No. 1
Date 61.11.26 別冊

Orr-Sommerfeld eq. の解の表現（平面ポアゼイユ流）

O-S eq. の解を線型核を使って表現し，固有値方程式
（前稿Oseen近似の……のように？）
を積分方程式に変換する。

O-S eq は

$$i(\omega - kU)(k^2\phi - \phi_{yy}) - ikU_{yy}\phi + \nu\left(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\phi = 0 \qquad (1)$$

であるが今適当な c_0 ($=$ constant U_{mean} or U_{max}) を導入して次のように置く。

$$\omega = kc = kc_0 - k(c_0 - c), \quad \omega_0 = kc_0, \quad c_0 : \text{const.}$$

$$ikc_0(k^2\phi - \phi_{yy}) + \nu\left(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\phi = ikU_{yy}\phi + ik(U + c_0 - c)\left(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi,$$

$$= ikF(y) \qquad (2)$$

これを左辺の線型方程式の非斉次解として表現する事を試みる。

まず

$$\phi(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{iny}, \quad \pi > y > -\pi \qquad (3)$$

と表わされるとすると

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(y) e^{-iny}\, dy, \qquad (4)$$

左辺に(3)を代入すると

$$\sum_n \left\{ ikc_0(k^2+n^2) + \nu(k^2+n^2)^2 \right\} a_n e^{iny} = ikF(y)$$

$$\{ikc_0 + \nu(k^2+n^2)\}(k^2+n^2)\, a_n = \frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y) e^{-iny}\, dy,$$

$$a_n = \frac{ik}{2\pi\nu(k^2+n^2)\left(k^2+n^2 + i\frac{kc_0}{\nu}\right)} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) e^{-iny}\, dy, \qquad (5)$$

以下 $\frac{ikc_0}{\nu} = \alpha$ とおく。

$$\therefore \quad \phi(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} F(y) \cdot K(\eta - y)\, dy, \qquad (6)$$

$$K(y) = \frac{i k}{2\pi\nu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{iny}}{(k^2+n^2)(k^2+n^2+i\alpha)}, \quad \alpha = \frac{k c_0}{\nu}, \qquad (7)$$

$$F(y) = U_{yy}\phi + (U + c_0 - c)(k^2\phi - \phi_{yy}), \qquad (8)$$

さて

$$\frac{1}{(k^2+n^2)(k^2+n^2+i\alpha)} = \frac{1}{i\alpha}\left(\frac{1}{k^2+n^2} - \frac{1}{k^2+n^2+i\alpha}\right)$$

$$\frac{ik}{2\nu\, i k (c_0)}$$

$$\cosh ky = \frac{1}{\pi} \sinh(\pi k) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-)^n e^{iny}}{k^2+n^2}$$

$$\cosh k(y \pm \pi) = \frac{\sinh \pi k}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iny}}{k^2+n^2}$$

$$\therefore \quad \frac{k}{2} \cosh ky \coth \pi k = \frac{\sinh}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iny}}{k^2+n^2}$$

同様にして $\cosh(y\sqrt{k^2+i\alpha}) \coth \pi\sqrt{k^2+i\alpha} = \frac{1}{\pi} \sum \frac{e^{iny}}{n^2+k^2+i\alpha}$ (9)

$$\therefore \quad K(y) = \underbrace{\frac{ik}{2\nu i\alpha}}_{=\frac{1}{2c_0}} \left[\coth \pi k \cosh ky - \coth(\sqrt{k^2+i\alpha}) \cosh(\sqrt{k^2+i\alpha}\, y)\right], \qquad (10)$$

$$\frac{d}{dy} K(y) = \frac{1}{2c_0}\left[k \coth \pi k \sinh ky - \sqrt{k^2+i\alpha} \coth \pi\sqrt{k^2+i\alpha} \sinh(\sqrt{k^2+i\alpha}\, y)\right], \qquad (11)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} K = \frac{1}{2c_0}\left[k^2 \coth \pi k \cosh ky - (k^2+i\alpha) \coth(\pi\sqrt{k^2+i\alpha}) \cosh(\sqrt{k^2+i\alpha}\, y)\right], \qquad (12)$$

$$\left(k^2 - \frac{d^2}{dy^2}\right) K(y) = \frac{i\alpha}{2c_0} \coth(\pi\sqrt{k^2+i\alpha}) \cosh(\sqrt{k^2+i\alpha}\, y), \qquad (13)$$

(6)と(8)を代入すると

$$\varphi(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi}\left[U_{yy}\varphi + (U+c_0-c)(\alpha^2\varphi - \varphi_{yy})\right]K(\eta-y)\,dy \quad ,(6')$$

境界条件は

$$\varphi(\pm\pi) = \varphi_y(\pm\pi) = 0, \qquad (14)$$

であるから これを上式に入れると固有値方程式となる。

（(6')のφ_{yy}を部分積分して(14)を使うと）

$$\varphi(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\{U_{yy} + \alpha^2(U+c_0-c)\}\varphi K - \varphi\{U_{yy}K + 2U_yK_y + (U+c_0-c)K_{yy}\}\right]dy$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left[(U+c_0-c)\varphi(\alpha^2K - K_{yy}) - 2\varphi U_yK_y\right]dy, \qquad (15)$$

これから(14)の条件下では 次の $\eta=\pm\pi$ …

$$c\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha^2K - K_{yy})\,dy = \int_{-\pi}^{\pi}\left[(U+c_0)(\alpha^2K-K_{yy}) - 2U_yK_y\right]\varphi\,dy, \quad (16)$$

$\eta=\pm\pi$

$$c\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha^2K_y - K_{yyy})\,dy = \int_{-\pi}^{\pi}\left[(U+c_0)(\alpha^2K_y-K_{yyy}) - 2U_yK_{yy}\right]\varphi\,dy, \quad (17)$$

$U(\alpha^2\phi + K_y \phi_y)$

$+ U(K_y\phi_y + \phi\ldots)$

あるいは

$$(c-c_0)\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha^2K-K_{yy})\phi\,dy = \int_{-\pi}^{\pi}[U(\alpha^2K-K_{yy})-2U_yK_y]\phi\,dy \qquad (16')$$

(同じく η で微分したもの) $K_y = -K_\eta$

いずれにしても 与えられた $U(y)$ および α に対し 4つの方程式がある。∴ それらから未知数 c を消去すると 3つの方程式が得られる。 それ故 $\phi = \sum_{n=1}^{3}A_n\phi_n$ なる関数で近似すれば A_n がきまる事になり、簡単な近似値をうる方法である事になるが、どの程度の値を与えるであろうか。?

正確に計算するには (15) を固有値方程式とみなして解けばよい。
$\underbrace{\qquad}_{(14)\text{の下に}}$

$$\phi(\eta) + (c-c_0)\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha^2K-K_{yy})\phi\,dy = \int_{-\pi}^{\pi}\{U(\alpha^2K-K_{yy})-2U_yK_y\}\phi\,dy,$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}U[\phi(\alpha^2K+K_{yy})+2\phi_yK_y]\,dy, \qquad (18)$$

純粋に数値的にといてもよいが、(3) のように展開し U も $U = \sum b_n e^{iny}$ のように展開すれば典型的な固有値方程式をうる。
(注意 a_n も a_n)

随伴方程式では

$$i(\omega - kU)(k^2\phi^* - \phi^*_{yy}) + 2ikU_y\phi^*_y + \nu\left(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\phi^* = 0.$$ (19)

$$ikc_0(k^2\phi^* - \phi^*_{yy}) + \nu\left(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\phi^* = ikF^*(y)$$

$$F^*(y) = (U + c_0 - c)\left(k^2\phi^* - \frac{d^2}{dy^2}\phi^*\right) - 2U_y\phi^*_y \quad , (20)$$

$$\phi^*(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} F^*(y)K(\eta - y)\,dy \qquad (21)$$

$$\phi^*(\eta) + (c - c_0)\int_{-\pi}^{\pi}\left(k^2K - \frac{d^2}{dy^2}K\right)\phi^*\,dy$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left[U(k^2\phi^* - \phi^*_{yy})K - 2U_y\phi^*_yK\right]dy$$

$$+2U(K\phi^*_y + \ldots$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} U\left[(k^2\phi^* + \phi^*_{yy})K + 2\phi^*_yK_y\right]dy \quad , (22)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\phi^*\left[k^2UK + (KU)_{yy} \mp 2(UK_y)_y\right]dy$$

$$k^2UK + K_{yy}U + 2K_yU_y + KU_{yy} - 2U_yK_y - 2UK_{yy}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\phi^*\left[U(k^2K - K_{yy}) + KU_{yy}\right]dy \quad , (23)$$

固有値問題でなく境界値問題の時は C は与えられたものとしてよいから $C=C_0$ と置かなくてよい。

その時は (6) より

$$\phi(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} \{U_{yy}\phi + U(k^2\phi - \phi_{yy})\} K \, dy$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[(k^2 U + U_{yy})\phi K + \phi_y (UK)_y\right] dy - \left[U\phi_y K\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \phi L \, dy + \left[\phi(U_y K + U K_y) - \phi_y U K\right]_{-\pi}^{\pi}, \quad (24)$$

$$L(\eta, y) = \{k^2 U(y) + U_{yy}(y)\} K(\eta - y)$$

$$\cancel{+} U_{yy} K - 2U_y K_y - U K_{yy}$$

$$= -k^2 U(y) K(\eta - y) - 2U_y(y) K_y(\eta - y) - U(y) K_{yy}(\eta - y), \quad (25)$$

となるが もし $\begin{cases} U(\pm\pi) = 0 \\ \phi(\pm\pi) = 0 \end{cases}$ ならば 斉次方程式となって具合が悪いので (2) の左辺の一般解 $f(y)$ を加えておくべきである。

$$\phi(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(y) L(\eta, y) \, dy + f(\eta), \quad (26)$$

$$f(y) = A \cosh ky + B \sinh ky + C \cosh \sqrt{\cdots}\, y + D \sinh \sqrt{\cdots}\, y, \quad (27)$$

A, B, C, D は境界条件を満たすように定める。

$$-\int \Phi_{yy} e^{-sy} = -\Phi_y e^{-sy}\Big| - s\int \Phi_y e^{-sy}$$

$$= (-\Phi_y - s\Phi) e^{-sy}\Big| + s^2 \Phi(s)$$

次に y の変域が $[0, \infty]$ の場合を考えよう。

今 $\phi(y)$ をラプラス変換して

$$\Phi(s) = \int_0^\infty \phi(y) e^{-sy} dy \qquad , \; \cdots \qquad (28)$$

とおくと

$$\phi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \Phi(s) e^{sy} ds \quad , \; \varepsilon > 0 \qquad (29)$$

(2)の両辺をラプラス変換すると

$$(k^2 - s^2)\{c_0 - \tfrac{\nu}{ik}(k^2 - s^2)\}\Phi(s) - c_0\{\phi_y + s\phi\}_{y=0}$$

$$+ \frac{\nu}{ik}\left[-2k^2(\phi_y + s\phi) + \phi_{yyy} + s\phi_{yy} + s^2\phi_y + s^3\phi\right]_{y=0}$$

$$= \int_0^\infty \left[U_{yy}\phi + (U + c_0 - c)\left(k^2 - \frac{d^2}{dy^2}\right)\phi\right] e^{-sy} dy$$

(30)

境界条件として
$$\left.\begin{aligned}\phi(0) = \phi_y(0) = 0\\ \phi(\infty) = \phi_y(\infty) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

故に

$$\Phi(s) = \frac{\frac{ik}{\nu}}{(k^2 - s^2)(k^2 - s^2 + i\alpha)} \int_0^\infty \left[U_{yy}\phi + (U + c_0 - c)\left(k^2 - \frac{d^2}{dy^2}\right)\phi\right] e^{-sy} dy$$

$$+ \frac{A + Bs}{(k^2 - s^2)(k^2 + i\alpha - s^2)} \quad , \quad \alpha = \frac{k c_0}{\nu} , \qquad (31)$$

A, B は任意定数とする。

それ故逆変換にて

$$\phi(\eta) = \int_0^\infty \left[U_{yy}\phi + (U + c_0 - c)\left(k^2 - \frac{d^2}{dy^2}\right)\phi\right] K(\eta - y)\, dy$$

$$+ A' K(\eta) + B' K_\eta(\eta) , \qquad (32)$$

A', B' は A, B に対応する定数である。

$$K(y) = \frac{k}{2\pi\nu}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{e^{sy}\,ds}{(k^2-s^2)(k^2-s^2+i\alpha)}, \quad \cdots (33)$$

そこで

$$\frac{1}{(k^2-s^2)(k^2-s^2+i\alpha)} = \frac{1}{i\alpha}\left(\frac{1}{k^2-s^2} - \frac{1}{k^2-s^2+i\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{i\alpha}\left[\frac{1}{2\sqrt{k^2+i\alpha}}\left(\frac{1}{s-\sqrt{k^2+i\alpha}} - \frac{1}{s+\sqrt{k^2+i\alpha}}\right) - \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right)\right], \quad (34)$$

であるから　$k>0$, $\alpha>0$ とすると

$y>0$ に対して

$$K(y) = \frac{1}{c_0}\left[\frac{e^{-\sqrt{k^2+i\alpha}\,y}}{2\sqrt{k^2+i\alpha}} - \frac{e^{-ky}}{2k}\right],$$

$y<0$ に対して

$$K(y) = \frac{1}{c_0}\left[\frac{e^{\sqrt{k^2+i\alpha}\,y}}{2\sqrt{k^2+i\alpha}} - \frac{e^{ky}}{2k}\right],$$

つまり

$$K(y) = \frac{1}{2c_0}\left[\frac{e^{-\sqrt{k^2+i\alpha}\,|y|}}{\sqrt{k^2+i\alpha}} - \frac{e^{-k|y|}}{k}\right], \quad (35)$$

$$\left(k^2 - \frac{d^2}{dy^2}\right)K(y) = \frac{-i\alpha}{2c_0\sqrt{k^2+i\alpha}}\,e^{-\sqrt{k^2+i\alpha}\,|y|}, \quad (36)$$

$$\left(k^2+i\alpha - \frac{d^2}{dy^2}\right)K(y) = \frac{-i\alpha}{2c_0 k}\,e^{-k|y|}, \quad (37)$$

(32)を部分積分して、A', B'の項は省略しておくと、

$$\phi(\eta) = \int_0^\infty \phi(y) L(\eta, y)\, dy, \quad \cdots \quad (38)$$

$$L(\eta, y) = \{U_{yy}(y) + k^2(U(y) + c_0 - c)\} K(\eta - y)$$
$$= \{(U + c_0 - c) K(\eta - y)\}_{yy}$$
$$= \{U(y) + c_0 - c\}\{k^2 K - K_{yy}\} - 2 U_y(y) K_y(\eta - y), \quad (39)$$

(32)のA', B'の項は固有値問題の時は不要と考えられるが境界値問題の時には(26)のような形で考えておかねばならぬだろう。

従って固有値方程式は次のようになろう。

$$\phi(\eta) + (c - c_0)\int_0^\infty (k^2 K - K_{yy})\phi(y)\, dy$$
$$= \int_0^\infty \left[U(k^2 K - K_{yy}) - 2 U_y K_y\right]\phi(y)\, dy, \quad (40)$$