No. 0-1
Date 61.10.21
粘性委

決定論的乱流理論構成への展望

防大　別所正利

概要

巽は最新刊の「乱流現象の科学」の序論において乱流現象は本来ナビア・ストークス方程式の解であると言う意味では決定論的現象であるけれども大変複雑であるから統計的方法に頼らざるを得ないし，それ以外に方法はないと言っている。

この意見は大体において中正かつ標準的意見であると考えられるが，一方最近の計算機の大容量化と技術の進歩によりかなり複雑な流れのシミュレーションも可能になってきた。

この事は近い将来乱流現象をも決定論的に解く可能性に大きい望みを抱かせるに充分である。

そして同時に理論的側面から決定論的に解くとするならばどのような理論的構成が考えられるかまた流れをどこまで決定できるか（例えば乱流の位相まで決定するのは殆ど絶望的に思われる）などについて考察を始める必要があると思われ，最近のカオス理論等はこの意味での一つの試みと考えられる。

本文は如上の観点からナビア・ストークス方程式を解いて乱流解をうるための一つの手順の試みを提示しようとするものである。

先ずA,B,C節において非定常非圧縮性ナビア・ストークス方程式のエネルギー定理と変分原理について述べる。

変分原理の誘導にはナビア・ストークス方程式の随伴形式の誘導が必要である。これまで著者は線形理論からの類推で逆流れ形式を使って来たが、これは物理的像は明確でかつ近似計算には有用であるが、さらに正確な解を求めようとすると必然的に有限要素法に頼らざるを得ないので、その理論的基礎としての変分原理を導くために今回随伴流れなるものを導入したが、その線形近似は今まで使って来たオゼーン逆流れに一致する。

少し節番号はとぶが次に6,7節で(2次元流路について)時間依存流、変動流についてその解法について考察し最後に8節で平面ポアゼイユ流れについてもう少し具体的に解法についてのべる。

参考文献

1. Oden, J. T., Reddy, J. N., "Variational Methods in Theoretical Mechanics" 2nd. ed., Springer, 1983

2. Olson, M.D., Variational Finite Elements Methods for Two-dimensional and Axisymmetric Navier-Stokes Equations, Chap. 3 of Finite Elements Methods in Fluids vol. 1, edited by Gallagher, Oden, Taylor, Zienkiewicz, John Wiley & Sons, 1975

3. Finlayson, B. A., Weighted Residual Methods and their Relation to Finite Elements Methods in Flow Problems, Do. vol. 2, chap. 1.

4. 巽友正編 乱流現象の科学, その解明と制御, 東京大学出版会, 1986

5. 別所正利, オゼーン型式による粘性流れの研究 第1〜3報, 日本造船学会論文集 昭和59〜61年

6. Orsag, S.A., Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, J. Fluid Mech. (1971) vol. 50, pt. 4, pp689-703.

A. 非定常運動のエネルギー定理

運動方程式は

$$\rho \mathbf{u}_t + \nabla G - \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho(1+\mathbf{u}) \times \boldsymbol{\omega} , \qquad (A.1)$$

$$G = p + \frac{\rho}{2}\{(1+u)^2 + v^2 + w^2\} , \qquad (A.2)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0 , \quad \boldsymbol{\omega} = \{\xi, \eta, \zeta\} , \qquad (A.3)$$

(A.1)の両辺に $\mathbf{u}$ をかけて領域Dに積分すると、

$$\int_D \left[\frac{\rho}{2}(\mathbf{u}^2)_t + \mathbf{u}\cdot\nabla G - \mu \mathbf{u}\nabla^2\mathbf{u} - \rho\,\mathbf{u}\cdot(1+\mathbf{u})\times\boldsymbol{\omega} \right] dxdydz = 0 ,$$

となり、

$$\frac{\rho}{2}\int_D (\mathbf{u}^2)_t \, dxdydz = \frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\int_D \mathbf{u}^2 \, dxdydz + \frac{\rho}{2}\int_S \mathbf{u}^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) dS , \qquad (A.4)$$

なる関係があるので、部分積分によって、上の積分は

$$\frac{d}{dt}K + F - W = 0 , \qquad (A.5)$$

のように書ける。

$$K = \frac{\rho}{2}\int_D \mathbf{u}^2 \, dxdydz \qquad (A.6)$$
; 運動エネルギー

$$F = \mu\int_D \boldsymbol{\omega}^2 \, dxdydz \qquad (A.7)$$
; 粘性による散逸エネルギー,

$$W = -\int_S (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau}) \, dS \qquad (A.8)$$
, 物体のなす仕事率

$$\boldsymbol{\tau} = \{X, Y, Z\} , \qquad (A.9)$$

$$(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau}) = -p(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - \mu\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}\times\mathbf{n}), \qquad (A.10)$$

(A.5)はエネルギー不滅則を表わし、物体の単位時間になす仕事は流体の運動エネルギー増加と粘性による散逸に等しい事を示している。

物体の加速運動を除き実用上は次の場合が重要である。

i) 周期的運動

この場合一周期間積分すれば(A.5)の左辺第1項はなくなる。

$$\int_{t_0}^{t_0+T}[F-W]\,dt = 0, \qquad (A.11)$$

ii) プロペラ問題

一回転積分すれば、(A.11)が成立つ。

iii) 乱流境界層、(物体静止)

充分長い時間平均(Almost Periodic)すれば

やはり

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}[F-W]\,dt = 0, \qquad (A.11')$$

となる。

B. 非定常運動の変分原理と随伴流れ（2次元）

運動方程式は

$$u_t + \frac{1}{\rho}G_x + \nu\,\zeta_y = v\zeta$$

$$v_t + \frac{1}{\rho}G_y - \nu\,\zeta_x = -(1+u)\zeta \qquad \cdots (B\cdot1)$$

$$G = p + \frac{\rho}{2}\{(1+u)^2 + v^2\}, \qquad (B\cdot2)$$

$$u_x + v_y = 0, \qquad (B\cdot3)$$

今後に導出するような随伴流れ (u^*, v^*) を導入し連続の方程式を満たすものとして、(B・1)の2式に夫々 u^*, v^* をかけて領域上に積分すれば

$$\int_D \Big[u^*u_t + v^*v_t + \frac{1}{\rho}(u^*G_x + v^*G_y) + \nu(u^*\zeta_y - v^*\zeta_x) - \zeta\{v u^* - (1+u)v^*\}\Big]\,dxdy = 0,$$

まず(A-4)の積分によって

$$\int_D (u^*u_t + v^*v_t)\,dxdy = \int_D (uu^* + vv^*)_t\,dxdy - \int_D (uu^*_t + vv^*_t)\,dxdy$$

$$= \frac{d}{dt}K^* + \int_C (uu^* + vv^*)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,ds - \int_D (uu^*_t + vv^*_t)\,dxdy, \qquad (B\cdot4)$$

ここに

$$K^* = \int_D (uu^* + vv^*)\,dxdy, \qquad (B\cdot5)$$

これを使って更に部分積分すると

$$\frac{d}{dt}K^* + \int_D \Big[-(uu_t^* + vv_t^*) + \nu\zeta\zeta^* - G(u_x^* + v_y^*) + \zeta\{(1+u)v^* - vu^*\}\Big] dxdy$$

$$= -\int_C \Big[\frac{G}{\rho}(\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{n}) - \nu\zeta(\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{s}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^*)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\Big] ds, \quad (B\cdot 6)$$

今随伴流れが次の方程式を満たすとしよう。

$$\left.\begin{aligned} -u_t^* + \frac{1}{\rho}G_x^* + \nu\zeta_y^* + \zeta v^* = 0 \\ -v_t^* + \frac{1}{\rho}G_y^* - \nu\zeta_x^* - \zeta u^* - \zeta^* = 0 \end{aligned}\right\} \cdots (B\cdot 7)$$

G^*を消去すると

$$\zeta_t^* + \zeta_x^* + u^*\zeta_x + v^*\zeta_y + \nu\nabla^2\zeta^* = 0, \quad (B\cdot 8)$$

G^*は次の微分方程式の解とする。

$$\frac{1}{\rho}\nabla^2 G^* + (\zeta v^*)_x - (\zeta u^*)_y - \zeta_y^* = 0, \quad (B\cdot 9)$$

なお元の流れでは(B·1)より

$$\zeta_t + (1+u)\zeta_x + v\zeta_y - \nu\nabla^2\zeta = 0, \quad (B\cdot 10)$$

$$\frac{1}{\rho}\nabla^2 G + \{(1+u)\zeta\}_y - (v\zeta)_x = 0, \quad (B\cdot 11)$$

(B·7)を(B·6)に代入して部分積分すると

$$\int_D (\zeta^* v + \zeta v^*)\,dxdy = \int_C \Big[u(\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{n}) + v(\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{s})\Big] ds, \quad (B\cdot 12)$$

$$\frac{d}{dt}K^* - \int_C \left[u(\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{n}) + v(\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{s}) + \frac{p^*}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - \nu\zeta^*(\mathbf{u}\cdot\mathbf{s}) \right] ds$$

$$= -\int_C \left[\frac{1}{\rho}p(\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{n}) - \nu\zeta(\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{s}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^*)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) \right] ds. \qquad (B.13)$$

を得る。

これが可逆定理であり，時間平均をとると前節で挙げたような場合には左辺第1項は0となる。

さて(B.8)で2次の項を省略すると

$$\zeta_t^* + \zeta_x^* + \nu\nabla^2\zeta^* = 0 \qquad (B.14)$$

となり(B.10)で同じく2次の項を省略したオゼーン流れ

$$\zeta_t + \zeta_x - \nu\nabla^2\zeta = 0 \qquad (B.15)$$

であるから随伴流れは元の流れ（の線形化解）の時間軸と一様流れの方向を逆にした流れになり，従来考えて来た逆流れに一致するが（特に定常問題でなく非線形項のために）物理的像は不明確である。

また元の流れのζが与えられない(B.8)は非線型である。

(B.6) において

$$u^* = v^* = 0 \quad \text{on } C \qquad (B.16)$$

とおき時間で積分すると

$$\left[K^* \right]_{t}^{t+T} + \int_t^{t+T} dt \iint_D \left[-(uu_t^* + vv_t^*) + \nu \zeta \zeta^* + S\{(H+1)v^* - vu^*\} \right] dx\,dy = 0 \qquad (B.17)$$

となるが、これはこの問題を F.E.M. で解く際の変分原理となる。

つまり (B.16) と連続の式を満たす関数 u^*, v^* によって Galerkin 法を使うための原理式となっている。

この時前節で (後に) あげた場合には左辺第1項がなくなって簡単になる。

また一般に問題を解く為のマトリックスにおいて随伴流れの方は元の転置行列になっていると考えられる。

最後に (B.17) を解く事は (B.10) を解く事と等価で、流れが求まると (B.11) (のポアソンの方程式) を解いて G を求め、(B.2) によって圧力を求めて解は完成する事になる。

この時 G の境界条件は (B.1) より

$$\frac{1}{F} G_n = \nu \zeta_s - (u_t x_n + v_t y_n) + S\{ v x_n - (H+1) y_n \} \quad \text{on } C \qquad (B.18)$$

C. 続(3次元)

運動方程式(A.1)と(A.3)で与えられる。

$$\boldsymbol{u}_t + \frac{1}{\rho}\nabla G - \nu\nabla^2\boldsymbol{u} - (1+\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{\omega} = 0, \qquad (A.1)$$

勾配をとると

$$\frac{1}{\rho}\nabla^2 G = \nabla\cdot(1+\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{\omega}, \qquad (C.1)$$

回転をとると

$$\boldsymbol{\omega}_t - \nabla\times\{(1+\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{\omega}\} - \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} = 0,$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega} = \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ であるから

$$\nabla\times\{(1+\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{\omega}\} = \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla(1+\boldsymbol{u}) - (1+\boldsymbol{u})\cdot\nabla\boldsymbol{\omega}$$

となるので結局

$$\boldsymbol{\omega}_t + (1+\boldsymbol{u})\cdot\nabla\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla(1+\boldsymbol{u}) - \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} = 0, \qquad (C.2)$$

(A.1)に随伴流れをかけて積分し部分積分すると

$$\frac{d}{dt}K^* + \int_D\left[-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*_t + \nu\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}^* - (1+\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}^*)\right]dx\,dy\,dz$$
$$+\int_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\,ds + \int_S(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{u}^*)\,ds = 0, \qquad (C.3)$$

$$K^* = \int_D \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*\,dx\,dy\,dz. \qquad (C.4)$$

結局 Adjoint Flow の方程式は

$$-\boldsymbol{u}^*_t + \frac{1}{\rho}\nabla G^* - \nu\nabla^2\boldsymbol{u}^* + (1+\boldsymbol{u}^*)\times\boldsymbol{\omega} = 0, \qquad (C.5)$$

と探ればよかろう。