4-15

No.

Date

平板のまわりの流れ.

1. 平均流れ Blasius flow → wake

2. 振動流れ

2.1 前縁

2.2 途中

2.3 離れ.

2.4 伝熱境界層

3. 固有解,

3.1 第一次解

附録 B. 加速度流れ関数

加速度ポテンシャルは

$$\Phi(P) = -(i\omega + \frac{\partial}{\partial x})\phi(P) \quad \cdots (B.1)$$

のように定義されるので、これに似せて加速度流れ関数 Ψ を次のように定義しよう。

$$\Psi = -(i\omega + \frac{\partial}{\partial x})\psi, \quad \cdots (B.2)$$

逆流れでは

$$\tilde{\Psi} = -(i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\tilde{\psi}, \quad (B.3)$$

そうすると運動方程式は(1.1.6), (1.1.7)より

$$\Psi = \frac{p}{\rho} + \nu\zeta, \quad \tilde{\Psi} = \frac{\tilde{p}}{\rho} + \nu\tilde{\zeta}, \quad (B.4)$$

境界条件は(B.2)又は(B.3)より Ψ については与えられる。

平板ではさらに

$$\Psi_y = -(i\omega + \frac{\partial}{\partial x})\psi_y \Big|_c \quad (B.5)$$

であるから、これも与えられている。

従って少くとも平板の場合 Ψ はこの二つの境界条件から定まる。

それから ψ を求めるには(B.2)により(無限上流で0として)

$$\psi(P) = -e^{-i\omega x}\int^{x} \Psi e^{i\omega x}\,dx, \quad \cdots (B.6)$$

のように計算出来る。

$$\int x e^{i\omega x} dx = \frac{x e^{i\omega x}}{i\omega} - \frac{e^{i\omega x}}{(i\omega)^2}$$

平坦の場合についてもう少し考えて見よう。

Φは定数だけ不定であるから例えば左方部では

$$\Phi = A + x \qquad (B.12)$$

これを(B.10)に代入すると

$$\frac{\psi}{c} = -e^{-i\omega x}\left[\int_{-\infty}^{x} \frac{\rho'}{\rho} e^{i\omega x} dx + \frac{A}{i\omega}\left(e^{i\omega x}-1\right) + \frac{x e^{i\omega x}}{i\omega} + \frac{\left(e^{i\omega x}-1\right)}{\omega^2}\right]$$

$$= -\left[e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{0} \frac{\rho'}{\rho} e^{i\omega x} dx + \frac{x}{i\omega} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{-i\omega x}}{\omega^2} + \frac{A}{i\omega} + \frac{A}{i\omega} e^{-i\omega x}\right], \qquad (B.13)$$

それなら ψが $\frac{x}{i\omega}$ + const の形になる為には

$$A + \frac{1}{i\omega} = -i\omega \int_{-\infty}^{0} \frac{\rho'}{\rho} e^{i\omega x} dx \qquad (B.14)$$

でなければならない。

他の振動も同様である。

~~そこでもう一度(B.6)に戻って少し考えて見よう。~~

今 $E^+ = e^{i\omega x-\omega y}$, $E^- = e^{i\omega x+\omega y}$ (B.17)

とおくと $E^+_y = -\omega E^+$, $E^-_y = \omega E^-$ であるから

$$\int_{-\infty}^{x} \Psi e^{i\omega x} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \Psi [E^+ e^{\omega y} + E^- e^{-\omega y}] dx$$

$$= \frac{1}{2\omega}\left[e^{-\omega y}\int_{-\infty}^{x} \Psi E^-_y dx - e^{\omega y}\int_{-\infty}^{x} \Psi E^+_y dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\omega}\left[e^{-\omega y}\int_{-\infty}^{x} (\Psi E^-_y - \Psi_y E^-) dx - e^{\omega y}\int_{-\infty}^{x} (\Psi E^+_y - \Psi_y E^+) dx \right],$$

となり, (B.6)は

$$\psi = \frac{1}{2\omega}\left[e^{\omega(y-ix)}\int_{-\infty}^{x} (\Psi E^+_y - \Psi_y E^+) dx - e^{\omega(y+ix)}\int_{-\infty}^{x} (\Psi E^-_y - \Psi_y E^-) dx \right], \quad \text{(B.18)}$$

となる。

今 ~~閉曲線~~ 正則な領域Dを囲む L の周りの線積分はグリーンの定理により

が

$$\int_L \left(\Psi \frac{\partial E^+}{\partial n} - \Psi_n E^+\right) ds = -\iint_D (\Psi \nabla^2 E^+ - E^+ \nabla^2 \Psi)\, dx\, dy, \quad \text{(B.19)}$$

Eは調和関数でΨは(1.1.11)~~の~~微分方程式を満たすから 右辺は

$$\iint_D E^+ \nabla^2 \Psi\, dx dy = \frac{1}{i}\iint_D E^+\left(i\omega \Psi + \frac{\partial}{\partial x}\Psi\right) dx dy = \frac{1}{i}\iint_D (E^+_x \Psi + E^+ \Psi_x)\, dx dy$$

$$= \frac{1}{i}\int E^+ \Psi\, dy \quad \text{(B.10)}$$

(B·4)を代入すると

$$\psi = -e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{g}{p}+\nu\zeta\right)e^{i\omega x}dx, \quad \cdots \quad (B\cdot 7)$$

物体表面上で レイノルズ数が充分大とすると

上流側 ぜ ζは0であるから

$$\psi\Big|_c = -e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{x}\frac{g}{p}e^{i\omega x'}dx'\Big|_{x\,on\,C} \quad (B\cdot 8)$$

$$\psi_y\Big|_c = -e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{x}\frac{g_y}{p}e^{i\omega x'}dx'\Big|_{x\,on\,C},$$

$$\psi_x\Big|_c = -i\omega\psi\Big|_c - \Psi\Big|_c, \quad (B\cdot 9)$$

上流側のみ

平板では一寸違って 先端を原点とすると

$$\psi\Big|_c = -e^{-i\omega x}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{g}{p}e^{i\omega x}dx + \int_{0}^{x}\Psi\Big|_c e^{i\omega x}dx\right], \quad (B\cdot 10)$$

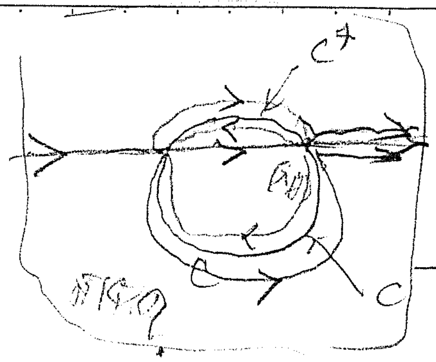
$$\psi_x\Big|_c = -i\omega\psi - \Psi\Big|$$

$$\psi_y\Big|_c = -e^{-i\omega x}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{g_y}{p}e^{i\omega x}dx + \int_{0}^{x}\Psi_y\Big|_c e^{i\omega x}dx\right], \quad (B\cdot 11)$$

$$\Psi_n = -\left[\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\right]_n = -i\omega\psi_n + v_n$$

$$v_n = -\zeta x_n - u_s$$

Lを図のようにとると結局



$$\psi = \frac{1}{2\omega}\Big[e^{-\omega(y+ix)}\int_x^{\infty}(\Phi E_y^- - \Phi_y E^-)\,dx - e^{\omega(y-ix)}\int_x^{\infty}(\Phi E_y^+ - \Phi_y E^+)\,dx$$

$$+ e^{-\omega(y+ix)}\oint_{C^-}(\Phi E_y^- - \Phi_y E^-)\,ds + e^{\omega(y-ix)}\oint_{C^+}(\Phi E_y^+ - \Phi_y E^+)\,ds\Big] \qquad (B.11)'$$

つまり

$$\psi = e^{-i\omega x}\int_x^{\infty}\Phi e^{i\omega x}\,dx$$

$$+ \frac{1}{2\omega}\Big[e^{-\omega(y+ix)}\oint_{C^-}(\Phi E_n^- - \Phi_n E^-)\,ds + e^{\omega(y-ix)}\oint_{C^+}(\Phi E_n^+ - \Phi_n E^+)\,ds\Big] \qquad (B.21)$$

ここで(B.14)の表現をとるならば右辺の積分は周囲のみ残って、

$$\psi = e^{-i\omega x}\int_x^{\infty}\Phi e^{i\omega x}\,dx$$

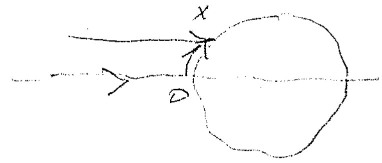
$$+ \frac{e^{-i\omega x}}{2\omega}\Big[e^{-\omega y}\oint_{C^-}\Big(v_s^* E_n^- - \frac{\partial p^*}{\partial s}E^-\Big)ds$$

$$+ e^{\omega y}\oint_{C^+}\Big(v_s^* E_n^+ - \frac{\partial p^*}{\partial s}E^+\Big)ds\Big], \qquad (B.22)$$

[illegible]の定義

(B.10) によって (B.9) は

$$\int_L \left[\Psi\left\{E_n^+ + \frac{\xi}{\nu} x_n\right\} - \Psi_n E^+\right] ds = 0$$



これは 図のような場合 (B.18) は

$$\Psi \approx \frac{1}{2\omega}\Big[e^{\omega(y-ix)}\Big\{\int_\infty^0 (\Psi E_y^+ - \Psi_y E^+)_{y=0}\, dx + \int_0^x \big[\Psi(E_n^+ - \tfrac{\xi}{\nu} x_n) - \Psi_n E^+\big] ds\Big\}$$

$$- e^{-\omega y - i\omega x}\Big\{\int_{-\infty}^0 (\Psi E_y^- - \Psi_y E^-)_{y=0}\, dx + \int_0^x \big[\Psi(E_n^- - \tfrac{\xi}{\nu} x_n) - \Psi_n E^-\big] ds\Big\}\Big]$$

この場合 レイノルズ数が大きければ $\Psi \doteqdot q/\rho$ ...

$$\Psi = \frac{1}{2\rho\omega}\Big[-e^{\omega y - i\omega x}\Big\{\int_{-\infty}^0 (\omega q + q_y) e^{i\omega x} dx\Big\} - e^{-\omega y - i\omega x}\Big\{\int_{-\infty}^0 (\omega q - q_y) e^{i\omega x} dx\Big\}$$

$$+ e^{\omega y - i\omega x}\int_0^x [q E_n^+ - q_n E^+] ds - e^{-\omega y - i\omega x}\int_0^x [q E_n^- - q_n E^-] ds\Big]$$

No.

Date

$$\frac{\partial}{\partial x} k' R = \frac{x}{R}$$

$$\bar{\Phi} = K_0(k'R)e^{-kx}$$

$- \frac{k x}{R^2}(k'R K_1)$

$$\bar{\Phi}_x = -k\bar{\Phi} - k'\frac{x}{R}K_1 e^{-kx}$$

$$\bar{\Phi}_{xx} = +k\left[+k\bar{\Phi} + \frac{k'x}{R}K_1 e^{-kx}\right] + \frac{kk'x}{R}K_1 e^{-kx}$$

$$+ \left(\frac{k'x}{R^3}\right)^2 k'RK_0 e^{-kx} - k'^2 RK_1 e^{-kx}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{2x^2}{R^4}\right) \qquad \frac{y^2-x^2}{R^4}$$

$$\bar{\Phi}_{xx} + 2k\bar{\Phi}_x = -k^2\bar{\Phi} + \frac{k'^2 x^2}{R^2}K_0 e^{-kx} + \frac{k'^2}{R^3}(x^2-y^2)K_1 e^{-kx}$$

$$\bar{\Phi}_y = -\frac{k'y}{R}K_1 e^{-kx}$$

$$\bar{\Phi}_{yy} = -k'\left(\frac{1}{R^2} - \frac{2y^2}{R^4}\right)k'RK_1 e^{-kx} + \left(\frac{k'y}{R^3}\right)^2 k'RK_0 e^{-kx}$$

$$\nabla^2\bar{\Phi} + 2k\bar{\Phi}_x = -k^2\bar{\Phi} + k'^2 K_0 e^{-kx} = 2i\omega k\bar{\Phi}$$

$$\nabla^2 \Psi_0 = 2k\left(-\Psi_{0x} + i\omega\Psi_0\right) = \frac{2k}{2\pi}\bar{\Phi} \quad ?$$

$$\Psi_{0yy} = \frac{e}{\sqrt{k x}}$$

No.

Date

$$\Phi \fallingdotseq \sqrt{\frac{\pi}{2kx}}\, e^{-\eta^2+i\omega x} \qquad \eta^2 = \frac{ky^2}{2x}$$

$$\Phi_x \fallingdotseq -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2k}\, x^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\eta^2+i\omega x} + \sqrt{\frac{\pi}{2kx}}\left(+\frac{ky^2}{2x^2}+i\omega\right) e^{-\eta^2+i\omega x}$$

$$\Phi_x - i\omega\Phi \fallingdotseq -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2k}\, x^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\eta^2+i\omega x}$$

$$\Phi_{xx} - 2i\omega\Phi_x - \omega^2\Phi = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2k}\, x^{\frac{5}{2}}}\, e^{-\eta^2+i\omega x}$$

$$\Phi_y = -\sqrt{\frac{\pi}{2kx}}\left(\frac{ky}{x}\right) e^{-\eta^2+i\omega x}$$

$$\Phi_{yy} = -\sqrt{\frac{\pi k}{2}}\,\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\eta^2+i\omega x} + \sqrt{\frac{\pi}{2kx}}\left(\frac{ky}{x}\right)^2 e^{-\eta^2+i\omega x}$$

No.

Date

$$f = \int_0^x \frac{e^{-\frac{k}{2\xi}y^2}}{\sqrt{\xi}}\,d\xi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -ky\int_0^x \frac{e^{-\frac{k}{2\xi}y^2}}{\xi^{\frac{3}{2}}}\,d\xi \qquad \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2\xi}}y = \eta \qquad d\eta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{2}}\frac{y}{\xi^{\frac{3}{2}}}\,d\xi$$

$$= -\frac{k}{2\sqrt{2k}}\frac{y}{\xi^{\frac{3}{2}}}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2k}}\int_\infty^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta = \frac{1}{2\sqrt{2k}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta\right].$$

$$[f] = -\frac{y\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2k}} + \frac{1}{2\sqrt{2k}}\int dy\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta \qquad dy = \sqrt{\frac{2x}{k}}\,d\eta$$

$$= -\frac{y\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2k}} + \frac{\sqrt{x}}{2k}\int_0^\eta d\eta\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta.$$

$$\eta\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta - \int_0^\eta \eta e^{-\eta^2}\,d\eta$$

$$+\frac{1}{2}\left.e^{-\eta^2}\right|_0^\eta.$$

$$= -\frac{y\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2k}} + \frac{\sqrt{x}}{2k}\left[\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2x}}y\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta + \frac{1}{2}\left(e^{-\eta^2} - 1\right)\right].$$

$$f\big|_{y=0} = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = 2\sqrt{x}$$

$$f = 2\sqrt{x} - \frac{\sqrt{\pi}\,y}{4\sqrt{2k}} - \frac{\sqrt{x}}{4k}\left(1 - e^{-\eta^2}\right) + \frac{y}{2\sqrt{2kx}}\int_0^\eta e^{-\eta^2}\,d\eta.$$

$$f_{xx} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

(A.4), (A.5)により

$$-\left(i\omega+\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\varphi}_P(Q,P)=\frac{1}{2\pi}\, d_g R=-\tilde{g}(Q,P)$$

$$-\left(i\omega+\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\psi}_P=\frac{1}{2\pi}\,\tilde{\Phi}(Q,P)=-\tilde{\zeta}(Q,P)$$ (B.15)

であるから (1.3.8)から Ψ を求めると

$$\Psi(Q)=\frac{1}{P}\int_C\left[X^*(\tilde{g}+\tilde{\zeta})_y-Y^*(\tilde{g}+\tilde{\zeta})_x\right]ds,\quad \text{(B.16)}$$

$$=\frac{-1}{P}\int_C\left[p^*\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{g}+\tilde{\zeta})+\mu\zeta^*\frac{\partial}{\partial n}(\tilde{g}+\tilde{\zeta})\right]ds,$$