H-157

No.
Date 62・6・7

軸対称偏微分方程式の非斉次解

概要

1. ポアソン方程式

軸対称な場合のポアソン方程式は次のようになる。

$$\nabla^2\{\psi(r)e^{in\theta}\} = -\{\zeta(r)e^{in\theta}\}, \qquad (1.1)$$

以下このrの関数部分だけとりあげる事にすると上式は

$$\nabla_n^2\psi(r) = -\zeta(r), \qquad (1.2)$$

$$\nabla_n^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}, \qquad (1.3)$$

となるが，以下(1.2)の特解を求める事にするが一般解はよく知られているように以下の解に斉次解，今は調和関数を加えればよい。

解法の手順はよく知られたポアソンの解の積分表示を周方向に積分して一重積分に直すだけであるがその際次の展開を用いる。

$$\log\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(\theta-\theta')} = \log r - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{r}\right)^n}{n}\cos n(\theta-\theta'), \quad r>a$$
$$= \log a - \sum \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^n}{n}\cos n(\theta-\theta'), \quad r<a \qquad (1.4)$$

i) $n=0$ の場合　(a) $r>1$ に対して

$$\psi(r) = -\log r\int_1^r \zeta(a)\,a\,da - \int_r^\infty \zeta(a)(\log a)\,a\,da, \qquad (1.5)$$

$$\psi_r(r) = -\frac{1}{r}\int_1^r \zeta(a)\,a\,da, \qquad (1.6)$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}&\psi_r(1) = 0\\ &\psi(1) = -\int_1^\infty \zeta(a)\,a\log a\,da,\end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

(1.5)は (1.2)を代入して直接次の様に証明出来る。

$$\int_1^r \zeta(a)\, a\, da = -\int_1^r \left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)\psi\, a\, da = -a\psi_a\Big|_1^r = -r\psi_r(r) + \psi_r(1),$$

$$\int_r^\infty \zeta\, a \log a\, da = -\psi_a\, a \log a\Big|_r^\infty = +\psi_r(r)\, r \log r + \psi(r),$$

夫々加え合せて (1.5) となる

ii) $n \neq 0$ の場合

$$\left.\begin{aligned} \psi(r) &= \frac{1}{2n\, r^n}\int_1^r \zeta(a)\, a^{n+1}\, da + \frac{r^n}{2n}\int_r^\infty \zeta(a)\, a^{1-n}\, da, \\ \psi_r(r) &= -\frac{1}{2 r^{n+1}}\int_1^r \zeta(a)\, a^{n+1}\, da + \frac{r^{n-1}}{2}\int_1^\infty \zeta(a)\, a^{1-n}\, da, \end{aligned}\right\} \quad (1.8)$$

$$\left.\begin{aligned} \psi(1) &= \frac{1}{2n}\int_1^\infty \zeta(a)\, a^{1-n}\, da \\ \psi_r(1) &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \zeta(a)\, a^{1-n}\, da \\ \therefore\quad \psi(1) &= \frac{1}{n}\psi_r(1) \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

上の場合 関係 (1.8)は 部分積分して 証明出来る。

2. 周期的ストークス流れの渦度輸送方程式の場合

$$(\nabla^2 - k^2)\{\zeta(r)e^{in\theta}\} = -\bar{F}(r)e^{in\theta}, \qquad (2.1)$$

$$(\nabla_n^2 - k^2)\zeta(r) = -\bar{F}(r), \qquad (2.2)$$

この場合

$$\left.\begin{aligned} &K_0(kR) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n K_n(kr) I_n(ka) \cos n(\theta-\theta'), \quad r>a, \\ &R^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos(\theta-\theta'), \quad (\varepsilon_0 = 1, \ \varepsilon_n = 2) \\ &K_n(k) I_n'(k) - K_n'(k) I_n(k) = \frac{1}{k}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

なる関係を利用して

$$\left.\begin{aligned} \zeta(r) &= K_n(kr)\int_1^r \bar{F}(a) I_n(ka)\, a\, da + I_n(kr)\int_r^\infty \bar{F}(a) K_n(ka)\, a\, da, \\ \zeta_r(r) &= k K_n'(kr)\int_1^r \bar{F} I_n\, a\, da + k I_n'(kr)\int_r^\infty \bar{F} K_n\, a\, da, \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta(1) &= I_n(k)\int_1^\infty \bar{F} K_n\, a\, da \\ \zeta_r(1) &= k I_n'(k)\int_1^\infty \bar{F} K_n\, a\, da \\ \zeta_r(1)/\zeta(1) &= k I_n'(k)/I_n(k), \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

この場合 $n=0$ でも同じ形である。

3. グリーンの公式

前2節の表現は常微分方程式のスツルム・リウヴィルの定理を利用した形になっている。

あるいはまたグリーンの定理を応用したと言っても良い訳で、ここでは次節に進む前に一般的にまとめて記す。

さて先ず今核関数 $S(r,a)$ が調和関数で

$$\nabla^2(r) S(r,a) = 0 \quad , \quad \nabla^2(a) S(r,a) = 0 \qquad (3.1)$$

で $a=r$ において微係数がジャンプしその量が

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[a \frac{d}{da} S(r,a) \right]_{a=r-\varepsilon}^{a=r+\varepsilon} = 1 \quad , \qquad (3.2)$$

のような性質を持つとしよう。

ただし

$$\nabla^2(a) = \frac{d^2}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{d}{da} - \frac{n^2}{r^2} \quad , \qquad (3.3)$$

次の積分を考えて上式を使って変形すれば

$$\int_1^\infty \left[S(r,a)\, \nabla^2(a) \psi(a) \right] a\, da = \int_1^\infty \left[S(r,a)\, \nabla^2(a) \psi(a) - \psi(a)\, \nabla^2 S(r,a) \right] a\, da$$

$$= \left[\{ S(r,a)\, \psi_a(a) - \psi(a)\, S_a(r,a) \} a \right]_{a=1}^{a=\infty} +$$

となるが $a=r$ で S_a は $\underbrace{}_{(3.2)の}$ ジャンプを持つので結局次式となる。

$$\psi(r) = S(r,1)\, \psi_r(1) - \psi(1)\, S_a(r,1) + \int_1^\infty S(r,a)\, \nabla^2 \psi(a)\, a\, da, \qquad (3.4)$$

これが1節の形であり、核関数は

nの値によって少し異なり

$$S_0(r,a) = \begin{cases} \log r, & r>a \\ \log a, & r<a \end{cases}$$

$$\frac{d}{da} S_0(r,a) = \begin{cases} 0, & r>a \\ \frac{1}{a}, & r<a \end{cases} \qquad (3.5)$$

$$S_n(r,a) = \begin{cases} -\frac{1}{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^n, & r>a \\ -\frac{1}{2n}\left(\frac{r}{a}\right)^n, & r<a \end{cases}$$

$$\frac{d}{da} S_n(r,a) = \begin{cases} -\frac{a^{n-1}}{2r^n}, & r>a \\ \frac{r^n}{2a^{n+1}}, & r<a \end{cases} \qquad (3.6)$$

これは 2節の場合は

$$(\nabla^2 - k^2) S(r,a) = 0, \qquad (3.7)$$

$$\left[a\frac{d}{da} S(r,a)\right]_{a=r-\varepsilon}^{a=r+\varepsilon} = 1, \qquad (3.8)$$

として

$$\int_1^\infty S(r,a)\{(\nabla^2-k^2)\zeta\}\, a\,da = \int_1^\infty \left[S(\nabla^2-k^2)\zeta - \zeta(\nabla^2-k^2)S\right] a\,da$$

$$= \int_1^\infty \left[S\nabla^2\zeta - \zeta\nabla^2 S\right] a\,da = \zeta(r) - \left[S(r,1)\zeta_r(1) - \zeta(1)S_a(r,1)\right]$$

つまり

$$\zeta(r) = \zeta_r(1)S(r,1) - \zeta(1)S_a(r,1) + \int_1^\infty S(r,a)\{(\nabla^2-k^2)\zeta\}\, a\,da, \qquad (3.9)$$

核関数は次のようになる。

$$S_n(r,a) = \begin{cases} K_n(k_2 r) I_n(k_2 a), & \text{for } r > a \\ K_n(k_2 a) I_n(k_2 r), & r < a \end{cases} \qquad (3.10)$$

$$\frac{d}{da} S_n(r,a) = \begin{cases} k_2 K_n(k_2 r) I_n'(k_2 a), & r > a \\ k_2 K_n'(k_2 a) I_n(k_2 r), & r < a \end{cases} \qquad (3.11)$$

但し $K_n(k_2 r) I_n'(k_2 r) - K_n'(k_2 r) I_n(k_2 r) = \frac{1}{k_2 r}$.

次に重調和関数では

$$\nabla^4 S(r,a) = 0, \qquad (3.12)$$

でさらに次の関数を定義しておき、

$$\nabla^2 S(r,a) = -\Sigma(r,a), \qquad (3.13)$$

$$\nabla^2 \psi(r) = -\zeta(r), \qquad (3.14)$$

で $$\left[a \frac{d}{da} \Sigma(r,a)\right]_{a=r+\varepsilon}^{a=r-\varepsilon} = 1, \qquad (3.15)$$

$$\int_1^\infty S(r,a)\{\nabla^4 \psi(a)\} a\,da = \int_1^\infty \left[\psi(a)\nabla^2 \Sigma(r,a) - S(r,a)\nabla^2 \zeta(a)\right] a\,da$$

$$= \int_1^\infty \left[\zeta(a)\nabla^2 S(r,a) - S(r,a)\nabla^2 \zeta(a) + \psi(a)\nabla^2 \Sigma(r,a) - \Sigma(r,a)\nabla^2 \psi(a)\right] a\,da$$

$$= \psi(r) - \left[\zeta(1) S_a(r,1) - \zeta_r(1) S(r,1) + \psi(1)\Sigma_a(r,1) - \psi_r(1)\Sigma(r,1)\right],$$

$$\therefore \psi(r) = \psi(1)\Sigma_a(r,1) - \psi_r(1)\Sigma(r,1) + \zeta(1) S_a(r,1) - \zeta_r(1) S(r,1)$$
$$+ \int_1^\infty S(r,a)\{\nabla^4 \psi(a)\} a\,da, \qquad (3.16)$$

核関数は次の如くなる。

$$S_0(r,a) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(-r^2 + \overline{r^2+a^2}\log r\right), & r>a \\ \frac{1}{4}\left(-a^2 + \overline{r^2+a^2}\log a\right), & r<a \end{cases}$$

$$\frac{d}{da}S_0(r,a) = \begin{cases} \frac{a}{2}\log r, & r>a \\ +\frac{1}{4}\left(-a + \frac{r^2}{a} + 2a\log a\right), & r<a \end{cases}$$

$$Z_0(r,a) = -\left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{d}{da}\right)S = \begin{cases} -\log r, & r>a \\ -\log a, & r<a. \end{cases} \quad (3.17)$$

$$S_1(r,a) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(ra - \frac{a^3}{2r} - 2ra\log r\right), & r>a \\ \frac{1}{8}\left(ra - \frac{r^3}{2a} - 2ra\log a\right), & r<a \end{cases}$$

$$\frac{d}{da}S_1(r,a) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(r - \frac{3a^2}{2r} - 2r\log r\right), & r>a \\ \frac{1}{8}\left(-r + \frac{r^3}{2a^2} - 2r\log a\right). & r<a \end{cases}$$

$$Z_1(r,a) = \begin{cases} \frac{a}{2r}, & r>a \\ \frac{r}{2a}, & r<a \end{cases} \quad (3.18)$$

$$S_n(r,a) = \begin{cases} \frac{1}{8n}\left(\frac{r^2}{n-1} - \frac{a^2}{n+1}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^n, & r>a \\ \frac{1}{8n}\left(\frac{a^2}{n-1} - \frac{r^2}{n+1}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^n, & r<a \end{cases}$$

$$\frac{d}{da} S_n = \begin{cases} \frac{1}{8n}\left[\frac{n}{n-1}\frac{a^{n-1}}{r^{n-2}} - \frac{n+2}{n+1}\frac{a^{n+1}}{r^n}\right], & r>a \\ \frac{1}{8n}\left[\frac{-(n-2)}{n-1}\frac{r^n}{a^{n-1}} + \frac{n}{n+1}\frac{r^{n+1}}{a^{n+1}}\right], & r<a \end{cases} \qquad (3.19)$$

$$Z_n(r,a) = \begin{cases} +\frac{1}{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^n, & r>a, \\ \frac{1}{2n}\left(\frac{r}{a}\right)^n, & r<a. \end{cases}$$

最後に

$$(\nabla^4 - k^2\nabla^2) S(r,a) = 0 \quad, \qquad (3.20)$$

$$\nabla^2_{(a)} S(r,a) = -Z(r,a) \quad, \qquad (3.21)$$

$$\left[a \frac{d}{da} Z(r,a) \right]^{a=r-\varepsilon}_{a=r+\varepsilon} = k^2 \quad, \qquad (3.22)$$

とおき、

$$\nabla^2 \Psi(r) = -\zeta(r) \quad, \qquad (3.23)$$

とおくと

$$\int_1^\infty S(r,a)\{(\nabla^4 - k^2\nabla^2)\Psi(a)\} a\,da = \int_1^\infty [\Psi(\nabla^2 - k^2)Z - S(\nabla^2 - k^2)\zeta] a\,da$$

$$= \int_1^\infty [(\Psi\nabla^2 Z - S\nabla^2\zeta) + k^2(\Psi\nabla^2 S - S\nabla^2\Psi)] a\,da$$

$$= \int_1^\infty [(\Psi\nabla^2 Z - Z\nabla^2\Psi) + (\zeta\nabla^2 S - S\nabla^2\zeta) + k^2(\Psi\nabla^2 S - S\nabla^2\Psi)] a\,da$$

$$= k^2\Psi(r) - [-\Psi(\nabla^2 - k^2)S_a + \Psi_a(\nabla^2 - k^2)S + \zeta S_a - \zeta_a S] \quad,,$$

$$\therefore k^2\Psi(r) = -\Psi(1)(\nabla^2_{(a)} - k^2)S_a(r,1) + \Psi_r(1)(\nabla^2_{(a)} - k^2)S(r,1)$$
$$+ \zeta(1)S_a(r,1) - \zeta_r(1)S(r,1) + \int_1^\infty S(r,a)\{(\nabla^4_{(a)} - k^2\nabla^2)\Psi(a)\} \times$$
$$\times\, a\,da, \qquad (3.24)$$

核)関数は 次のようになる。

$$S_0(r,a) = \begin{cases} \log r + K_0(kr) I_0(ka), & r > a \\ \log a + I_0(kr) K_0(ka), & r < a \end{cases}$$

$$\frac{d}{da} S_0 = \begin{cases} k K_0(kr) I_0'(ka), & r > a \\ \frac{1}{a} + k I_0(kr) K_0'(ka), & r < a \end{cases}$$

$$Z_0(r,a) = \begin{cases} -k^2 I_0(ka) K_0(kr), & r > a \\ -k^2 K_0(ka) I_0(kr), & r < a \end{cases} \quad (3.25)$$

$$S_n(r,a) = \begin{cases} -\frac{1}{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^n + K_n(kr) I_n(ka), & r > a \\ -\frac{1}{2n}\left(\frac{r}{a}\right)^n + I_n(kr) K_n(ka), & r < a \end{cases}$$

$$\frac{d}{da} S_n = \begin{cases} \frac{-1}{2}\frac{a^{n-1}}{r^n} + k K_n(kr) I_n'(ka), & r > a \\ +\frac{r^n}{2a^{n+1}} + k I_n(kr) K_n'(ka), & r < a \end{cases}$$

$$Z_n(r,a) = \begin{cases} -k^2 I_n(ka) K_n(kr), & r > a \\ -k^2 K_n(ka) I_n(kr), & r < a \end{cases}$$

$$(\nabla^2 - k^2) S_n = \begin{cases} \frac{k^2}{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^n, & r > a \\ \frac{k^2}{2n}\left(\frac{r}{a}\right)^n, & r < a \end{cases} \quad (3.26)$$

4 近似解 I (重調和関数)

前節までの結果で境界値に関係する部分は斉次解であるから，特解のみを考える時は考える必要はなく，また積分についても斉次解の部分は除いておいてよいから特解のみを考える事にして今は

$$\nabla^4 \psi(r) = e^{-p(r-1)} F(r) , \quad |p| \gg 1 , \qquad (4.1)$$

考える場合は (3.16) から

$$\psi(r) = \int_r^\infty e^{-p(a-1)} F(a) \{S(a,r) - S(r,a)\} a\, da \qquad (4.2)$$

ここで $S(r,a)$ は (3.17)〜(3.19) で $r>a$ なる場合の核とする。
($a>r$ の場合の核は之に見るように r と a を入れかえたものであり $\nabla^4(r)\, S(r,a)=0$ である)

$$\psi_r(r) = \int_r^\infty e^{-p(a-1)} F(a) \frac{\partial}{\partial r}\{S(a,r) - S(r,a)\} a\, da . \qquad (4.3)$$

$$\zeta(r) = \int_r^\infty e^{-p(a-1)} F(a) [\Sigma(a,r) - \Sigma(r,a)] a\, da , \qquad (4.4)$$

$|p| \gg 1$ ならこれらを部分積分すれば逐次近似解が得られる。

$$S_0(a,r) - S_0(r,a) = \frac{1}{4}\left[(r^2 - a^2) + (r^2+a^2)\log\frac{a}{r}\right]$$

$$\left.\begin{aligned}
&\doteqdot \frac{y^3}{3!\,r} - \frac{2y^4}{4!\,r^2} , \qquad \underline{a = r+y} \\
&\frac{\partial}{\partial r}[S_0(a,r) - S_0(r,a)] = r - \frac{a^2}{r} + 2r\log\frac{a}{r} \doteqdot -\frac{y^2}{2r} + \frac{y^3}{3!\,r^2} , \\
&\Sigma_0(a,r) - \Sigma_0(r,a) = \log\frac{r}{a} \doteqdot -\frac{y}{r} + \frac{y^2}{2r^2} - \frac{y^3}{3r^3} \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

$$S_1(a,r) - S_1(r,a) = \frac{1}{8}\left[\frac{a^3}{2r} - \frac{r^3}{2a} + 2ra \log r/a\right] \doteqdot \frac{y^3}{3!\,r} - \frac{2y^4}{4!\,r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\qquad\qquad\right] = \frac{1}{8}\left[-\frac{a^3}{2r^2} - \frac{3r^2}{2a} + 2a\log\frac{r}{a} + 2a\right]$$

$$\doteqdot -\frac{y^2}{2r} + \frac{y^3}{3!\,r^2}$$

$$Z_1(a,r) - Z_1(r,a) = \frac{r}{2a} - \frac{a}{2r} \doteqdot -\frac{y}{r} + \frac{y^2}{2r^2}$$

$$S_n(a,r) - S_n(r,a) = \frac{1}{8n}\left[\frac{1}{n-1}\left(\frac{r^n}{a^{n-2}} - \frac{a^n}{r^{n-2}}\right) - \frac{1}{n+1}\left(\frac{r^{n+2}}{a^n} - \frac{a^{n+2}}{r^n}\right)\right]$$

$$\doteqdot \frac{y^3}{3!\,r} - \frac{2y^4}{4!\,r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\qquad\qquad\right] \doteqdot -\frac{y^2}{2r} + \frac{y^3}{3!\,r^2}$$

$$Z_n(a,r) - Z_n(r,a) = \frac{1}{2n}\left(\frac{r^n}{a^n} - \frac{a^n}{r^n}\right) \doteqdot -\frac{y}{r} + \frac{y^2}{2r^2}$$

結局 n に拘わらず

$$\left.\begin{aligned} S(a,r) - S(r,a) &\doteqdot \frac{y^3}{3!\,r} - \frac{2y^4}{4!\,r^2}, \\ \frac{\partial}{\partial a}\left[\qquad\qquad\right] &\doteqdot -\frac{y^2}{2r} + \frac{y^3}{3!\,r^2}, \\ Z(a,r) - Z(r,a) &\doteqdot -\frac{y}{r} + \frac{y^2}{2r^2} \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

(4.2) にf代入して部分積分すると

$$\psi(r) \doteqdot \frac{1}{p^4}\left[\left(1+\frac{2}{pr}\right)F(r)+\frac{4}{p}F_r(r)\right]e^{-p(r-1)},$$

$$\psi_r(r) \doteqdot -\frac{1}{p^3}\left[\left(1+\frac{2}{pr}\right)F(r)+\frac{3}{p}F_r(r)\right]e^{-p(r-1)},$$

$$\zeta(r) \doteqdot -\frac{1}{p^2}\left[\left(1+\frac{1}{pr}\right)F(r)+\frac{2}{p}F_r(r)\right]e^{-p(r-1)},$$

(4.8)

これはA補助定理I の結果に一致する。

なお
$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\Sigma_0(a,r)-\Sigma_0(r,a)\right]=\frac{1}{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\Sigma_n(a,r)-\Sigma_n(r,a)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{r^{n-1}}{a^n}+\frac{a^n}{r^{n+1}}\right),$$

故
$$\frac{d}{dr}\zeta(r) \doteqdot \frac{1}{r}\int_r^\infty e^{-p(a-1)}F(a)\,a\,da \doteqdot \frac{e^{-p(r-1)}}{p}\left[F(r)\left(1+\frac{1}{pr}\right)+\frac{F_r(r)}{p}\right]$$

…(4.9)

5. 近似解 II (周期的ストークス流れ)

同様にして (3.24) から得られる訳であるが、直接これを実行するのは困難 (核の 3, 4 回微分がいって複雑になりすぎる) なので 1, 2 節の式を重ねて使う事にする。

$$(\nabla_n^2 - k^2)\zeta(r) = -e^{-p(r-1)}F(r), \qquad (5.1)$$

$$\nabla_n^2 \psi(r) = \zeta(r) = -f(r)e^{-p(r-1)}, \qquad (5.2)$$

まず (5.2) は (1.5), (1.8) により

$$\left.\begin{aligned} \psi(r) &= +\int_r^\infty \zeta(a)\log\frac{r}{a}\, a\,da \quad \text{for } n=0 \\ &= \frac{1}{2n}\int_r^\infty \zeta(a)\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^n - \left(\frac{a}{r}\right)^n\right\} a\,da, \quad \text{for } n\neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

(4.6) により n の如何に拘らず

$$\psi(r) \doteqdot \int_r^\infty f(a)e^{-p(a-1)}\left(-\frac{y}{r}+\frac{y^2}{2r^2}\right) a\,da, \qquad (5.4)$$

で済むから (4.8) より

$$\psi(r) = -\frac{1}{p^2}\left[\left(1+\frac{1}{pr}\right)f(r) + \frac{2}{p}f_r(r)\right]e^{-p(r-1)}, \qquad (5.5)$$

次に (5.1) でまず $p \doteqdot k$ で $Re(p) > Re(k)$ の場合は (2.4) より 前同様

$$\zeta(r) \doteqdot \int_r^\infty F(a)e^{-p(a-1)}\left[I_n(kr)K_n(ka) - I_n(ka)K_n(kr)\right] a\,da, \qquad (5.6)$$

Date

例で

$$I_n(z) \doteqdot \frac{e^{z}}{\sqrt{2\pi z}}\left(1-\frac{\mu}{8z}\cdots\right)$$

$$K_n(z) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left(1+\frac{\mu}{8z}\cdots\right) \qquad \mu = 4n^2-1, \qquad (5.7)$$

であるから　$(a=r+y)$

$$I_n(kr)K_n(ka) \doteqdot \frac{e^{-ky}}{2k\sqrt{ra}}\left\{1+\frac{\mu}{8k}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)\right\}$$

$$- \frac{\mu y}{8kr^2}$$

$$I_n(ka)K_n(kr) \doteqdot \frac{e^{ky}}{2k\sqrt{ra}}\left(1+\frac{\mu y}{8kra}\cdots\right) \qquad (5.8')$$

また

$$F(a)\,a\left[I_n(kr)K_n(ka)-I_n(ka)K_n(kr)\right]$$

$$\doteqdot \frac{e^{-ky}}{2k}\left[F(r)+y\left\{F_r(r)+\frac{F(r)}{2r}\right\}+\frac{\mu y}{8kr^2}F(r)\cdots\right]$$

$$-\frac{e^{ky}}{2k}\left[F(r)+y\left\{F_r(r)+\frac{F(r)}{2r}\right\}-\qquad\right], \qquad (5.8)$$

となるから右辺の高次の項を無視すれば次の関係に次式をうる。

$$\zeta(r) \doteqdot \frac{e^{-p(r-1)}}{2k}\left[F(r)\left(\frac{1}{p+k}-\frac{1}{p-k}\right)+\left(\frac{1}{(p+k)^2}-\frac{1}{(p-k)^2}\right)\left(F_r+\frac{F}{2r}\right)\right]$$

$$\simeq \frac{-e^{-p(r-1)}}{p^2-k^2}\left[F(r)+\frac{2p}{p^2-k^2}\left\{F_r(r)+\frac{F(r)}{2r}\right\}\right], \qquad (5.9)$$

p^2-k^2

$p=k$ の時は (5.6) は積分不可能であり うるが 元に戻って (2.4) により

$$\zeta(r) = K_n(kr)\int_1^r e^{-k(a-1)}\bar{F}(a)\,I_n(ka)\,a\,da + I_n(kr)\int_r^{\infty} e^{-k(a-1)}K_n(ka)\,\bar{F}\,a\,da$$

$$\fallingdotseq \frac{e^{-k(r-1)}}{2k}\int_1^r \bar{F}(a)\sqrt{\frac{a}{r}}\left(1+\frac{\mu y}{8kra}\right)da$$

$$+\frac{e^{-k(r-1)}}{2k}\int_r^{\infty}\bar{F}(a)\sqrt{\frac{a}{r}}\left(1+\frac{\mu y}{8kra}\right)e^{-2ky}\,da \quad , \qquad (5.10)$$

次いで 前回同様 この後の項を無視すれば n に関係なくなり

今

$$G(r) = \int_1^r \bar{F}(a)\sqrt{\frac{a}{r}}\,da \, , \quad \left(\begin{array}{l} G(1)=0 \, , \\ G_r(1)=0 \end{array}\right) \qquad (5.11)$$

なる関数を導入すると

$$\zeta(r) \fallingdotseq \frac{e^{-k(r-1)}}{2k}G(r) + \frac{e^{-k(r-1)}}{4k^2}\left[\bar{F}(r) + \frac{1}{2k}\left\{\bar{F}_r(r)+\frac{\bar{F}(r)}{2r}\right\}\right] ,$$

$$(5.12)$$

これらを (5.5) に代入すれば最終的に解が得られ

先ず $p \neq k$ では

$$\left(1+\frac{p}{p^2-k^2}\right)$$

$$\psi(r) \fallingdotseq \frac{e^{-p(r-1)}}{p^2(p^2-k^2)}\left[\left(1+\frac{1}{pr}\right)\left\{\bar{F} + \frac{2p}{p^2-k^2}\left(\bar{F}_r+\frac{\bar{F}}{2r}\right)\right\} + \frac{2}{p}\bar{F}_r\right]$$

$$\fallingdotseq \frac{e^{-p(r-1)}}{p^2(p^2-k^2)}\left[\left(1+\frac{1}{pr}+\frac{p}{(p^2-k^2)r}\right)\bar{F}(r) + \frac{2}{p}\left(1+\frac{p^2}{p^2-k^2}\right)\bar{F}_r\right] \qquad (5.13)$$

$p=k$ では

$$\psi(r) \fallingdotseq -\frac{e^{-k(r-1)}}{2k^3}\left[\left(1+\frac{1}{kr}\right)G(r) + \frac{2}{k}G_r(r)\right]$$

$$-\frac{e^{-k(r-1)}}{4k^4}\left[\left(1+\frac{5}{4kr}\right)\bar{F}(r) + \frac{5}{2k}\bar{F}_r(r)\right] , \qquad (5.14)$$

一般解はこれらに調和関数と $e^{-A}/\sqrt{r}$ を加えねばならない。