1.　　V　　M-97

No.
Date 58.5.13.

ストークス流れの最小抵抗問題

別所

目次

1. ストークス流れの表現

速度を u_j ($j=1,2,3$)，圧力を p とすると運動方程式は

$$\mu \nabla^2 u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} p \qquad (1.1)$$

$$x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ x_3 \equiv z$$

連続の方程式は

$$\sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad ,\ --- \qquad (1.2)$$

(1.1)と(1.2)より $\quad \nabla^2 p = 0 \quad ,\ --- \qquad (1.3)$

それ故 今 $\quad p = \mu \nabla^2 \phi \quad ,\ --- \qquad (1.4)$

なる関数 ϕ を導入し，u'_j を調和関数とすると

$$u_j = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + u'_j \quad ,\ --- \qquad (1.5)$$

のように表わされる。

方向余弦 (l_j) の平面に働く各軸方向の応力 τ_j は

$$\tau_j = \sum_i^3 \tau_{ji} l_i \quad ,\ \cdots\cdots \qquad (1.6)$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{ji} &= \mu \gamma_{ji} - p\,\delta_{ij} , \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j \end{cases} \\ \gamma_{ij} &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \gamma_{ji} \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

今

$$E(u_j, u_j') = \frac{\mu}{2}\iiint_D \left[\sum_i\sum_j \gamma_{ij}\gamma_{ij}'\right] dx\,dy\,dz, \qquad (1.8)$$

$$\left(\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i},\ \gamma_{ij}' = \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i},\right)$$

なる積分を定義しておこう。

特に $u_j = u_j'$ は散逸エネルギーである。

先ず明らかに

$$E(u_j, u_j') = E(u_j', u_j), \qquad (1.9)$$

部分積分して (1.1), (1.2) を代入すると

$$E(u_j, u_j') = -\iint_S \sum_j u_j \tau_j' \, dS = -\iint_S \sum u_j' \tau_j \, ds, \qquad (1.10)$$

特に境界条件として

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = -U, \\ u_2 = u_3 = 0, \end{array}\right\} \text{ on } S, \qquad (1.11)$$

とすると

$$\left.\begin{array}{l} E(u_j, u_j) \equiv E(u_j) = +U\iint_S \tau_1 \, ds = RU, \\ R = \iint_S \tau_1 \, ds, \end{array}\right\} \qquad (1.12)$$

となり R は抵抗となる。

つまり抵抗Rのなす仕事は粘性による減衰に等しい。

次に (1.10)において u_j に附録 A の核関数を導入すれば

点 Q の周りの積分が残って、

$$u_k(Q) = \sum_j^3 \iint_S \left[u_j(P) \frac{T_j^{(k)}(P,Q)}{\mu} - \frac{T_j(P)}{\mu} U_j^{(k)}(P,Q) \right] dS(P), \quad (1.13)$$

なる表現をうる。

物体の内部で (1.11) と成る事を考えると (1.13) の右辺第1項を (1.10) によって

物体の内部領域の積分に変更すれば

$$\sum_j^3 \iint_S u_j(P) \frac{T_j^{(k)}(P,Q)}{\mu} dS_P = 0 \quad \text{for } Q \in D, \quad (1.14)$$

それ故 一様流れの中では

$$u_k(Q) = - \sum_j^3 \iint_S \frac{T_j(P)}{\mu} U_j^{(k)}(P,Q) \, dS_P, \quad (1.15)$$

なる表現が可能である。

この時 圧力 p は

$$p(Q) = - \sum_j \iint_S T_j P_j(P,Q) \, dS_P, \quad (1.16)$$

渦度は

$$\zeta_k(Q) = - \sum_j \iint_S \frac{T_j}{\mu} Z_j^{(k)} \, dS_P, \quad (1.17)$$

但し

$$\zeta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \zeta_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \zeta_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

回転体の軸対称流れでは

$$x_2 = r\cos\theta, \quad x_3 = r\sin\theta, \quad \cdots \tag{1.18}$$

のように円筒座標を導入し、

$$\left.\begin{aligned} &u_2\cos\theta + u_3\sin\theta = u_r \\ &r\tau_1 = \tau_x,\ r\left(\frac{T_2}{\mu}\cos\theta + \frac{T_3}{\mu}\sin\theta\right) = \tau_r,\ \frac{T_2}{\mu} = \tau_r\cos\theta,\ \frac{T_3}{\mu} = \tau_r\sin\theta \\ &-\zeta_2\sin\theta + \zeta_3\cos\theta = \zeta,\quad \zeta_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

とすれば

$$\left.\begin{aligned} u_1(Q) &= -\int_C\left[\tau_x V_1^{(1)} + \tau_r V_r^{(1)}\right]ds, \\ V_1^{(1)}(P,Q) &= \int_0^{2\pi} U_1^{(1)}(P,Q)\,\#\,d\theta, \\ V_r^{(1)}(P,Q) &= \int_0^{2\pi}\left(U_2^{(1)}\cos\theta + U_3^{(1)}\sin\theta\right)\#\,d\theta, \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

$$\left.\begin{aligned} u_r(Q) &= -\int_C\left[\tau_x V_1^{(r)} + \tau_r V_r^{(r)}\right]ds, \\ V_1^{(r)} &= \int_0^{2\pi}\left[\cos\theta' U_1^{(2)} + \sin\theta' U_1^{(3)}\right]\#\,d\theta \\ V_r^{(r)} &= \int_0^{2\pi}\left[\cos\theta\cos\theta' U_2^{(2)} + \cos\theta'\sin\theta\, U_3^{(2)}\right. \\ &\qquad\left. + \sin\theta'\cos\theta\, U_2^{(3)} + \sin\theta\sin\theta' U_3^{(3)}\right]\#\,d\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= -\int_C\left[\tau_x Y_1^{(1)} + \tau_r Y_r^{(1)}\right]ds \\ Y_1^{(1)} &= \int_0^{2\pi} Z_1^{(1)}\,\#\,d\theta,\quad Y_r^{(1)} = \int_0\left[Z_2^{(1)}\cos\theta + Z_3^{(1)}\sin\theta\right]\#\,d\theta, \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

$$\zeta_r = -\int_C \left(T_x Y_1^{(r)} + T_r Y_r^{(r)} \right) ds, \tag{1.23}$$

$$Y_1^{(r)} = \int_0^{2\pi} \left[Z_1^{(2)} \cos\theta' + Z_1^{(3)} \sin\theta' \right] a\, d\theta,$$

$$Y_r^{(r)} = \int_0^{2\pi} \Big[\cos\theta \cos\theta' Z_2^{(2)} + \cos\theta' \sin\theta Z_3^{(2)} + \cos\theta \sin\theta' Z_2^{(3)} + \sin\theta \sin\theta' Z_3^{(3)} \Big] a\, d\theta,$$

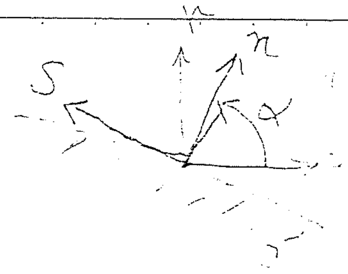
$$\zeta = -\int_C \left(T_x Y_1^{(\theta)} + T_r Y_r^{(\theta)} \right) ds \tag{1.24}$$

$$Y_1^{(\theta)} = a \int_0^{2\pi} \left[-Z_1^{(2)} \sin\theta' + Z_1^{(3)} \cos\theta' \right] d\theta$$

$$Y_r^{(\theta)} = a \int_0^{2\pi} \Big[-\sin\theta' \left(\cos\theta Z_2^{(2)} + \sin\theta Z_3^{(2)} \right) + \cos\theta' \left(\cos\theta Z_2^{(3)} + \sin\theta Z_3^{(3)} \right) \Big] d\theta.$$

$$\zeta_1 = \zeta_r = 0, \tag{1.25}$$

さらに



$$\left.\begin{aligned} u_n &= u_1 \cos\alpha + u_r \sin\alpha \\ u_s &= -u_1 \sin\alpha + u_r \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (1.26)$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= \tau_n \cos\alpha - \tau_s \sin\alpha \\ \tau_y &= \tau_n \sin\alpha + \tau_s \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (1.27)$$

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\sin\alpha = -\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_n &= \tau_x \cos\alpha + \tau_y \sin\alpha \\ \tau_s &= -\tau_x \sin\alpha + \tau_y \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

とおくと.

$$\left.\begin{aligned} u_n(Q) &= -\int_C \left[\tau_n U_n^{(n)} + \tau_s U_s^{(n)}\right] ds, \\ u_s(Q) &= -\int_C \left[\tau_n U_n^{(s)} + \tau_s U_s^{(s)}\right] ds. \end{aligned}\right\} \quad (1.28)$$

$$\left.\begin{aligned} U_n^{(n)} &= (V_1^{(1)} \cos\alpha + V_r^{(1)} \sin\alpha) \cos\alpha' + (V_1^{(r)} \cos\alpha + V_r^{(r)} \sin\alpha) \sin\alpha' \\ U_s^{(n)} &= (-V_1^{(1)} \sin\alpha + V_r^{(1)} \cos\alpha) \cos\alpha' + (-V_1^{(r)} \sin\alpha + V_r^{(r)} \cos\alpha) \sin\alpha' \\ U_n^{(s)} &= -(V_1^{(1)} \cos\alpha + V_r^{(1)} \sin\alpha) \sin\alpha' + (V_1^{(r)} \cos\alpha + V_r^{(r)} \sin\alpha) \cos\alpha' \\ U_s^{(s)} &= -(-V_1^{(1)} \sin\alpha + V_r^{(1)} \cos\alpha) \sin\alpha' + (-V_1^{(r)} \sin\alpha + V_r^{(r)} \cos\alpha) \cos\alpha' \end{aligned}\right\}$$

$$\zeta = -\int_c (\tau_n Z_n + \tau_s Z_s)\, ds. \quad (1.30)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_n &= Y_1^{(0)} \cos\alpha + Y_r^{(0)} \sin\alpha \\ Z_s &= -Y_1^{(0)} \sin\alpha + Y_r^{(0)} \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (1.31)$$

(1.6)の境界力についてもう一度考えてみよう。

suffix で区別するのは見通しが悪いので

$$\left(\begin{array}{llll} \tau_1 \equiv X, & \tau_2 = Y, & \tau_3 = Z, & u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = w \\ l_1 = l, & l_2 = m, & l_3 = n, & x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z \end{array}\right)$$

に戻して考えよう。

(1.6)は

$$\left.\begin{aligned} X &= (2\mu u_x - p)l + \mu(u_y + v_x)m + \mu(u_z + w_x)n \\ Y &= \mu(u_y + v_x)l + (2\mu v_y - p)m + \mu(w_y + v_z)n \\ Z &= \mu(u_z + w_x)l + \mu(w_y + v_z)m + (2\mu w_z - p)n \end{aligned}\right\} \quad (1.32)$$

とかけるが

$$\xi = w_y - v_z, \quad \eta = u_z - w_x, \quad \zeta = v_x - u_y$$

として書き直すと

$$\left.\begin{aligned} X &= -pl + \mu\eta n - \mu\zeta m + 2\mu(u_x l + v_x m + w_x n) \\ Y &= -pm + \mu\zeta l - \mu\xi n + 2\mu(u_y l + v_y m + w_y n) \\ Z &= -pn + \mu\xi m - \mu\eta l + 2\mu(u_z l + v_z m + w_z n) \end{aligned}\right\} \quad (1.33)$$

u,v,wの物体表面に沿った微係数は0であるから

例えば $v_x = \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n}$, $v_y = \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}$ 等となる。

それ故 例えば (1.33) 第1式の最後の項では

連続の式も考えて

$$u_x l + v_x m + w_x n = (v_x m - v_y l) + (w_x n - w_z l) = 0, \quad (1.34)$$

他の同様な項についても同じであるから

$$
\left.
\begin{aligned}
X &= -pl + \mu(\eta n - \zeta m) \\
Y &= -pm + \mu(\zeta l - \xi n) \\
Z &= -pn + \mu(\xi m - \eta l)
\end{aligned}
\right\} \cdots (1.35)
$$

となる。

それ故 $X_n = Xl + Ym + Zn = -p$, $\cdots (1.36)$

つまり面に垂直な力は圧力である。

さらに回転体では円筒座標を導入して

とおき

$$
\left.
\begin{aligned}
&X_r = Y\cos\theta + Z\sin\theta, \\
&\xi = 0, \quad \zeta\cos\theta - \eta\sin\theta = \zeta_\theta \\
&\qquad\quad \zeta\sin\theta + \eta\cos\theta = 0 \\
&\qquad\quad m\cos\theta + n\sin\theta = \sin\alpha \\
&\qquad\quad l = \cos\alpha
\end{aligned}
\right\} \cdots (1.37)
$$

であるので

$$
\left.
\begin{aligned}
X &= -p\cos\alpha - \mu\zeta_\theta\sin\alpha \\
X_r &= -p\sin\alpha + \mu\zeta_\theta\cos\theta
\end{aligned}
\right\} \cdots (1.38)
$$

それ故

$$
\left.
\begin{aligned}
X_n &= X\cos\alpha + X_r\sin\alpha = -p \\
X_s &= -X\sin\alpha + X_r\cos\alpha = \mu\zeta_\theta
\end{aligned}
\right\} \cdots (1.39)
$$

p.6の記号では $\nu X_n = \mu\ T_n$, $\nu X_s = \mu\ T_s$, $\zeta_\theta \equiv \zeta$,

(これから [illegible] 使う必要がない)

(1.33) は又 (2.13) のように書く事も出来る。

$$
\left.
\begin{aligned}
X &= -pl - \mu(\eta n - \zeta m) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} \\
Y &= -pm - \mu(\zeta l - \xi n) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial n} \\
Z &= -pn - \mu(\xi m - \eta l) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial n}
\end{aligned}
\right\} \quad (1.40)
$$

之れを (1.35) と equate して

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial n} &= \mp(\eta n - \zeta m) \\
\frac{\partial v}{\partial n} &= \mp(\zeta l - \xi n) \\
\frac{\partial w}{\partial n} &= \mp(\xi m - \eta l)
\end{aligned}
\right\} \quad (1.41)
$$

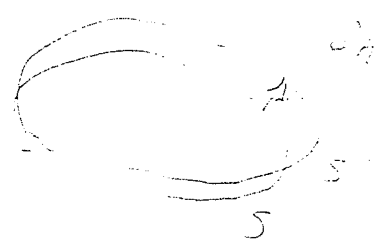
固体の S 上では $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n}\cos\alpha$.

$$\eta n - \zeta m = -\zeta_0 \sin\alpha .$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\zeta_0 \cancel{\tan\alpha}\ \sin\alpha\cos\alpha \quad \cdots \quad (1.42)$$

2. 物体の微小変形による抵抗変化

物体表面 S が滑らかに法線方向に δn だけ変形して S' になったとする。



その時の速度場を u_j'，抵抗を R' とすると (1.12) より

$$E_{D'}(u_j') = R'U \quad , \quad \cdots\cdots (2.1)$$

で

$$R' - R \equiv \delta R = \frac{1}{U}\left[E_{D'}(u_j') - E_D(u_j)\right] \quad , \cdots (2.2)$$

u_j' と u_j の差も微小で

$$u_j' - u_j = \delta u_j, \quad \tau_j' - \tau_j = \delta\tau_j, \quad (2.3)$$

となるものとしよう。

$$u_1' = -U, \quad u_2' = u_3' = 0 \quad \text{on } S', \quad (2.4)$$

さて

$$E_{D'}(u_j') - E_D(u_j) = E_D(u_j') - E_D(u_j) + E_{\Delta D}(u_j'), \quad (2.5)$$

$$(\Delta D = D' - D)$$

となり

$$E_D(u_j') - E_D(u_j) = -\iint_S \left[\sum_j (u_j'\tau_j' - u_j\tau_j)\right] dS$$

であるから (2.3) を代入して高次の項を無視すると，

$$E_D(u_j') - E_D(u_j) = -\iint_S \sum_j (\tau_j \delta u_j + u_j \delta\tau_j)\, dS$$

となり 相反定理より

$$\sum_j \iint_{S'} T_j\, \delta u_j\, dS = \sum_j \iint_{S} u_j\, \delta T_j\, dS$$

であるから

$$E_D(u_j') - E_D(u_j) = -2 \iint_{S'} \left(\sum T_j\, \delta u_j \right) dS, \quad (2.6)$$

所で

$$\delta u_j \Big|_c = u_j' - u_j \Big|_c \fallingdotseq -\frac{\partial u_j'}{\partial n}\delta n \fallingdotseq -\frac{\partial u_j}{\partial n}\delta n, \quad (2.7)$$

であり，u_j の面S内での微分は0であるから．

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = l_2 \frac{\partial u_3}{\partial n} - l_3 \frac{\partial u_2}{\partial n} \\
\zeta_2 &= l_3 \frac{\partial u_1}{\partial n} - l_1 \frac{\partial u_3}{\partial n} \\
\zeta_3 &= l_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - l_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}
\end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

となり，又 連続の定理より

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = l_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} + l_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} + l_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 \quad (2.9)$$

となるから

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial n} &= \zeta_2 l_3 - \zeta_3 l_2 \\
\frac{\partial u_2}{\partial n} &= \zeta_3 l_1 - \zeta_1 l_3 \\
\frac{\partial u_3}{\partial n} &= \zeta_1 l_2 - \zeta_2 l_1
\end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

従って

$$l_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} + l_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} + l_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0, \quad (2.11)$$

あるいは(2.7)により(δu)の法線成分は.

$$(\delta u)_n = l_1 \delta u_1 + l_2 \delta u_2 + l_3 \delta u_3 = 0, \qquad (2.12)$$

(2.7)，(2.10)から

$$\sum_j \tau_j \delta u_j = -\delta n \left[\sum_j \tau_j \frac{\partial u_j}{\partial n} \right].$$

となるが

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= -p l_1 + \left(2\frac{\partial u_1}{\partial n} + \zeta_3 l_2 - \zeta_2 l_3\right)\mu \\ \tau_2 &= -p l_2 + \left(2\frac{\partial u_2}{\partial n} + \zeta_1 l_3 - \zeta_3 l_1\right)\mu \\ \tau_3 &= -p l_3 + \left(2\frac{\partial u_3}{\partial n} + \zeta_2 l_1 - \zeta_1 l_2\right)\mu \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

であるから

(2.10)を代入すると.

$$\sum_j \tau_j \delta u_j = -\mu \delta n \left[\sum_j \zeta_j^2 - \left(\sum_j \zeta_j l_j \right)^2 \right].$$

となるが$\left(\sum \zeta_j l_j\right)$は法線方向の渦度であるが，面内で速度は0（x方向を除き）であるから0，つまり

$$\sum_j \zeta_j l_j = 0 \quad , \quad --- \qquad (2.14)$$

結局

$$\sum \tau_j \delta u_j = -\mu \delta n \sum_j \zeta_j^2 , \qquad (2.15)$$

で(2.6)は

$$E_D(u_j') - E_D(u_j) = 2\mu \iint_S \left(\sum_j \zeta_j^2 \right) \delta n \, dS, \qquad (2.16)$$

次に(2.5)右辺第3項については、連続の定理により

$$\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \gamma_{ij}^2 = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \gamma_{ij}^2 - 2\Big(\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\zeta_j^2 + 4\Big[\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big) + \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big)$$
$$+ \Big(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big)\Big],$$

となるが(Lamb)、速度の面内微分は0となるので(2.8)を導いたのと同様にして右辺第2項は消える。

それ故

$$E_{\delta D}(u_j') = \frac{\mu}{2}\sum_i\sum_j\iiint_{\delta D}\gamma_{ij}'^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= -\mu\iint_S\Big(\sum_j \zeta_j^2\Big)\delta n\,dS, \qquad \text{-- (2.17)}$$

(2.16)と合せて、

$$\therefore\quad \delta R = \mu\iint_S\Big(\sum_j \zeta_j^2\Big)\delta n\,dS, \qquad (2.18)$$

これはPironeauの結果である。

軸対称流れでは明らかに

$$\delta R = 2\pi\mu\int_C r\zeta^2\,\delta n\,ds, \qquad \text{-- (2.19)}$$

3. 最小抵抗問題

ストークス流れにおいて抵抗が最小となる物体形状を求める問題を考えよう。

抵抗が最小の物体があったとすると、それを僅かに変形しても抵抗の変化分は0となるだろう。

それ故(2.18)によってそのような物体では

$$\iint_S \Big(\sum_j \zeta_j^2\Big)\delta n\, dS = 0, \quad \cdots \quad (3.1)$$

$\sum_j \zeta_j^2$ は常に正であるから、ζ_1, ζ_2 は0の方がより小さい。

それは回転体であればよく、従って(2.19)、つまり

$$\int_C r\zeta^2 \delta n\, ds = 0, \quad \cdots \quad (3.2)$$

のような回転体のまわりの軸対称流れがよい。
前後対称の

副条件として体積が与えられるとすれば

$$\left.\begin{aligned} V &= \pi\int_C r^2 dx = \text{Const.} \\ \delta V &= 2\pi\int_C r\,\delta n\, ds = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

それ故(3.2)は

$$\zeta^2 = \text{Const.}, \quad \cdots \quad (3.4)$$

とすれば満足される。

これが Pironneau の結論である。

実用上は体積と長さ(あるいは幅)が与えられる場合を考えておくべきであろうが直接この条件を入れるのは数学的にはなじまないので次の2次モーメントを導入しそれが与えられるとしよう。

$$\left.\begin{aligned} I &= \pi\int_c r^2 x^2 dx = \mathrm{Const.} \\ \delta I &= 2\pi\int_c x^2 r\,\delta n\, ds = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

この時 (3.2) を(3.3)と共に満足するには、a, b を定数として

$$r^2 = a + b x^2 \quad ; \quad \cdots (3.6)$$

であればよい。

この時の抵抗は (1.12) で与えられるが、τ_f の次元は

$$\tau_f = \left[\frac{\mu U}{L}\right] \quad --- (3.7)$$

であるから (1.12) より抵抗の次元は

$$R = [\mu L U] \quad , \quad --- (3.8)$$

抵抗係数として

$$C_R = \frac{R}{\mu L U} \quad , \quad --- (3.9)$$

と定義すると、これは Reynolds 数に関係しない

Piboneau 等は (3.2), (3.3) の条件だけで黄金分割法により最小抵抗形状を求めている。

しかし この2つの条件だけでは 変形(δn)の選択の自由度が多すぎて あまり得策ではない。

ここでは δn だけ変形した時の応力の変化 $\delta\tau$ を求めて (3.2)の条件から δn をまず近似的に求め、その量だけ変形して行く方法を逐次進めて形状を求める方法を提案する。

さて、δu_i の境界条件は (2.7) (2.10), (2.12) 等から 回転体では

$$\left.\begin{aligned}(\delta u)_n &= 0\\ (\delta u)_s &= -\zeta_0(\delta n)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3.10)$$

$-\zeta_0$ は最初に与えられた物体表面の渦度とする。

次に (3.4) 又は一般的に (3.6) を満足させるためには どれだけ $\delta\zeta$ ($\zeta = \zeta_0 + \delta\zeta$) だけ変化すればよいかと言うと、

詳細を省略して (3.6) より

$$\delta\zeta \fallingdotseq \left(\frac{a+bx^2}{2\zeta_0} - \frac{\zeta_0}{2}\right), \quad \cdots (3.11)$$

(3.10) 第1式と(3.11)を連立させて δt_j を求め
それを(3.10)第2式右辺に入れて δu_j を計算し
(3.3), (3.5) の2式を援用して $a, b, \delta u$ が
求まる。
元の形を δu だけ変形させて計算を繰返し
所定の精度で計算を止める。

以下 (3.5), (3.4) を解く問題を
問題 I ; 排水量一定
(3.5) (3.6) を
問題 II ; 排水量とその長さ方向2次モーメントが与えられる。
と名づけよう。

4. 計算上の問題点

排水量を与えて問題Iを解くとその形状は定まる。
（長さおよび）
その時 C_R はレイノルズ数に関係しないから

$$\mathrm{Min}[C_R] = func.\left(\nabla/l^3\right) \qquad , \quad - - - \cdot\cdot \quad (4.1)$$

と考えられ、排水量をかえてもこれは無次元値故変らぬと考えられる。

つまり最小抵抗形状はレイノルズ数によらないと考えられるので（∇/l^3）もまた不変と考えられる。

そこで逆に長さが与えられるとすると最適の排水量がある事になる。*

それ故長さと排水量が同時に与えられると問題Iではとけず、その一つの解法が問題IIであると言う事になる。

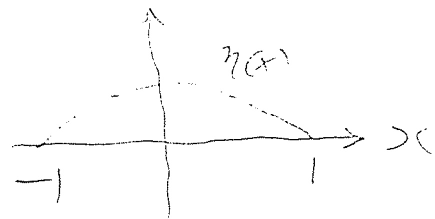
*) 抵抗は $R = \mu L U C_R$ で与えられ、ここでは $\mathrm{Min}(R)$ を計算するので、長さを一定とした時の $\mathrm{Min}(R)$ は少し異なって来る事に注意。

計算上も長さ一定として始める方が具合がよい。

そこで最初に与える形状として例えば

$$\eta(x) = \frac{m}{4}(1-x^4), \qquad (4.2)$$

$$\left|\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_{x=1} = m$$



のようにとると両端における半頂角は $\tan^{-1} m$ となる。

問題Iで半頂角は60°である事が証明されている。
また前後対称となる事は自明である。
そこで前端での頂角を定め、それが不変つまり前端の要素上の $\delta\eta=0$ とすると、これで条件を2つ追加した事となり、問題Iではもう解けず問題IIとなり、排水量2次モーメントも指定出来ない。

即ち前端の頂角を与え、前端の要素上の $\delta\eta$ を0として問題IIを解くと形状が求まり、その内 $k=0$ は排水量最小となるはずである。

附録A 核関数

$$P_j(P,Q) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{R}\right), \quad R^2 = \sum_{j=1}^{3}(x_j - x_j')^2, \qquad (A\cdot 1)$$

$$P \equiv (x_1, x_2, x_3), \quad Q \equiv (x_1', x_2', x_3')$$

$$U_j^{(k)} = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2 R}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\delta_{kj}}{4\pi R}, \qquad (A\cdot 2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&4\pi U_1^{(1)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{xx} - \frac{1}{R}, \\
&4\pi U_2^{(1)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{xy}, \quad 4\pi U_3^{(1)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{xz} \\
&4\pi U_1^{(2)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{yx}, \quad 4\pi U_2^{(2)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{yy} - \frac{1}{R}, \\
&4\pi U_3^{(2)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{yz}, \\
&4\pi U_1^{(3)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{zx}, \quad 4\pi U_2^{(3)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{zy} \\
&4\pi U_3^{(3)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{zz} - \frac{1}{R}
\end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{\mu} T_1^{(1)} = 2\frac{\partial}{\partial n}U_1^{(1)} - \left(\frac{2}{R}\right)_x l_1 - \left(\frac{1}{R}\right)_n \\
&\frac{4\pi}{\mu} T_2^{(1)} = 2\frac{\partial}{\partial n}U_2^{(1)} - \left(\frac{1}{R}\right)_x l_2 - \left(\frac{1}{R}\right)_y l_1 \\
&\frac{4\pi}{\mu} T_3^{(1)} = 2\frac{\partial}{\partial n}U_3^{(1)} - \left(\frac{1}{R}\right)_x l_3 - \left(\frac{1}{R}\right)_z l_1 \\
&\quad'' \quad T_1^{(2)} = 2\frac{\partial}{\partial n}U_1^{(2)} - \left(\frac{1}{R}\right)_y l_1 - \left(\frac{1}{R}\right)_x l_2 \\
&\quad'' \quad T_2^{(2)} = 2\frac{\partial}{\partial n}U_2^{(2)} - \left(\frac{2}{R}\right)_y l_2 - \left(\frac{1}{R}\right)_n \\
&\quad'' \quad T_3^{(2)} = 2\frac{\partial}{\partial n}U_3^{(2)} - \left(\frac{1}{R}\right)_y l_3 - \left(\frac{1}{R}\right)_z l_2 \\
&\quad'' \quad T_1^{(3)} = 2\frac{\partial}{\partial n}U_1^{(3)} - \left(\frac{1}{R}\right)_z l_1 - \left(\frac{1}{R}\right)_x l_3 \\
&\quad'' \quad T_2^{(3)} = 2\frac{\partial}{\partial n}U_2^{(3)} - \left(\frac{1}{R}\right)_z l_2 - \left(\frac{1}{R}\right)_y l_3 \\
&\quad'' \quad T_3^{(3)} = 2\frac{\partial}{\partial n}U_3^{(3)} - \left(\frac{2}{R}\right)_z l_3 - \left(\frac{1}{R}\right)_n
\end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot 4)$$

$$\iint_S T_j^{(k)}\, dS = \mu \quad , \qquad \cdots \quad (A.5)$$

$$\left.\begin{aligned}
&Z_j^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_2} U_j^{(3)} - \frac{\partial}{\partial x_3} U_j^{(2)} , \quad Z_j^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x_3} U_j^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x_1} U_j^{(3)} , \\
&\qquad Z_j^{(3)} = \frac{\partial}{\partial x_1} U_j^{(2)} - \frac{\partial}{\partial x_2} U_j^{(1)} \\
&Z_1^{(1)} = 0 , \quad Z_2^{(1)} = \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_z , \quad Z_3^{(1)} = -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y , \\
&Z_1^{(2)} = -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_z , \quad Z_2^{(2)} = 0 , \quad Z_3^{(2)} = \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_x , \\
&Z_1^{(3)} = \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y , \quad Z_2^{(3)} = -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_x , \quad Z_3^{(3)} = 0
\end{aligned}\right\} (A\text{-}6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&U_2^{(1)} = U_1^{(2)} , \quad U_3^{(1)} = U_1^{(3)} , \quad U_3^{(2)} = U_2^{(3)} , \\
&T_2^{(1)} = T_1^{(2)} , \quad T_3^{(1)} = T_1^{(3)} , \quad T_3^{(2)} = T_2^{(3)} ,
\end{aligned}\right\} (A\text{-}7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&Z_1^{(1)} = Z_2^{(2)} = Z_3^{(3)} = 0 \\
&Z_2^{(1)} = -Z_1^{(2)} , \quad Z_3^{(1)} = -Z_1^{(3)} , \quad Z_3^{(2)} = -Z_2^{(3)}
\end{aligned}\right\} (A\text{-}8)$$

$$\cos\theta \frac{\partial}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} , \quad -\sin\theta \frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

cos $\quad \dfrac{\partial}{\partial y} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} ,$

sin $\quad \dfrac{\partial}{\partial z} = \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$

$$V_1^{(1)} = \cancel{\ast}\int_0^{2\pi} U_1^{(1)}\, d\theta = \frac{\cancel{\ast}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{R}{2}\right)_{xx} - \frac{1}{R}\right] d\theta$$

$$V_r^{(1)} = \cancel{\ast}\int_0^{2\pi}\left(U_2^{(1)}\cos\theta + U_3^{(1)}\sin\theta\right) d\theta = \frac{\cancel{\ast}}{8\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) d\theta$$

$$R^2 = (x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta-\theta'),$$

$$V_1^{(r)} = \frac{-\cancel{\ast}}{8\pi}\frac{\partial}{\partial r'}\int_0^{2\pi}\frac{\partial R}{\partial x}\, d\theta$$

$$V_r^{(r)} = \frac{\cancel{\ast}\cos\theta'}{8\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi}(R)_y\, d\theta + \frac{\cancel{\ast}\sin\theta'}{8\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi}(R)_z\, d\theta$$

$$- \frac{\cancel{\ast}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta-\theta')}{R}\, d\theta$$

$$= -\frac{\cancel{\ast}}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial r\partial r'}\int_0^{2\pi} R\, d\theta - \frac{\cancel{\ast}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta-\theta')}{R}\, d\theta,$$

$$Y_1^{(1)} = 0, \quad Y_r^{(1)} = 0$$

$$Y_1^{(r)} = 0, \quad Y_r^{(r)} = 0$$

$$Y_1^{(\theta)} = -\frac{\cancel{\ast}}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r'}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{R},$$

$$Y_r^{(\theta)} = -\frac{\cancel{\ast}}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{R}\right)_x\cos(\theta-\theta')\, d\theta,$$

$$S' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{R},$$

$$S^* = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} R\, d\theta,$$

$$P = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{R}\, d\theta$$

$$V_1^{(1)} = \frac{1}{2} S^*_{xx} - S$$

$$V_r^{(1)} = \frac{1}{2} S^*_{xr}, \quad V_1^{(r)} = \frac{1}{2} S_{x'r'} = -\frac{1}{2} S^*_{r'x}$$

$$V_r^{(r)} = -\frac{1}{2} S^*_{r'r} - P$$

$$Y_1^{(\theta)} = -S_{r'}, \quad Y_r^{(\theta)} = -P_x = P_{x'}$$

$\cos\alpha'$ $$V_1^{(1)}\cos\alpha + V_r^{(1)}\sin\alpha = \frac{1}{2} S^*_{xn} - S\cos\alpha$$

$\sin\alpha'$ $$+V_1^{(r)}\cos\alpha + V_r^{(r)}\sin\alpha = -\frac{1}{2} S^*_{r'n} - P\sin\alpha$$

$\cos\alpha$ $$-V_1^{(1)}\sin\alpha + V_r^{(1)}\cos\alpha = \frac{1}{2} S^*_{xs} + S\sin\alpha$$

$$-V_1^{(r)}\sin\alpha + V_r^{(r)}\cos\alpha = -\frac{1}{2} S^*_{r's} - P\cos\alpha$$

$$U_n^{(n)} = -\frac{1}{2} S^*_{nn'} - S\cos\alpha\cos\alpha' - P\sin\alpha\sin\alpha'$$

$$U_s^{(n)} = -\frac{1}{2} S^*_{sn'} + S\sin\alpha\cos\alpha' - P\cos\alpha\sin\alpha'$$

$$U_n^{(s)} = -\frac{1}{2} S^*_{ns'} + S\cos\alpha\sin\alpha' - P\sin\alpha\cos\alpha'$$

$$U_s^{(s)} = -\frac{1}{2} S^*_{ss'} - S\sin\alpha\sin\alpha' - P\cos\alpha\cos\alpha'$$

$$R_x = \frac{x}{R}, \quad R_y = \frac{y}{R}, \quad R_z = \frac{z}{R}$$

$$R_{xx} = \frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} = \frac{y^2+z^2}{R^3}, \quad R_{xy} = -\frac{xy}{R^3}, \quad R_{xz} = -\frac{xz}{R^3}$$

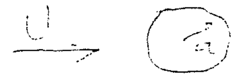
$$R_{yy} = \frac{z^2+x^2}{R^3}, \quad R_{yz} = -\frac{yz}{R^3}, \quad R_{zz} = \frac{x^2+y^2}{R^3}$$

$$\Delta R = \frac{2}{R}$$

$$4\pi U_1^{(1)} = \frac{y^2+z^2}{2R^3} - \frac{1}{R} = \frac{-1}{2R} - \frac{x^2}{2R^3}$$

附録B　球の解（友近晋"流体力学" p.313）

半径 a，流速 U の球のまわりの流れ　一様流れ分を除いて



$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{3}{4}\frac{aU}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)x^2 + \frac{U}{4}\left(3\frac{a}{r}+\frac{a^3}{r^3}\right), \\
u_2 &= \frac{3}{4}\frac{aU}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)xy, \\
u_3 &= \frac{3}{4}\frac{aU}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)xz, \\
p &= \frac{3}{2}\mu a U\frac{x}{r^3} + p_0,
\end{aligned}
\right\} \quad (B.1)
$$

$$
\zeta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\zeta_2 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{3aU}{4}\left[\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right]_r \frac{x^2 z}{r} + \frac{U}{4}\left[-3\frac{a}{r^2}-\frac{3a^3}{r^4}\right]\frac{z}{r} \\
&\quad - \frac{3}{4}aU\left[\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right]_r \frac{x^2 z}{r} - \frac{3aU}{4r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)z \\
&= -\frac{3}{2}aU\frac{z}{r^3} \\
\zeta_3 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{3aU}{4r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)y + \frac{U}{4}\left(3\frac{a}{r^2}+\frac{3a^3}{r^4}\right)\frac{y}{r} \\
&= \frac{3}{2}aU\frac{y}{r^3}
\end{aligned}
\right\} \quad (B.2)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\tau_1 &= -\frac{p_0 x}{r} - \frac{9}{2}\mu aU\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{x^2}{r^4} - \frac{3}{2}\mu\frac{a^3 U}{r^4} \\
\tau_2 &= -p_0\frac{y}{r} - \frac{9}{2}\mu aU\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{xy}{r^4} \\
\tau_3 &= -p_0\frac{z}{r} - \frac{9}{2}\mu aU\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\frac{xz}{r^4}
\end{aligned}
\right\} \quad (B.3)
$$

$r = a$ とおくと

$$
\left.
\begin{aligned}
&\tau_1 = -p_0\frac{x}{a} - \frac{3}{2}\mu U/a, \\
&\tau_2 = -p_0\frac{y}{a}, \quad \tau_3 = -p_0\frac{z}{a},
\end{aligned}
\right\} \quad (B.4)
$$

$$
R = 6\pi\mu a U, \quad (B.5)
$$

附録C 弾性論との関係

静的弾性論における変位を u_j とおき、これを Stokes 流れの速度に対応させ ポアソン比 ν

$\nu = \frac{1}{2}$, 剛性率 $G = \mu$ (流体の粘性係数)

と対応させると 境界力まで一致する。

つまり $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$,

体積膨張 $\gamma = \sum_i e_{ii}$

境界力 $T_i/G = 2\sum_j e_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial n} + \frac{\nu}{1-2\nu}\gamma\frac{\partial x_i}{\partial n}$,

この最後の項は $\gamma = 0$ (連続方程式) ため、

$$\sigma = \sum_i f_{ii} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\gamma ,$$

$$\left(f_{ij} = 2e_{ij} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\gamma\delta_{ij} \right)$$

となり 書き直すと

$$T_i/G = 2\sum e_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial n} + \frac{\nu}{2(1+\nu)}\sigma\frac{\partial x_i}{\partial n} ,$$

となり

$$G\sigma = -3p$$

と圧力を定義すると 完全に一致する。

附録D　楕円積分

$$S^{*} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} R\, d\theta$$

$$S = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R}, \qquad R^2 = (x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta, \qquad (D.1)$$

$$P = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R}\cos\theta$$

今

$$r_1^2 = (x-x')^2 + (r-r')^2,$$
$$r_2^2 = (x-x')^2 + (r+r')^2, \qquad (D.2)$$
$$k^2 = \frac{4rr'}{r_2^2},\quad k'^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2,\quad k'^2 = 1-k^2,$$

とおくと、

$$R^2 = r_2^2\left(1 - k^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$S^{*} = \frac{r_2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{r_2}{\pi}E(k),$$

$$S = \frac{1}{\pi r_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{K(k)}{\pi r_2}, \qquad (D.3)$$

$$P = \frac{1}{\pi r_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-2\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\pi k^2 r_2}\left[(k^2-2)K(k) + 2E(k)\right],$$

$$P = \frac{r}{r'}S - \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r}S^{*}, \quad ---- \qquad (D.4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r}{r'}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{r'}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial r}S^{*},$$

$$\left.\begin{aligned} k\frac{dK}{dk} &= \frac{E}{k'^2} - K \\ k\frac{dE}{dk} &= E - K \end{aligned}\right\} \quad (D.5)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x} &= -\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x'} = -\frac{x}{r_2^2}, \\ \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial r} &= \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial r'} = \frac{1}{2r} - \frac{r+r'}{r_2^2}, \end{aligned}\right\} \quad (D.6)$$

なお以下で $x'=0$ として計算するが、必要ならば x を $x-x'$ に戻せばよい。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}S^* &= \frac{x}{\pi r_2}K, \\ \frac{\partial}{\partial r}S^* &= \frac{r_2}{2\pi r}E - \left(\frac{x^2+r'^2-r^2}{\pi 2 r r_2}\right)K, \end{aligned}\right\} \quad (D.7)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}S^* &= \frac{K}{\pi r_2} - \frac{x^2}{\pi r_2 r_1^2}E, \\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial r}S^* &= -\frac{x}{2\pi r r_2}K + \frac{x(x^2+r'^2-r^2)}{2\pi r r_2 r_1^2}E, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}S^* &= \frac{(x^2+r^2+r'^2)}{2\pi r_2 r^2}K + \left(\frac{2x^2r^2 - r_1^2 r_2^2}{2\pi r^2 r_2 r_1^2}\right)E, \end{aligned}\right\} \quad (D.8)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}S &= -\frac{K}{2\pi r r_2} + \frac{(x^2+r'^2-r^2)}{2\pi r r_2 r_1^2}E, \\ \frac{\partial S}{\partial x} &= -\frac{x}{\pi r_2 r_1^2}E, \end{aligned}\right\} \quad (D.9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r}{r'}\left(-\frac{x}{\pi r_2 r_1^2}E\right) - \frac{1}{r'}\left[-\frac{xK}{2\pi r r_2} + \frac{x(x^2+r^2+r'^2)}{2\pi r r_2 r_1^2}E\right]$$

$$= \frac{x}{2\pi r r' r_2}K - \frac{x(x^2+r^2+r'^2)}{2\pi r r' r_2 r_1^2}E \quad , \quad \cdots \text{(D.10)}$$

$x \to x'$, $r \to r'$ では

$$\left.\begin{aligned} & k \to 1 \quad , \quad k' = \frac{r_1}{r_2} \to 0 \\ \text{で} \quad & K(k) \xrightarrow[k \to 1]{} 2\log 2 - \log\frac{r_1}{r_2} \, , \\ & E(k) \to 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(D.11)}$$

その他 $\quad S^*_{xx} \longrightarrow -\frac{x}{2\pi r_2 r}\left[2\log 2r_2 - \log r_1\right] - \frac{x^2}{\pi r_2 r_1^2}$,

なお $\quad \frac{x^2}{r_1^2} = \frac{x^2}{x^2+(r-r')^2}$ だから segment の上では一定値をとる

結局

$$\left.\begin{aligned} S^*_{xx} &\Rightarrow -\frac{x^2}{\pi r_2 r_1^2} \, , \\ S^*_{rx} &\Rightarrow -\frac{x}{2\pi r r_2}(2\log 2r_2 - \log r_1) + \frac{x(x^2+r'^2-r^2)}{2\pi r r_2 r_1^2} \\ &\longrightarrow \frac{x}{2\pi r(r'-r)} \\ S^*_{rr} &\Rightarrow \frac{x^2+r^2+r'^2}{2\pi r_2 r^2}(2\log 2r_2 - \log r_1) + \frac{x^2}{\pi r_2 r_1^2} - \frac{r_2}{2\pi r^2} \\ &\Rightarrow \frac{r^2+r'^2}{2\pi r_2 r^2}(2\log 2r_2 - \log r_1) - \frac{r+r'}{2\pi r} \, , \end{aligned}\right\} \text{(D.12)}$$

$$\left.\begin{aligned} S_r &\longrightarrow -\frac{1}{2\pi r r_2}(2\log 2r_2 - \log r_1) + \frac{1}{2\pi r(r'-r)} \, , \\ P_x &\longrightarrow -\frac{(r^2+r'^2)x}{2\pi r r' r_2 r_1^2} \xrightarrow[r=r']{} -\frac{1}{2\pi r}\frac{x}{r_1^2} \end{aligned}\right\} \text{(D.13)}$$

結局 原点において

S^*_{xx} , S^*_{rx} は有限確定値をとる。

$$\left[S^*_{rr} + \frac{1}{2\pi r}\log r_1\right]$$

又

$$\left[S_r - \frac{1}{4\pi r^2}\log r_1 - \frac{1}{2\pi r(r^2-r)}\right]$$

$$\left[P_x + \frac{x}{2\pi r r_1^2}\right]$$

も有限確定

そこで

$$\left.\begin{aligned}
S^*_{rr} + \frac{1}{2\pi r}\log r_1 &= T^*_{rr} \\
S_r - \frac{1}{4\pi r^2}\log r_1 - \frac{1}{2\pi r(r^2-r)} &= T_r \\
P_x + \frac{x}{2\pi r r_1^2} &= T_x
\end{aligned}\right\}$$

とおくと 原点では

$$\left.\begin{aligned}
S^*_{xx} &= -\frac{x^2}{2\pi r r_1^2} \\
S^*_{xr} &= \frac{x}{2\pi r(r^2-r)} \\
T^*_{rr} &= \frac{1}{\pi r}\log(4r) - \frac{1}{\pi} \\
T_r &= -\frac{1}{\pi r^2}\log(4r) \\
T_x &= 0
\end{aligned}\right\}$$