dxdy=0$$

$$(17.8)$$

ついで

$$\iint_D(\zeta\hat{v}+\hat{\zeta}v)\,dxdy=0$$

となり第1項は粘性による単位時間のエネルギー損失で他の項は時間平均流れがレイノルズ応力を通じて（振動流れに）供給するパワーである。

(7.7)の虚部は

$$\frac{1}{2}\iint_D\left[i\rho\omega(u\bar{u}+v\bar{v})+\frac{\rho}{2}(1+\bar{\Pi})(\zeta\bar{v}-\bar{\zeta}v)-\frac{\rho\bar{\Pi}}{2}(\zeta\bar{u}-\bar{\zeta}u)\right]dxdy=0, \quad (7.9)$$

(7.6), (7.9)は固有値方程式で見た所, どちらを使っても良いように見える。

拘束条件なしにこれを解くと最低次の固有値が与えられるであろう(準線形であるから数学的には問題ない)。

なお定常流れでは運動エネルギーの積分は無限大となるが今は

$$\frac{\rho}{2}\iint_D(u\bar{u}+v\bar{v})dxy<\infty \quad (7.10)$$

遠場の速度場は二重吹出しとなるので有限と考えられる。

特に(7.9)で有限要素上で積分して合計をとれば実係数の固有値方程式が得られそれを解けば良いように思われる。

また固有関数系は直交系でなければならないと考えられるが, 今の所その証明は思いつかない。

(直交条件式の形がわからない)
(附録参照)

8. 周期的ナビア・ストークス流れ（定常分）

運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} &\overline{G}_x - \mu\nabla^2\overline{u} - \rho\left\{\overline{v}\zeta + \frac{1}{4}(v\hat{\zeta} + \hat{v}\zeta)\right\} = 0 \\ &\overline{G}_y - \mu\nabla^2\overline{v} + \rho\left\{\overline{1+u}\,\zeta + \frac{1}{4}(u\hat{\zeta} + \hat{u}\zeta)\right\} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (8.1)$$

$$\overline{G} = \overline{P} + \frac{1}{2}\left\{(\overline{1+u})^2 + \overline{v}^2\right\} + \frac{1}{4}(u\hat{u} + v\hat{v}), \quad (8.2)$$

逆流れをかけて積分すれば

$$I = \iint_D \Big[\mu\zeta\tilde{\zeta} - \overline{G}(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y) + \rho\zeta(\overline{1+u}\,\tilde{v} - \overline{v}\,\tilde{u}) + \frac{\rho}{4}\left\{(u\hat{\zeta} + \hat{u}\zeta)\tilde{v} - \tilde{u}v\hat{\zeta} - \hat{v}\zeta\tilde{u}\right\}\Big]\,dx\,dy$$

$$= \left[\int_C [illegible]\, ds\right], \quad (8.3)$$

これらの右辺最後の項は前節の解（一般には可附番無限個）で与えられるが、一方前節の解はこの解から与えられる。

それ故、この２者は聯立させて解かねばならない訳であるが、その手順については全く思いつかない。

さてずっと見て来たように（8.3）の変分問題を解く事は結局渦度輸送方程式を解く事と等価であった。

今は

$$\nu\nabla^2\zeta - \left\{\overline{v}\zeta + \frac{1}{4}(v\hat{\zeta} + \hat{v}\zeta)\right\}_y - \left\{\overline{1+u}\,\zeta + \frac{1}{4}(u\hat{\zeta} + \hat{u}\zeta)\right\}_x = 0, \quad (8.4)$$

ついで

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}_0 + \overline{\psi}_\Delta \quad , \quad (8.5)$$

とおいて $\overline{\psi}_0$ は層流解とおき $\overline{\psi}_\Delta$ の自乗の項か…

無視出来るものとしよう。

まず前節の $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\zeta}$ は $\bar{\zeta}_\Delta$ を無視して $\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{\zeta}_0$ とおくならば前節の解は定まって a_n を任意定数として

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n , \qquad (8.6)$$

と与えられる。

(8.4)に(8.5)を代入して $O(\bar{\zeta}_\Delta^2)$ の項を無視すれば

$$\nu\nabla^2\bar{\zeta}_0 - (\bar{v}_0\bar{\zeta}_0)_y - (\overline{1+u_0}\,\bar{\zeta}_0)_x = 0, \qquad (8.7)$$

$$\nu\nabla^2\bar{\zeta}_\Delta - \left\{\bar{v}_0\bar{\zeta}_\Delta + \bar{v}_\Delta\bar{\zeta}_0 + \frac{1}{4}(v\hat{\zeta} + \hat{v}\zeta)\right\}_y - \left\{\overline{1+u_0}\,\bar{\zeta}_\Delta + \bar{u}_\Delta\bar{\zeta}_0 + \frac{1}{4}(u\hat{\zeta} + \hat{u}\zeta)\right\}_x = 0, \qquad (8.8)$$

なお $\bar{\psi}_\Delta$ の境界条件は斉次で

$$\bar{\psi}_\Delta = \frac{\partial}{\partial n}\bar{\psi}_\Delta = 0 \quad \text{on } C, \qquad (8.9)$$

$\bar{\psi}_\Delta$ に関す微分方程式(8.8)は非線型であるから解の重ね合せが可能で また

$$v\hat{\zeta} + \hat{v}\zeta = \sum_n a_n\hat{a}_n(v_n\hat{\zeta}_n + \hat{v}_n\zeta_n), \qquad (8.10)$$

のように表わされるから

$$\bar{\psi}_\Delta = \bar{\psi}_H + \sum_n a_n\hat{a}_n\bar{\psi}_n , \qquad (8.11)$$

のように分けて（$\bar{\psi}_H = 0$ のように思える 証明要）

$$\nu\nabla^2\overline{\zeta_H} - \{\overline{v_0\zeta_H} + \overline{v_H\zeta_0}\}_y - (\overline{(1+u_0)\zeta_H} + \overline{u_H\zeta_0})_x = 0, \quad (8.12)$$

$$\nu\nabla^2\overline{\zeta_n} - \{\overline{v_0\zeta_n} + \overline{v_n\zeta_0}\}_y - (\overline{(1+u_0)\zeta_n} + \overline{u_n\zeta_0})_x$$
$$- \frac{1}{4}\{(v_n\hat{\zeta}_n + \hat{v}_n\zeta_n)_y + (u_n\hat{\zeta}_n + \hat{u}_n\zeta_n)_x\} = 0, \quad (8.13)$$

これらの方程式を解いて解は求まるが、a_nは定まらない。

しかし(7.8)の関係は夫々の固有関数について成立つから、上に得られた解(8.11)を代入すると、係数$|a_n|^2$の連立一次方程式を得るから、それを解けば例えば$|a_1|^2$だけ未知となる。

それを定常分についての(7.8)と同様な式（第2報(7.3)）に代入すれば$|a_1|^2$に関する2次式となり、それを解いて$|a_1|^2$が求まるように見える。

しかし、これでもまだ位相は定まらないが、それは当然のようにも思える。

それでもこれで平均流れも定まるから、抵抗は求まる訳である。

参照文献

1) 別所, オゼーン図式による粘性流れの研究 第1報, 第2報, 第3報

2) Bessho, M., On the viscous flow around a thin cylinder, Osaka Colloquium '85 (1985)

3) 別所, 波理論における非線型可逆定理, 造学 運動性能委, 昭60.10.9

4) Huebner, K.H., 山田嘉昭訳, 有限要素法, 科学技術出版社, (1975) 訳1978

5) Finlayson, B.A. (1972) The method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, New York

6) Oden, J.T. & Reddy J.N. (1972), Finite Elements of Non-linear Continua, Mc Graw-Hill, New York

7) 同上 (1975), Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer-Verlag.

8) Gallagher, R.H., Oden, J.T., Zienkiewicz, Finite Elemends in Fluid, vol. 1 & 2, John-Wiley & Sons (1975)

9) Joseph, D.D., Stability of Fluid Motion I & II Springer-Verlag, 1976

附録 固有関数の直交性

元々逆流れを導入したのは方程式がSelf-adjoint でない所からAdjoint eq. の解を物理的に解釈したものであるがこの解釈は純線型方程式の場合はAdjoint eq. の解と一致するが、準線型(非)になるとAdjoint eq. は逆流れの方程式として導入したもの(1)(2)とは異なる。

これが7節での困難の原因であると考えられる。

そこでAdjoint eq. を導いて見よう。

既に見て来たように流れについては渦度輸送方程式のみ考えればよいから以下それについて考える。

先ず定常流れでは(4節)

$$\{(1+u)\zeta\}_x + (v\zeta)_y - \nu\nabla^2\zeta = 0 \qquad (A\text{-}1)$$

Adjoint flow (逆流れと異なるので以下こう呼ぶ) の流れ関数を $\tilde{\psi}$ としそれをかけて領域上で積分すれば

$$\iint_D \left[\{(1+u)\zeta\}_x + (v\zeta)_y - \nu\nabla^2\zeta\right]\tilde{\psi}\,dx\,dy = 0$$

$$= \oint_C \left[\zeta\tilde{\psi}\left(\overline{1+u}\,dy + v\,dx\right)\right] + \iint_D \left[\zeta\left(\overline{1+u}\,\tilde{v} - v\tilde{u}\right) - \nu\tilde{\psi}\nabla^2\zeta\right]dx\,dy$$

$$= \int_C \left[\zeta\hat{\psi}\left(\overline{1+U}\, y_s + V x_s\right) + \nu\left(\zeta \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial n} - \hat{\psi}\frac{\partial \zeta}{\partial n}\right)\right] ds$$

$$- \iint_D \left[\nu\hat{\zeta} + \overline{1+U}\,\hat{v} - V\hat{u}\right] \nabla^2 \psi \, dx\,dy \quad , \qquad (A.2)$$

第2の積分をもう一度グリーンの定理を用いて部分積分すると結局

$$\iint_D \psi\, \nabla^2 \left\{\nu\hat{\zeta} + \overline{1+U}\,\hat{v} - V\hat{u}\right\} dx\,dy = \int_C \left[\ \cdots\ \right] , \qquad (A.3)$$

を得るから，結局 Adjoint eq. は

$$\nabla^2 \left[\nu\hat{\zeta} + (1+U)\hat{v} - V\hat{u}\right] = 0 \ , \qquad (A.4)$$

となって元の方程式の解 u, v を含む。

振動方程式では2次の項を省略するので準線形となりそのような困難は無い。

以下は境界条件が斉次として固有値方程式について考えるものとする。

さて偏差輸送方程式は

$$i\omega\zeta + \left(\overline{1+U}\,\zeta + u\zeta\right)_x + \left(\overline{V}\zeta + v\zeta\right)_y - \nu\nabla^2\zeta = 0, \quad (A.5)$$

$\tilde{\Psi}$をかけて積分すると　$-\nu\zeta\nabla^2\psi$

$$\iint_D \Big[-i\omega\tilde{\Psi}\nabla^2\psi + \nabla^2(\overline{\Pi u}\,\zeta + u\zeta) - \tilde{\Psi}(\tilde{v}\zeta + v\tilde{\zeta}) + \nu\zeta\tilde{\zeta}\Big]\,dxdy$$

$$= \iint_D \Big[i\omega\nabla\psi\nabla\tilde{\Psi} + \zeta\,(\overline{\Pi u}\,\tilde{v} - \tilde{U}\tilde{v} + \nu\tilde{\zeta}) + \zeta(u\tilde{v} + v\tilde{u})\Big]\,dxdy$$

$$= \iint_D \Big[i\omega\nabla\psi\nabla\tilde{\Psi} + \psi\big\{\nabla^2(\overline{\Pi u}\,\tilde{v} - \tilde{U}\tilde{v} + \nu\tilde{\zeta}) + (\tilde{U}\tilde{\zeta})_y + (\tilde{U}\tilde{\zeta})_x\big\}\Big]\,dxdy = 0 \qquad (A\cdot 6)$$

$(-\psi\nabla^2\tilde{\Psi})$

それ故 Adjoint eq. は

$$i\omega\tilde{\zeta} + \nabla^2(\overline{\Pi u}\,\tilde{v} - \tilde{U}\tilde{v} + \nu\tilde{\zeta}) + (\tilde{U}\tilde{\zeta})_x + (\tilde{U}\tilde{\zeta})_y = 0 \qquad (A\cdot 7)$$

Adjoint eq. の固有値は元の eq. の固有値に等しい事はよく知られている。

そこでもう一の固有値 ω' に対応する流れ函数の $\psi', \tilde{\Psi}'$ を考えて方程式をたて上のような積分を実行し，差をとると

$$i(\omega - \omega')\iint_D \nabla\psi\nabla\tilde{\Psi}'\,dxdy = 0 \,, \qquad (A\cdot 8)$$

それ故 $\omega \neq \omega'$ ならばこの積分が 0 となり，今はこれが直交関係となる。（かに記述はあるが意味不明）