V M-54

於水委(II) 昭52.2.1~2.

昭和51年12月23日

# 粘性流体力学の境界値問題に関する覚書

## (II. オセーン流れ他)

別府正利

内容

昭和　年　月　日


# 概要

前報ではストークス流れの積分表示について考えて見たが今回はオセーン流れ又は一般的に粘性流について その積分表示について考えて見た。

これらの積分表示は大体において Oseen の Text[1] に記されているが、彼はテンソル記号を用いて記述している為に少し判りにくい所もあり、又少し改良した方が良いと言う点も見受けられるので敢えて記すものである。

先ず前報同様相反定理を導入するがこの場合流れが前後非対称なので所謂逆流れを導入しなければならない。オセーンはこれを元の方程式の随伴方程式の解と言う表現で導入している。

これから変分原理が導かれるがこのような場合あまり実益もなさそうなので省略した。

なおもっと一般的にハミルトンの原理により流体運動の変分原理が表現出来るがこの場合はラグランジュの方程式による方が向いているようである。[2]

ついでの事に周期運動についても記し又オセーンによる逐次近似法、オセーン方程式の改良等についても記して見た。

最後にレイノルズ数の大きい所で平板の摩擦抵抗を計算して見たが定性的にはブラジウスの解に一致する。これはオセーン流れが良い伴流模型である事に対応しているものと思われる。



1) C.W. Oseen, "Hydrodynamik" Leipzig, 1927

2) F.P. Bretherton, "A note on Hamilton's principle for perfect fluids", J. Fluid Mech. vol. 44, pp 19-31 (1970)

昭和　　年　　月　　日

1. 相反定理

2次元非圧縮性定常オセーン流れの方程式は

$$\left.\begin{aligned} U u_x &= -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \nabla^2 u, \\ U v_x &= -\frac{1}{\rho} p_y + \nu \nabla^2 v. \end{aligned}\right\} \cdots (1.1)$$

この随伴方程式は

$$\left.\begin{aligned} -U \tilde{u}_x &= -\frac{1}{\rho} \tilde{p}_x + \nu \nabla^2 \tilde{u} \\ -U \tilde{v}_x &= -\frac{1}{\rho} \tilde{p}_y + \nu \nabla^2 \tilde{v} \end{aligned}\right\} \cdots (1.2)$$

これは(1.1)において $U$ の替りに $-U$ とおいた方程式であるから一様流の方向を逆にした流れと考える事が出来る。

連続の方程式は共に

$$u_x + v_y = 0, \qquad (1.3)$$

積分

$$E(u,v;\tilde{u},\tilde{v}) = 2\mu \iint_D \left\{ u_x \tilde{u}_x + v_y \tilde{v}_y + \frac{1}{2}(u_y + v_x)(\tilde{u}_y + \tilde{v}_x) \right\} dx\,dy, \cdots (1.4)$$

は明らかに次の相反性を持つ。

$$E(u,v;\tilde{u},\tilde{v}) = E(\tilde{u},\tilde{v};u,v), \qquad (1.5)$$

(1.4)を部分積分すると

$$E = -\mu \iint_D \left[ \tilde{u}\nabla^2 u + \tilde{v}\nabla^2 v \right] dx\,dy$$

$$+ 2\mu \oint_C \left[ \tilde{u} u_x dy + \tilde{v} v_y dx + \frac{1}{2}\left\{ \tilde{u}(u_y + v_x) dx + \tilde{v}(u_y + v_x) dy \right\} \right],$$

(1.1)を代入して $p$ について部分積分し (1.3)を使うと、

$$E = -\rho U \iint_D (\tilde{u} u_x + \tilde{v} v_x)\, dx dy$$

$$+ \int_C \Big[ \tilde{u} \{ (-p + 2\mu u_x) dy + \mu (u_y + v_x) dx \} + \tilde{v} \{ (-p + 2\mu v_y) dy + \mu (u_y + v_x) dx \} \Big],$$

所で境界 $C$ における力は、

$$\left. \begin{aligned} X &= (-p + 2\mu u_x) \frac{\partial x}{\partial \nu} + \mu (u_y + v_x) \frac{\partial y}{\partial \nu}, \\ Y &= \mu (u_y + v_x) \frac{\partial x}{\partial \nu} + (-p + 2\mu v_y) \frac{\partial y}{\partial \nu}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = -\frac{\partial x}{\partial s},$$

なる故

$$E = -\rho U \iint_D (\tilde{u} u_x + \tilde{v} v_x)\, dx dy + \int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y)\, ds, \quad \cdots \quad (1.7)$$

を得る。

同じ操作によって

$$E = +\rho U \iint_D (u \tilde{u}_x + v \tilde{v}_x)\, dx dy + \int_C (u \tilde{X} + v \tilde{Y})\, ds, \quad \cdots \quad (1.8)$$

を得るから (1.5)により (1.7)と(1.8)を等置して面積分項を積分すると 新しく二つの相反性を得る。

昭和　　年　　月　　日

$$\int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y)\, ds = \int_C (u \tilde{X} + v \tilde{Y})\, ds + \rho U \int_C (u \tilde{u} + v \tilde{v}) \frac{\partial x}{\partial \nu}\, ds \,, \quad (1.4)$$

昭和　　年　　月　　日

2. オセーンの　　表現 (I)

(1.9) において $\tilde{u}, \tilde{v}, p$ を附録Aの核関数の逆流れのものを使って (A.8) の特異性を考慮すると

$$u(x',y') = \frac{1}{4\pi\mu}\int_C \Big[ X\tilde{U}^{(1)} + Y\tilde{V}^{(1)} - \{u\tilde{X}^{(1)} + v\tilde{Y}^{(1)}\} - \rho U\{u\tilde{U}^{(1)} + v\tilde{V}^{(1)}\}\frac{\partial x}{\partial \nu}\Big] ds$$

$$v(x',y') = \frac{1}{4\pi\mu}\int_C \Big[ X\tilde{U}^{(2)} + Y\tilde{V}^{(2)} - \{u\tilde{X}^{(2)} + v\tilde{Y}^{(2)}\} - \rho U\{u\tilde{U}^{(2)} + v\tilde{V}^{(2)}\}\frac{\partial x}{\partial \nu}\Big] ds. \quad (2.1)$$

を得る。

今内部問題を考えると 左辺が 0 の式が成立つ (内部問題では) が内部問題で外部同様

$$u = -U,\ v = 0 \quad \text{on } C \quad (2.2)$$

なる問題の解は明らかに

$$u = -U \quad \text{in } \bar{D}, \quad (2.3)$$

であり、これに一様流れを加えると内部で流体は静止している事になり、境界では $X = Y = 0$ でなければならない。

それ故 (2.1) と同様な式で $X, Y, u, v$ を内部問題の解を入れたものを (2.1) から差引くと、

$$u(x',y') = \frac{1}{4\pi\mu}\int_C (X\tilde{U}^{(1)} + Y\tilde{V}^{(1)})ds$$

$$v(x',y') = \frac{1}{4\pi\mu}\int_C (X\tilde{U}^{(2)} + Y\tilde{V}^{(2)})ds. \quad (2.4)$$

昭和　　年　　月　　日

なる所謂オセーンレットによる表現が得られる。
　それ故これらの式を解いて $X$, $Y$ が求まれば
それを積分すれば物体に働く力が求められる。

(21)はオセーンによつて与えられたものと少し異なつている。
　オセーンはこの $X$, $Y$ の代りを $\left(-p\frac{\partial x}{\partial n}+\mu\frac{\partial u}{\partial n}\right)$, $\left(-p\frac{\partial y}{\partial n}+\mu\frac{\partial v}{\partial n}\right)$ としてあるが(A・9)の関係があるので部分積分して $u$, $v$ が一価であると仮定すれば同じものになる。
　物理的には(21)の方が便利であると考えられる。

3. オセーンの表現(II)

オセーンは前節の表現から一歩進めて(1.1)において非線型項を含めた方程式を(1.1)の非斉次方程式として解く事を提案している。

以下その表現を導いて見よう。

まず運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} U u_x + u u_x + v u_y &= -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \nabla^2 u, \\ U v_x + u v_x + v v_y &= -\frac{1}{\rho} p_y + \nu \nabla^2 v, \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

今 $\tilde{u}$ が(1.2)を満たすものとして相反性(1.5)を利用しよう。

さて部分積分によって(3.1)を利用すれば(1.7)に対応する式は

$$E = -\rho \iint_D \left[ \tilde{u}\{(U+u)u_x + v u_y\} + \tilde{v}\{(U+u)v_x + v v_y\} \right] dx\,dy$$

$$+ \int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y)\, ds \quad , \qquad (3.2)$$

であり、$\tilde{u}$は(1.2)を満たすから(1.8)はこの場合も成立つ。それ故両者を等置すれば

$$\int_C \left[ \tilde{u} X + \tilde{v} Y - u \tilde{X} - v \tilde{Y} - \rho U (u\tilde{u} + v\tilde{v}) \frac{\partial x}{\partial \nu} \right] ds$$

$$= \rho \iint_D \left[ \tilde{u}(u u_x + v u_y) + \tilde{v}(u v_x + v v_y) \right] dx\,dy ,$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_C (u^2 + v^2) \tilde{v}_\nu\, ds + \rho \iint_D \zeta (\tilde{u} v - u \tilde{v})\, dx\,dy \qquad (3.3)$$

ここに $\tilde{v}_\nu = \tilde{u} \frac{\partial x}{\partial \nu} + \tilde{v} \frac{\partial y}{\partial \nu}$ ,

昭和　年　月　日

2節同様 $\tilde{u}, \tilde{v}$ にオセーン核を代入し又内部問題の解(内部で流体は静止している)を考えれば(2.4)と同じような式を得る。

$$u(x',y') = \frac{1}{4\pi\mu}\int_C (X\tilde{U}^{(1)} + Y\tilde{V}^{(1)})\,ds + \frac{1}{4\pi\nu}\iint_D \zeta(v\tilde{U}^{(1)} - u\tilde{V}^{(1)})\,dx\,dy,$$

$$v(x',y') = \frac{1}{4\pi\mu}\int_C (X\tilde{U}^{(2)} + Y\tilde{V}^{(2)})\,ds + \frac{1}{4\pi\nu}\iint_D \zeta(v\tilde{U}^{(2)} - u\tilde{V}^{(2)})\,dx\,dy, \qquad (3.4)$$

これは大変興味のある式でナビア・ストークスの解がともかくもオセーン解によって表現されている。先ずこれらの式の右辺第2項を省略すればオセーン近似である。

次に右辺第2項の $u, v, \zeta$ にそのオセーン近似を代入して左辺を未知とおいた普通の積分方程式をとけば第2近似が得られる。

このようにして逐次近似計算が可能になる。

さらに右辺第2項の被積分関数には $\zeta$ がかかっている故この積分は境界層と伴流の中でのみ影響があり、外部のポテンシャル流れからは貢献がないはずであるからこの項の積分は見掛程面倒でないと考えられる。

なお(3.4)は直接微分によって(3.1)を満たす事を証明する事が出来る。

## 4. オセーン流れの拡張(I)

前節の表現は面積分がある点で不便であると考えられる。

しかしこれを除くには次の様に拡張したオセーン流れを考えねばならない。

さて $u, v, p$ は (3.1) を満たすものとし逆流れ $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$ は次の方程式を満たすものとする。

$$\left.\begin{aligned} -(U\tilde{u}_x + u\tilde{u}_x + v\tilde{u}_y) &= -\frac{1}{\rho}\tilde{p}_x + \nu\nabla^2\tilde{u}, \\ -(U\tilde{v}_x + u\tilde{v}_x + v\tilde{v}_y) &= -\frac{1}{\rho}\tilde{p}_y + \nu\nabla^2\tilde{v}, \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

左辺の $u, v$ は (3.1) の解である。

従ってこの方程式は未だわかってない量を係数として持つ点で不定であるけれど一方 $u, v$ がわかっているとすれば準線型方程式であって解の重畳が可能である。

又物体の遠方ではオセーン流れとなる事は明らかであり、近くではストークス流れとなるだろう。そしてオセーン流れでは後流が $x$ 軸に平行となる点は改良されるだろう。

この $(u, v)$ の第1近似としてはポテンシャル流れとするのが良いであろうが具体的な基礎解をもとめるのは容易ではなくこの点がこの方法の難点である。

さてもし (4.1) の解があったとすると前節同様相反定理によって、

$$\int_c (\tilde{u}X + \tilde{v}Y - u\tilde{X} - v\tilde{Y})\,ds$$

$$= \rho\int_c (u\tilde{u} + v\tilde{v})V_\nu\,ds, \quad (4.2)$$

$$V_\nu = (U+u)\frac{\partial x}{\partial \nu} + v\frac{\partial y}{\partial \nu},$$

なる表現を得、面積分項は消える。
逆に言うと面積分が消えるように(41)の逆流れを定義しているわけである。
その式から前回様(41)の基本解があれば

$$u(x;y) = \int_c \left( X\tilde{U}^{(1)} + Y\tilde{V}^{(1)} \right) ds,$$

$$v = \int_c \left( X\tilde{U}^{(2)} + Y\tilde{V}^{(2)} \right) ds. \qquad (43)$$

のような表現を得るが $\tilde{U}^{(1)}, \tilde{V}^{(1)}$ は (41)により $(u, v)$ を係数として含むし今はその具体的な形を与えられないので有用とは言えない。
しかし形式はストークス流れ、オセーン流れと同じになっているので逐次近似法の式として用いる事は出来るだろう。

昭和　年　月　日

## 5. 周期運動

従来ストークス流れの非定常問題は調べられているがオセーンの流れについては見当らない。以下はオセーン流れの周期解について考える。そこで運動はすべて周期的に行われるものとするので $(u, v, p)$ はすべて複素数値とし

$$Re\{ue^{i\omega t}\}$$

がその実際の値とする。
運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} i\omega u + U u_x &= -\frac{1}{\rho}p_x + \nu\nabla^2 u, \\ i\omega v + U v_x &= -\frac{1}{\rho}p_y + \nu\nabla^2 v, \end{aligned}\right\} \quad \cdots (5.1)$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 p &= 0, \\ \left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta &= \nu\nabla^2\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \cdots (5.2)$$

これから今

$$\left.\begin{aligned} \left[i\omega + U\frac{\partial}{\partial x} - \nu\nabla^2\right]\Phi &= 0 \\ \Phi = K_0(\sigma' R)e^{\sigma(x-x')}, &\quad \sigma' = \sqrt{\sigma^2 + \frac{i\omega}{\nu}} \end{aligned}\right\} \quad (5.3)$$

なる関数を導入すると $U^{(1)}, V^{(2)}$ は (A.4) と同じに与えられて

$$\left.\begin{aligned} p^{(1)} &= \frac{2\mu}{U}\left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\log R \\ p^{(2)} &= -\frac{2\mu}{U}\left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\Theta \end{aligned}\right\} \quad \cdots (5.4)$$

但し

$$\frac{\partial}{\partial x}\Theta = -\frac{\partial}{\partial y}\log R.$$

そう言う訳でこれらの核の特異性は定常問題の時と同じである。

逆流れの方程式は

$$\left.\begin{aligned} i\omega\tilde{u} - U\tilde{u}_x &= -\frac{1}{\rho}\tilde{p}_x + \nu\nabla^2\tilde{u} \\ i\omega\tilde{v} - U\tilde{v}_x &= -\frac{1}{\rho}\tilde{p}_y + \nu\nabla^2\tilde{v} \end{aligned}\right\} \cdots (5.5)$$

相反性(1.5)を使うと(1.9)と全く同じ形になる。

$$\int_C \left[\tilde{u}X + \tilde{v}Y - (u\tilde{X} + v\tilde{Y})\right] ds$$
$$= \rho U \int_C (u\tilde{u} + v\tilde{v}) \frac{\partial x}{\partial \nu} ds, \quad (5.6)$$

それ故今定義した核関数により(2.4)の形の表現が成立つ。

そして又明らかに3節の表現(3.4)も同様に成立つがこの時一つの問題が生じる。

つまり(3.3)(3.4)で所謂非線型項を導入する際にもし運動がすべて単一周波数$\omega$の運動であるならば非線型項は定数成分と倍周波数成分にわかれて基本周波数成分はなくなる。

それ故非線型項で基本周波数成分を含む項は定常項又は高次周波数成分間の積の形で出て来る。

即ち今

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum_{-\infty}^{\infty} u_n e^{in\omega t}, \\ v &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{ni\omega t}, \end{aligned}\right\} \quad (5.7)$$

とおくと ( $\overline{u_n} = u_{-n}$, $\overline{v_n} = v_{-n}$ )

昭和　年　月　日

$$uv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n v_{k-n} , \qquad (5.8)$$

の形の中の基本周波数成分のみを考えればよい。
それは $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n v_{1-n}$ でその中で $u_{\pm 1}, v_{\pm 1}$ を含む項は $u_1 v_0, u_{-1} v_2, u_2 v_{-1}, u_0 v_1$ だけでそれ以外は他のモードの運動のみに関係している。

同様の事は定常問題においても生じ，(3.3)(3.4)の非線型項は(5.8)の形でいえば

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n v_{-n} = u_0 v_0 + u_1 v_{-1} + u_{-1} v_1 + \cdots\cdots$$

となっているので周期的運動があればその右辺第2項以下の項が現われて来る。

6. オセーンの流れの拡張(II)

オセーン流れの最大の魅力は線型であり，解の重ね合せが可能な点である。

しかしポテンシャル流れに較べて核関数は複雑であり又対流項の線型化の為に伴流はすべて$x$軸に平行になる点は不便である。

又レイノルズ数の大変大きい所では物体の近くおよび伴流中を除けばポテンシャル流れで表現出来る事はよく知られた事実である。

それ故レイノルズ数の大変大きい所では才1近似としてポテンシャル流れ(不連続流でも何でもよい)を採り，それにオセーン流れを加えて粘性流れを表現する方法が考えられる。

この時ポテンシャル流れの速度成分を$(u^P, v^P)$オセーン流れのを$(u^F, v^F)$とすれば物体表面上の境界条件はポテンシャル流れでは

$$u^P\frac{\partial x}{\partial \nu}+v^P\frac{\partial y}{\partial \nu}=0 \quad \text{on } C \tag{6.1}$$

($u_P$は一様流れも含むものする)

又粘性流れでは

$$u^P+u^F=0,\quad v^P+v^F=0 \quad \text{on } C \tag{6.2}$$

であるから(6.1)を代入すると

$$\left.\begin{aligned} &u^F\frac{\partial x}{\partial \nu}+v^F\frac{\partial y}{\partial \nu}=0, \\ &u^F\frac{\partial x}{\partial s}+v^F\frac{\partial y}{\partial s}=-\left(u^P\frac{\partial x}{\partial s}+v^P\frac{\partial y}{\partial s}\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

となってオセーン流れに対する境界条件は法線速度0と切線速度はポテンシャル流れのスリップ速度を補うものとなり，正に粘性

昭和　　年　　月　　日

に対する補正項と言う意味が明らかになる。

さて運動方程式は(3.1)を変形して次のようにしておいた方が便利である。

$$u\zeta_x + v\zeta_y = +\nu\Delta\zeta, \quad \zeta = u_y - v_x; \quad (6.2)$$

$$\Delta\left(p + \frac{q^2}{2}\right) = \zeta^2 + u\zeta_y - v\zeta_x, \quad (6.3)$$

今、

$$u = u^P + u^F, \quad v = v^P + v^F, \quad p = p^P + p^F, \quad (6.4)$$

とおくと

$$\zeta = \zeta^P + \zeta^F, \quad \zeta^P = 0,$$

故 $u^F$ の自乗以上を省略すると

$$u^P\zeta_x + v^P\zeta_y = \nu\Delta\zeta, \quad \zeta = u^F_y - v^F_x, \quad (6.5)$$

$$\Delta\left(p^P + \frac{u_P^2 + v_P^2}{2}\right) = 0. \quad (6.6)$$

$$\Delta\left(p^F + u^P u^F + v^P v^F\right) = u^P\zeta_y - v^P\zeta_x, \quad (6.7)$$

今速度ポテンシャル$\phi$と流れ関数$\psi$を導入して

$$\phi_x = u^P = \psi_y, \quad \phi_y = v^P = -\psi_x, \quad (6.8)$$

として(6.5),(6.7)において独立変数を$(x, y)$から$(\phi, \psi)$に変換すると、

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta(x,y) = q^2\Delta(\phi,\psi) = q^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right), \\
&\left.\begin{aligned}
&\left(u^P\frac{\partial}{\partial x} + v^P\frac{\partial}{\partial y}\right) = q^2\frac{\partial}{\partial\phi} \\
&\left(u^P\frac{\partial}{\partial y} - v^P\frac{\partial}{\partial x}\right) = q^2\frac{\partial}{\partial\psi}
\end{aligned}\right\}, \quad q^2 = u_P^2 + v_P^2,
\end{aligned}\right\} \quad (6.9)$$

なる関係があるので

$$\Delta(\phi,\psi)\zeta = \frac{1}{\nu}\zeta_\phi, \quad (6.10)$$

$$\Delta(\phi,\psi)H^F = \zeta_\psi, \quad H_F = p^F + u^P u^F + v^P v^F, \quad (6.11)$$

昭和　年　月　日

又ス式から左辺を消去すると次式を得る。

$$\Delta(\phi,\psi)\{H\tilde{\zeta}_\phi - \nu\zeta_\psi\} = 0 \qquad \cdots\cdots (6.12)$$

(70)は、(A.6)と全く同じであるから基本解は

$$Z(\phi,\psi) = K_0\left(\frac{\rho}{2\nu}\right)e^{\frac{\phi}{2\nu}}, \qquad \cdots\cdots (6.13)$$

$$\rho = \sqrt{\phi^2+\psi^2}$$

であつて $\rho \to 0$ ならば $\phi \doteqdot gs$, $\psi \doteqdot gt$

$$Z \doteqdot \log\rho \longrightarrow \log g + \log r, \qquad (6.14)$$

ここに $r = \sqrt{s^2+t^2}$, $s, t$ は夫々流線と等ポテンシャル線に沿う長さである。

それ故 $Z$ は物理面でも対数的特異性を有する。

ここで更に $u^F, v^F$ に対して流れ関数 $T$ を導入しよう。

$$\left.\begin{aligned} u^F &= T_y, \quad v^F = -T_x \\ \zeta &= \Delta(x,y)T \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (6.15)$$

(6.10)

又逆流れには(∼)印をつけるものとし、(6.5)に対し

$$\left.\begin{aligned} \nu\Delta\tilde{\zeta} &= -(u^P\tilde{\zeta}_x + v^P\tilde{\zeta}_y), \\ \nu\Delta(\phi,\psi)\tilde{\zeta} &= -\frac{1}{2}\tilde{\zeta}_\phi, \\ \tilde{\zeta} &= \Delta(x,y)\tilde{T} \end{aligned}\right\} \qquad (6.16)$$

グリーンの定理より

$$\iint_D \Delta T\Delta\tilde{T}\,dxdy = \iint_D T\Delta^2\tilde{T}\,dxdy + \int_C(\tilde{\zeta}T_\nu - T\tilde{\zeta}_\nu)\,ds,$$

$$= \iint_D \tilde{T}\Delta^2 T\,dxdy + \int_C(\zeta\tilde{T}_\nu - \tilde{T}\zeta_\nu)\,ds. \qquad (6.17)$$

を得るがこの内面積分の部分は更に(6.5)(6.16)の第一式を使つて(以下、$u^P, v^P$ を単に $u, v$ と記す)

昭和　年　月　日

$$\cancel{I = \iint_D (\tilde{T}\Delta^2 T - T\Delta^2\tilde{T})dxdy} = \frac{1}{2}\iint_D \left[T(u\Delta\tilde{T}_x + v\Delta\tilde{T}_y) + \tilde{T}(u\Delta T_x + v\Delta T_y)\right]dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_C (T\Delta\tilde{T} + \tilde{T}\Delta T)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}ds + \frac{1}{2}\iint_D \left[\Delta\tilde{T}(uT_x + vT_y) + \Delta T(u\tilde{T}_x + v\tilde{T}_y)\right]dxdy$$

この最後の第1項は $\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0$ on $C$ 故なくなり，第2項は(6.9)により変数を$(\phi,\psi)$に変換すると

$$I = \frac{1}{2}\iint_D (T_\phi\Delta\tilde{T} + \tilde{T}_\phi\Delta T)d\phi d\psi$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (\nabla T_\phi \nabla\tilde{T} + \nabla\tilde{T}_\phi \nabla T)d\phi d\psi + \frac{1}{2}\int_C (T_\phi\tilde{T}_\psi + \tilde{T}_\phi T_\psi)d\phi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{C(\phi,\psi)} (\nabla T\cdot\nabla\tilde{T})d\psi + \frac{1}{2}\int_C (T_\phi\tilde{T}_\psi + \tilde{T}_\phi T_\psi)d\phi,$$

ここで$(\phi,\psi)$面では $C$ は $\psi = \mathrm{Const.}$ の直線であるので右辺第1項は又消え結局，

$$I = \frac{1}{2}\int_C (T_\phi\tilde{T}_\nu + \tilde{T}_\phi T_\nu)ds \quad , \quad \cdots (6.18)$$

を得る。

それ故(6.17)に代入すれば

$$\frac{1}{2}\int_C (T_\phi\tilde{T}_\nu + \tilde{T}_\phi T_\nu)ds +$$

$$+ \int_C (\zeta\tilde{T}_\nu - \tilde{T}\zeta_\nu - \tilde{\zeta}T_\nu + T\tilde{\zeta}_\nu)ds = 0, \quad (6.19)$$

この式で $\tilde{\zeta}$ として(6.13)から

昭和　年　月　日

$$\tilde{Z}(\phi-\phi', \psi-\psi') = Z(\phi'-\phi, \psi'-\psi), \qquad (6.20)$$

とおくと $\tilde{\Psi}$ は (6.16) 第3式より ポアッソンの公式により
今はそれを $\tilde{\Psi}$ とかくことにして

$$\tilde{\Psi}(\phi', \psi'; \phi', \psi') = \frac{1}{2\pi}\iint_D \tilde{Z}(\phi-\phi', \psi-\psi') \log\sqrt{(\phi-\phi')^2+(\psi-\psi')^2}\,\frac{d\phi d\psi}{q^2},$$

$$= \tilde{\Psi}(\phi'', \psi''; \phi, \psi) = \frac{1}{2\pi}\iint_D Z(\phi''-\phi, \psi''-\psi) \log\sqrt{(\phi-\phi')^2+(\psi-\psi')^2}\,\frac{d\phi d\psi}{q^2}, \quad (6.21)$$

これを (6.14) に代入すると前節同様に.

$$T(\phi', \psi') = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\zeta\tilde{\Psi}_\nu - \zeta_\nu\tilde{\Psi} - T_\nu\tilde{Z} + T\tilde{Z}_\nu\right] ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi\nu}\int_C \left(T_\phi\tilde{\Psi}_\nu + T_\nu\tilde{\Psi}_\phi\right) ds,$$

をうるが $(\phi, \psi)$ 面では $C$ は直線で $(ds = \frac{d\phi}{q},\ d\nu = \frac{d\psi}{q})$ ある
事を考慮すると 結局

$$\left.\begin{aligned} T(\phi', \psi') &= \frac{1}{\pi}\int_C \left[\alpha(\phi, \psi)\Psi(\phi', \psi'; \phi, \psi) + \beta(\phi, \psi) Z(\phi', \psi'; \phi, \psi)\right] d\phi, \\ \alpha &= -\zeta_\psi - \frac{1}{\nu}T_{\phi\psi}, \quad \beta = T_\psi + ?, \end{aligned}\right\} \quad (6.22)$$

境界条件は

$$\left.\begin{aligned} T &= 0, \\ T_\psi &= \frac{\partial T}{q\,\partial\nu} = -\frac{1}{q}\frac{\partial\phi}{\partial s} = -1, \end{aligned}\right\} \text{on } C, \quad (6.23)$$

これから未知関数 $\alpha, \beta$ を決める事が出来る。

## 7. 薄い物体

前節の論義は大变悔流であるけれども、物体が流れ方向に長く、幅が狭ければ第1近似としてはオセーン流れで充分である。

この時ポテンシャル流れの $x$ 成分は（対称物体）

$$u^P(x) = U + \frac{U}{\pi}\int_0^l \frac{df/dx'}{x-x'}dx' , \quad \cdots \quad (7.1)$$

たゞし $f(x')$ は半幅曲線とする。

オセーン流れの境界条件は

$$\left.\begin{aligned} u^F(x) &= -u^P \\ v^F(x) &= -v^P = 0 \end{aligned}\right\} 0<x<l , \quad (7.2)$$

であるから (2.4) で $Y=0$ とおけば $v^F=0$ となって上の第1の条件のみ考えればよい

$$u^F(x,0) = \frac{1}{\cancel{2}\pi\mu}\int_0^l X(x')\,U^{(1)}(x,0;x',0)\,dx' , \quad \cdots (7.3)$$

特にレイノルズ数が大変大きければ (A.4), (A.5) により

$\sigma = \frac{U\rho}{2\mu}$

$\mu = \frac{\rho U}{2\sigma}$

$$U^{(1)}(x,0;x',0) \doteqdot \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{\dfrac{2\pi}{\sigma|x-x'|}} , & \text{for } x'<x \\ 0 & \text{for } x>x' \end{array}\right\} \quad (7.4)$$

これを (7.3) に代入すると、

$$u^F(x,0) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi\sigma}}\int_0^x \frac{X(x')}{\sqrt{x-x'}}dx' , \quad \cdots \quad (7.5)$$

これはアーベル型の積分方程式で解は

$$\begin{aligned} X(x') &= \mu\sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}}\,\frac{d}{dx'}\int_0^{x'}\frac{u^F(x)\,dx}{\sqrt{x'-x}} \\ &= \mu\sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}}\left[u^F(0)/\sqrt{x'} + \int_0^{x'}\frac{du^F(x)}{\sqrt{x'-x}}\right] , \quad (7.6) \end{aligned}$$

特に楕円では（長 $l$, 幅 $b$）

$$u^p(x) = \left(1+\frac{b}{l}\right)U \quad \text{for } 0<x<l, \qquad (7.7)$$

であるから

$$\left.\begin{aligned} X(x') &= -\mu U\left(1+\frac{b}{l}\right)\sqrt{\frac{2\nu}{\pi}}\Big/\sqrt{x'}, \\ D &= -2\int_0^l X(x')\,dx' = 4\mu U\left(1+\frac{b}{l}\right)\sqrt{\frac{2\nu l}{\pi}} \\ C_F &= \frac{D}{2\times\frac{\rho}{2}U^2 l} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{b}{l}\right)\Big/\sqrt{R}, \quad R=\frac{Ul}{\nu} \end{aligned}\right\} \quad (7.8)$$

平板のブラジウス式では

$$C_F = 1.328/\sqrt{R} \qquad (7.9)$$

それに対し上式では $4/\sqrt{\pi} = 2.257$ と約2倍の値を与える。*
さらに近似を進めるには(3.4)を利用する事が考えられる。
平板について考えて見るとその第2項は

$$\int_0^\infty \zeta\,dy = U, \quad v = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \quad U^{(1)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \qquad (7.10)$$

とすると O(U) になるのでこの項を考えると X は小さくなると考えられ境界層理論による値に近づく方向にある。
さらに厚みが有限な場合はその被積分関数中 $\zeta v$ の $v$ は $v = v^P + v^F$ とすべきであり、$v^F$ は上式により $O(1/\sqrt{R})$ となるが $v^P = O$(厚さ/長さ) となるのでさらに大きい貢献がある事になり、しかも物体上では(7.2)の関係があるのでこの $v^P$ の貢献は抵抗増加の方向であると考えられる。そしてこれから出て来る抵抗係数は上の考察からレイノルズ数に関係なく $O(b/l)$ となるであろう。この事は $R\to\infty$ におけるオセーン流れから考えて妥当な結果と云えよう。

*. Piercy, N.A.V. & Winny; "The skin friction of flat plate to Oseen's Approximation" P.R.S.A, vol.140 (1933),

昭和　　年　　月　　日

8. 3次元流れについて

3次元オセーン流れについても全く同様な議論が出来て附録Bに2節のそれに対応する表現を記してある。

以下前節の2次元平板又は薄い物体に対する境界条件の式をあげて見よう。

この際も第0次近似はポテンシャル流れとしオセーン流れは表面のスリップ速度に対する補正項と考える。

物体はz-方向に薄いものとすると(B.4)において$x_3 \equiv z = 0$としてよく境界条件の積分方程式は

$$\left.\begin{aligned} u^F &= -u^P(x,y,0) = \frac{1}{8\pi\mu}\iint (X U^{(1)} + Y V^{(1)})\,dx'dy', \\ v^F &= -v^P(x,y,0) = \frac{1}{8\pi\mu}\iint (X U^{(2)} + Y V^{(2)})\,dx'dy', \end{aligned}\right\} \quad (8.1)$$

$u^P, v^P$はポテンシャル流れから求められ、その近似値は例えば細長船理論によりえられる。

$\sigma$が充分大きい時は(B.7)によって上式右辺の積分を$y'$について積分出来る。

即ち
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma y^2}{2x}}\,dy = \sqrt{\frac{2\pi x}{\sigma}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-\frac{\sigma y^2}{2x}}\,dy = 0$$

であるから

$$\left.\begin{aligned} -u^P(x,y,0)/U &= \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}}\int_0^x X'(x',y)\frac{dx'}{\sqrt{x-x'}}, \\ -v^P(x,y,0)/U &= \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}}\int_0^x Y'(x',y)\frac{dx'}{\sqrt{x-x'}}, \end{aligned}\right\} \quad (8.2)$$

但し　$X' = X/\rho U^2$,　$Y' = Y/\rho U^2$,

を得るので前節同様$X'$, $Y'$は直ちに計算出来る。

3次元で興味のあるのは所謂縦渦の発生であるがそれは(B·5),(B·3)から明らかなようにこの場合その強さはYで代表されている。

従って上式から見る限り縦渦の強さは直接X つまり抵抗には関係しないで関係するのは前節でも見たように(3·4)右辺第2項のような積分である。

今の場合それに対応する項は x方向については

$$\frac{1}{8\pi\nu}\iiint_D \left[(v\zeta - w\eta)U^{(1)} + (w\xi - u\zeta)V^{(1)} + (u\eta - v\xi)W^{(1)}\right] d\tau(x,y,z) \quad \cdots\cdots(8\cdot3)$$

となりこの中の(u,v,w)にポテンシャル流れの成分を導入すると前節同様細長比に比例しレイノルズ数に関係しない抵抗係数が表われるであろう。

上式の各項の大きさを考えて見るに $(v\zeta-w\eta)U^{(1)}$ の項は2次元の時と同様な効果をもつであろうし、又 $V^{(1)}$ の項は積分すると小さくなってしまい、結局3次元特有の項は第3項となり縦渦の項も含まれている事がわかる。

なおこれらの項の係数例えて $(u\eta-v\xi)d\tau$ は流体粒子に働くz-方向の力(クッタジューコフスキーの定理による)を表わしている。しかし今はそれがその位置に拘束されているのでその為にz方向に誘導速度を持っている訳であり、乱流におけるレイノルズ応力と同じ役割を果している。

昭和　　年　　月　　日

# 附録A　オセーン流れの基本特異性（2次元）

オセーンの方程式は

$$\left.\begin{aligned} U u_x &= -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \nabla^2 u, \\ U v_x &= -\frac{1}{\rho} p_y + \nu \nabla^2 v, \end{aligned}\right\} \quad \cdots (A\cdot1)$$

逆流では

$$\left.\begin{aligned} -U u_x &= -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \nabla^2 u, \\ -U v_x &= -\frac{1}{\rho} p_y + \nu \nabla^2 v, \end{aligned}\right\} \quad \cdots (A\cdot2)$$

連続の式は

$$u_x + v_y = 0, \quad \cdots (A\cdot3)$$

基本特異性 $U^{(i)}(x,y;x',y')$, $V^{(i)}(x,y;x',y')$, $P^{(i)}(x,y;x',y')$ は $(x,y)$ に関しては (A·1) を満し，$(x',y')$ については (A·2) を満す。

オセーンによれば

$$\left.\begin{aligned} U^{(1)}(x,y;x',y') &= -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\log R + 2\Phi(x,y;x',y') - \frac{\partial}{\sigma\partial x}\Phi, \\ V^{(1)} = U^{(2)} &= -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\log R - \frac{\partial}{\sigma\partial y}\Phi, \\ V^{(2)} &= \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\log R + \frac{\partial}{\sigma\partial x}\Phi, \\ P^{(1)} &= +2\mu\frac{\partial}{\partial x}\log R, \quad P^{(2)} = 2\mu\frac{\partial}{\partial y}\log R, \end{aligned}\right\} (A\cdot4)$$

$$\Phi(x,y;x',y') = K_0(\sigma R)e^{\sigma(x-x')}, \quad \cdots (A\cdot5)$$

ここに $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, $\sigma = U/2\nu$,

なお

$$\nabla^2_{(x,y)}\Phi = 2\sigma\frac{\partial}{\partial x}\Phi, \quad \cdots (A\cdot6)$$

オセーンのテンソル $t_{\alpha\beta}$ との関係は

$$\left.\begin{aligned} & t_{11} \equiv U^{(1)}, \quad t_{12} \equiv t_{21} \equiv V^{(1)} \equiv U^{(2)}, \quad V^{(2)} \equiv t_{22} \\ & p_{1} \equiv p^{(1)}, \quad p_{2} \equiv p^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad (A \cdot 7)$$

σR が小さい所では

$$\Phi \longrightarrow -\log R - \log \frac{\gamma\sigma}{2}$$ , γ は Euler's Const.

逆に大きい所では

$$\Phi \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma R}}\, e^{-\sigma\{R-(x-x')\}},$$

である。

よって σR の小さい所では

$$\left.\begin{aligned} U^{(1)} &\longrightarrow \log\frac{1}{R} + \frac{(x-x')^2}{R^2} - \log\frac{\gamma\sigma}{2} \cdots \\ V^{(1)} = U^{(2)} &\longrightarrow \frac{(x-x')(y-y')}{R^2} + \cdots \\ V^{(2)} &\longrightarrow \log\frac{1}{R} + \frac{(y-y')^2}{R^2} - 1 - \log\frac{\gamma\sigma}{2} \end{aligned}\right\} \quad (A \cdot 8)$$

となってストークス流れの基本特異性に一致する。

境界線の法線を n，線素を ds とする時この境界に沿って働く力の x, y 成分は夫々

$$\left.\begin{aligned} X &= -p\frac{\partial x}{\partial n} + \mu\frac{\partial u}{\partial n} - \mu\frac{\partial v}{\partial s}, \\ Y &= -p\frac{\partial y}{\partial n} + \mu\frac{\partial v}{\partial n} + \mu\frac{\partial u}{\partial s}, \end{aligned}\right\} \quad (A \cdot 9)$$

それ故 (A・8) により

$$\left.\begin{aligned} & \lim_{R\to 0} \oint_R X^{(1)} ds = 4\pi\mu = \oint Y^{(2)} ds. \\ & \oint X^{(2)} ds = \oint Y^{(1)} ds = 0. \end{aligned}\right\} \quad (A \cdot 10)$$

昭和　　年　　月　　日

なお
$$\zeta^{(1)} = U_y^{(1)} - V_x^{(1)} = U_y^{(1)} - U_x^{(2)} = 2\Phi_y$$
$$\zeta^{(2)} = U_y^{(2)} - V_x^{(2)} = V_y^{(1)} - V_x^{(2)} = -2\Phi_x$$
$$\frac{\partial}{\partial y}X^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x}X^{(2)} = 2\mu\left[\frac{\partial}{\partial n(x,y)}\Phi_y + \frac{\partial}{\partial s}\Phi_x\right]$$
$$\frac{\partial}{\partial y}Y^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x}Y^{(2)} = 2\mu\left[\frac{\partial}{\partial n}\Phi_x + \frac{\partial}{\partial n}\Phi_y\right]$$

## 附録B　3次元オセーン流れ

3次元問題の核関数はオセーンによれば

$$\left.\begin{aligned} p_k(x,y,z;x',y',z') &= -2\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{R}\right), \\ t_{jk} &= \delta_{jk}\Delta\Phi - \Phi_{x_j x_k}, \\ \Delta\Phi - 2\sigma\Phi_x &= \frac{2}{R}, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &\equiv x \\ x_2 &\equiv y \\ x_3 &\equiv z. \end{aligned}\right\} \tag{B.1}$$

なお

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{2}{R}e^{-\sigma(R-\overline{x-x'})}, \\ \Phi &= \frac{1}{\sigma}\int_0^{\sigma(R-\overline{x-x'})}\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\,d\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{B.2}$$

我々の記号系では

$$U_j^{(k)} \equiv t_{jk}, \qquad U_1^{(k)} \equiv U^{(k)},\; U_2^{(k)} \equiv V^{(k)},\; U_3^{(k)} \equiv W^{(k)},$$

$$p^{(k)} \equiv p_k,$$

渦度は

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \xi^{(1)} &= W_y^{(1)} - V_z^{(1)} = U_y^{(3)} - U_z^{(2)} = 0 \\ \xi^{(2)} &= V_y^{(3)} - V_z^{(2)} = -\Delta\Phi_z \\ \xi^{(3)} &= W_y^{(3)} - W_z^{(2)} = \Delta\Phi_y \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} \eta^{(1)} &= U_z^{(1)} - U_x^{(3)} = \Delta\Phi_z \\ \eta^{(2)} &= V_z^{(1)} - V_x^{(3)} = 0 \\ \eta^{(3)} &= W_z^{(1)} - W_x^{(3)} = -\Delta\Phi_x \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} \zeta^{(1)} &= U_x^{(2)} - U_y^{(1)} = -\Delta\Phi_y \\ \zeta^{(2)} &= V_x^{(2)} - V_y^{(1)} = \Delta\Phi_x \\ \zeta^{(3)} &= W_x^{(2)} - W_y^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{B.3}$$

昭和　年　月　日

境界面に働く力を $X_j$ $(j=1,2,3)$ とすると (B・4) に対応する式は

$$u_k(x,y,z) = \frac{1}{8\pi\mu}\iint_S \sum_{j=1}^{3} X_j U_j^{(k)} \, dS , \quad \cdots (B\cdot 4)$$

である。
又渦度は $\zeta_k$ $(\zeta_1 \equiv \xi, \zeta_2 = \eta, \zeta_3 = \zeta)$ とすると

$$\zeta_k(x,y,z) = \frac{1}{8\pi\mu}\iint_S \sum_{j=1}^{3} X_j \zeta_k^{(j)} \, dS , \quad (B\cdot 5)$$

特に

$$\xi = \frac{1}{8\pi\mu}\iint_S \left(-Y\xi^{(2)} + Z\xi^{(3)}\right) dS, \quad (B\cdot 5')$$

又圧力は

$$p(x,y,z) = \frac{1}{8\pi\mu}\iint_S \sum_{j=1}^{3} X_j p^{(j)} \, dS , \quad \cdot (B\cdot 6)$$

$\sigma$ が大変大きい所では

$$\left.\begin{array}{l}
U^{(1)}\cancel{(x,y,z;0,0,0)} \rightarrow \begin{cases} \left(1+\dfrac{x}{r}\right)\dfrac{1}{r} e^{-\frac{\sigma\rho^2}{2x}}, & \text{for } x>0, \\ 0 & \text{for } x<0 \end{cases} \\
\rho^2 = y^2+z^2, \quad r^2 = x^2+y^2+z^2, \\
V^{(1)} = U^{(2)} \longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{y}{r^2} e^{-\frac{\sigma\rho^2}{2x}} & \text{for } x>0 \\ 0 & \text{for } x<0 \end{cases}, \\
V^{(2)} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-y}{r^2} e^{-\frac{\sigma\rho^2}{2x}} & \text{for } x>0 \\ 0 & \text{for } x<0 \end{cases},
\end{array}\right\} \quad (B\cdot 7)$$

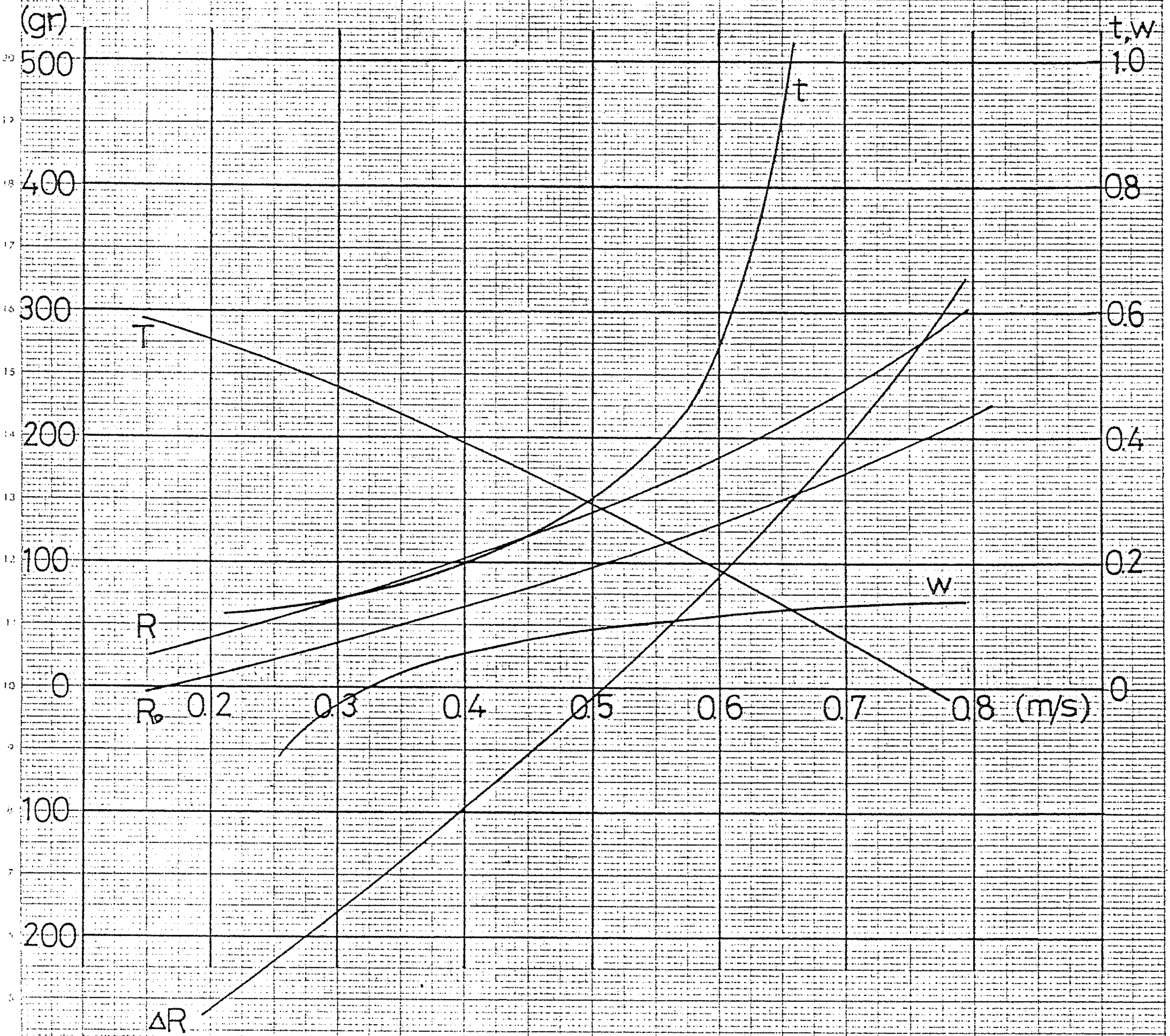
$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\xi^{(2)} \\ \xi^{(3)}\end{array}\right\} \longrightarrow \pm\begin{cases} \dfrac{2\sigma}{r^2}\begin{pmatrix} z \\ -y \end{pmatrix} e^{-\frac{\sigma\rho^2}{2x}}, & \text{for } x>0, \\ 0 & \text{for } x<0 \end{cases} \\
\eta^{(3)} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\sigma}{r}\left(\dfrac{x}{r}-1\right) e^{-\frac{\sigma\rho^2}{2x}}, & \text{for } x>0 \\ 0 & \text{for } x<0 \end{cases}
\end{array}\right\} \quad (B\cdot 8)$$

水槽(I) 52.2.2 (阿方大)　1/3

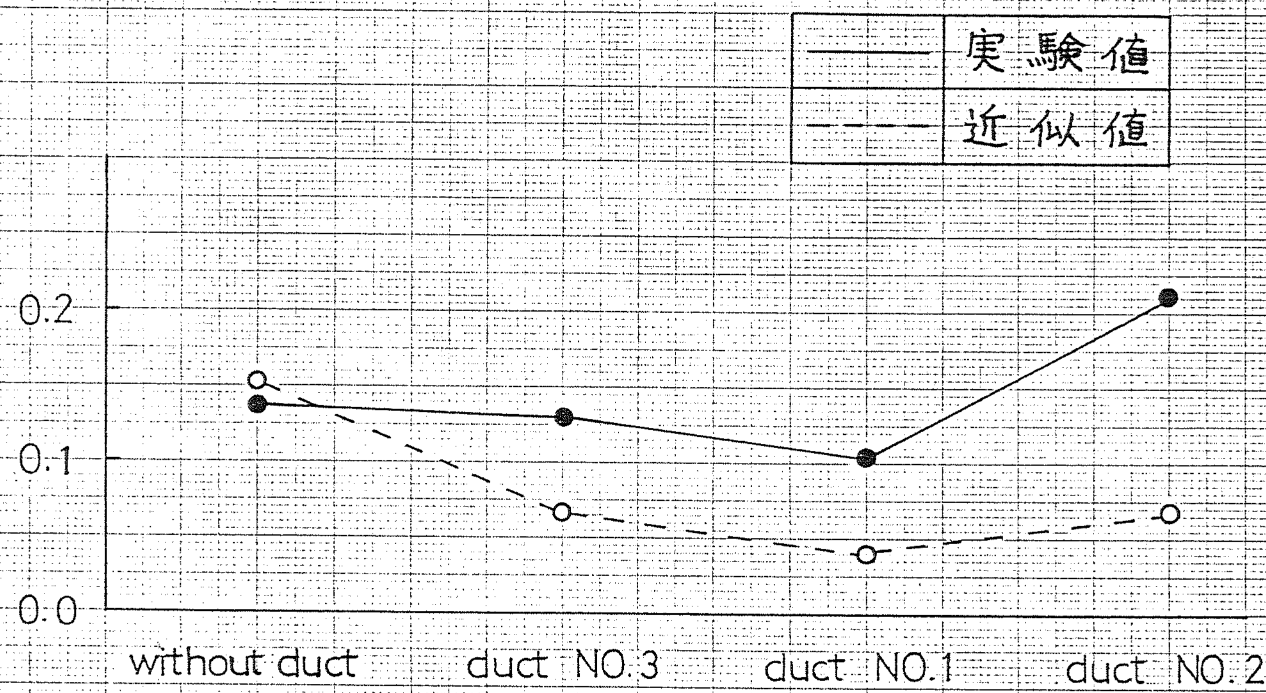
# 自航試験(回転数一定)

Without Duct

N = 2.5



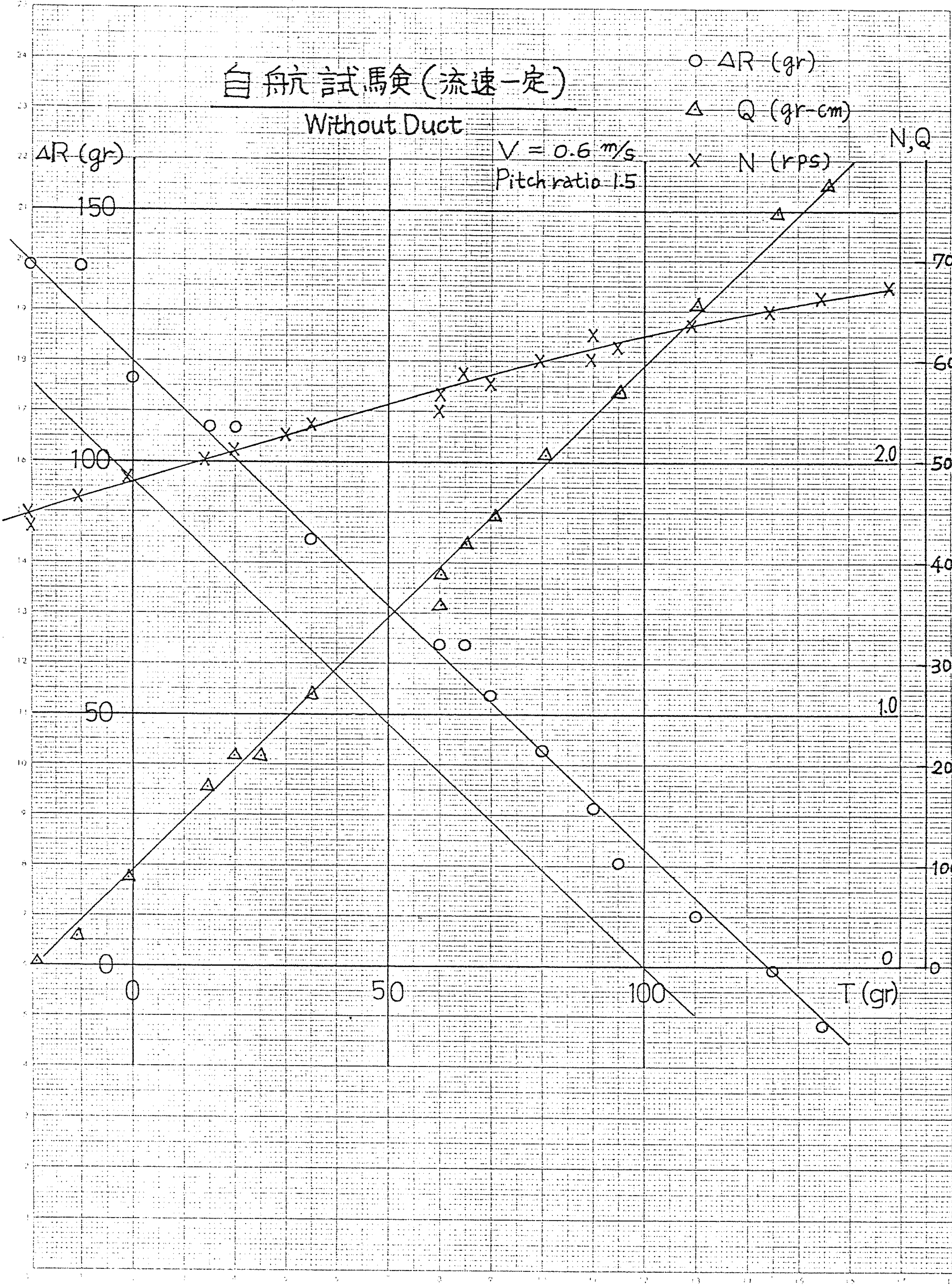
# 推力減少係数 t




$$t = \frac{w}{1 + \frac{s}{2} + w}$$

$$s = \sqrt{1 + C_T} - 1$$

$$C = \frac{T}{\frac{\rho}{2} A V^2}$$


自航試験(流速一定)
Without Duct
V = 0.6 m/s
Pitch ratio 1.5
○ ΔR (gr)
△ Q (gr-cm)
× N (rps)
ΔR (gr)
150
100
50
0
N,Q
700
600
500
400
300
200
100
0
2.0
1.0
0
0
50
100
T (gr)