V　M-98

No.

Date 58.5.25

~~増改 6.8~~

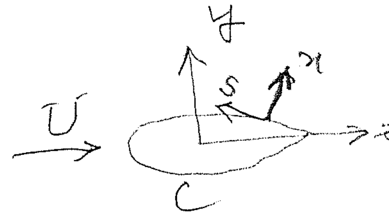
2次元オセーン流れについて

別所

内容

1. 運動方程式, 境界条件, 境界力

オセーン流れの方程式は,



$$
\left.\begin{aligned}
U\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u \\
U\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v
\end{aligned}\right\} \quad (1.1)
$$

連続の方程式は

$$
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \qquad (1.2)
$$

(1.1)の方程式は自己随伴ではないのでその随伴方程式を導入する。

$$
\left.\begin{aligned}
-U\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2 \tilde{u} \\
-U\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu\nabla^2 \tilde{v}
\end{aligned}\right\} \quad (1.3)
$$

$$
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 , \quad \cdots \quad (1.4)
$$

これは結局の所一様流れの方向を逆にしただけの違いであるから所謂逆流れで,以下(~)印で区別する事にする。

境界条件は

$$
u = -U , \quad v = 0 \quad \text{on } C , \qquad (1.5)
$$

逆流れでは $\tilde{u} = U , \ \tilde{v} = 0 \ \text{on } C , \qquad (1.6)$

である。

境界Cに働く力は、

$$X = \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n}$$

$$Y = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + \left(-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial n} \qquad (1.7)$$

(逆流れでは ～印をつければその通り)

渦度

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (1.8)$$

を導入して上式を変形すると

$$X = -p\frac{\partial x}{\partial n} + \mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial n}$$

$$Y = -p\frac{\partial y}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial x}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial n} \qquad (1.9)$$

ところで (1.5) から C上では

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n} \qquad (1.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}$$

それ故

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}$$

で連続の方程式から

$$\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n} = 0$$

それ故

$$\zeta\frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial n}, \quad \zeta\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u = -\zeta\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}.$$

(1.9) に代入すると

$$\left.\begin{aligned} X &= -p\frac{\partial x}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n} \\ Y &= -p\frac{\partial y}{\partial n} + \mu\zeta\frac{\partial x}{\partial n} \end{aligned}\right\} \cdots (1.12)$$

これを法線，切線成分にわけると．

$$\left.\begin{aligned} X_n &= X\frac{\partial x}{\partial n} + Y\frac{\partial y}{\partial n} = -p, \\ X_s &= X\frac{\partial x}{\partial s} + Y\frac{\partial y}{\partial s} = -X\frac{\partial y}{\partial n} + Y\frac{\partial x}{\partial n} = \mu\zeta, \end{aligned}\right\} (1.13)$$

これらの関係は逆流れについても全く同様である。

2. 速度場の表現

附録Aの可逆定理を、附Bの核関数について適用すると速度場は

$$u(Q) = \frac{-U}{\mu}\int_C \Big[X\tilde{U}^{(1)}(P,Q) + Y\tilde{V}^{(1)}(P,Q) - u\tilde{X}^{(1)} - v\tilde{Y}^{(1)} - \rho U\{u\tilde{U}^{(1)} + v\tilde{V}^{(1)}\}\frac{\partial x}{\partial n}\Big] ds_P,$$

$$v(Q) = \frac{-U}{\mu}\int_C \Big[X\tilde{U}^{(2)}(P,Q) + Y\tilde{V}^{(2)}(P,Q) - u\tilde{X}^{(2)} - v\tilde{Y}^{(2)} - \rho U\{u\tilde{U}^{(2)} + v\tilde{V}^{(2)}\}\frac{\partial x}{\partial n}\Big] ds_P, \quad (2.1)$$

ここに $P \equiv (x, y)$, $Q \equiv (x', y')$

として C の内部領域の速度場を考えると、内部でも(2.1)と同じ表現が成立ち、その表現で Q を外部にもって来ると 0 であるから、(2.1)からそれを差引き、境界条件を考慮し、またこの内部問題は自明的に $u=-U$, $v=0$ であって力は生じないから結局

$$u(Q) = \frac{-U}{\mu}\int_C \Big[X\hat{U}^{(1)}(P,Q) + Y\hat{V}^{(1)}(P,Q)\Big] ds(P),$$

$$v(Q) = \frac{-U}{\mu}\int_C \Big[X\hat{U}^{(2)}(P,Q) + Y\hat{V}^{(2)}(P,Q)\Big] ds(P), \quad (2.2)$$

なる表現をうる。

さらに核関数の対称性を考慮すれば

$$u(Q)=\frac{-U}{\mu}\int_C\left[X\,U^{(1)}(Q,P)+Y\,V^{(1)}(Q,P)\right]ds(P),$$
$$v(Q)=\frac{-U}{\mu}\int_C\left[X\,U^{(2)}(Q,P)+Y\,V^{(2)}(Q,P)\right]ds(P),\qquad (2.3)$$

とも書ける。

今(1.12)を上式に代入し

$$\left.\begin{aligned}
U^{(1)}(Q,P)\frac{\partial x}{\partial n_P}+V^{(1)}(Q,P)\frac{\partial y}{\partial n_P}&=U_n^{(1)}(Q,P),\\
-U^{(1)}(Q,P)\frac{\partial y}{\partial n}+V^{(1)}(Q,P)\frac{\partial x}{\partial n}&=U_s^{(1)}(Q,P),\\
U^{(2)}(Q,P)\frac{\partial x}{\partial n}+V^{(2)}(Q,P)\frac{\partial y}{\partial n}&=U_n^{(2)}(Q,P)\\
-U^{(2)}(Q,P)\frac{\partial y}{\partial n}+V^{(2)}(Q,P)\frac{\partial x}{\partial n}&=U_s^{(2)}(Q,P)
\end{aligned}\right\}\quad(2.4)$$

と定義し直すと

$$\left.\begin{aligned}
u(Q)&=\frac{U}{\mu}\int_C\left[p\,U_n^{(1)}(Q,P)-\mu\varsigma\,U_s^{(1)}(Q,P)\right]ds_P\\
v(Q)&=\frac{+U}{\mu}\int_C\left[p\,U_n^{(2)}(Q,P)-\mu\varsigma\,U_s^{(2)}(Q,P)\right]ds_P
\end{aligned}\right\}\quad(2.5)$$

を得る。

さらに u,v を法線切線成分に変換して

$$\left.\begin{aligned}
u&=v_n\frac{\partial x}{\partial n}-v_s\frac{\partial y}{\partial n}\\
v&=v_n\frac{\partial y}{\partial n}+v_s\frac{\partial x}{\partial n}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.6)$$

$$\begin{aligned}
v_n&=u\frac{\partial x}{\partial n}+v\frac{\partial y}{\partial n}\\
v_s&=-u\frac{\partial y}{\partial n}+v\frac{\partial x}{\partial n}
\end{aligned}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
V_n^{(1)}(Q,P) &= U_n^{(1)}(Q,P)\frac{\partial x}{\partial n_Q} + U_n^{(2)}\frac{\partial y}{\partial n_Q}\\
V_s^{(1)}(Q,P) &= U_s^{(1)}(Q,P)\frac{\partial x}{\partial n_Q} + U_s^{(2)}\frac{\partial y}{\partial n_Q}\\
V_n^{(2)}(Q,P) &= -U_n^{(1)}(Q,P)\frac{\partial y}{\partial n_Q} + U_n^{(2)}\frac{\partial x}{\partial n_Q}\\
V_s^{(2)}(Q,P) &= -U_s^{(1)}\frac{\partial y}{\partial n_Q} + U_s^{(2)}\frac{\partial x}{\partial n_Q}
\end{aligned}
\right\} \quad (2.7)
$$

(2.4)を代入すると． $\frac{\partial x}{\partial n_P} = \cos\alpha$, $\frac{\partial y}{\partial n_P} = \sin\alpha$, $\frac{\partial x}{\partial n_Q} = \cos\alpha'$, $\frac{\partial y}{\partial n_Q} = \sin\alpha'$

とおいて

$$
\left.
\begin{aligned}
V_n^{(1)}(Q,P) &= U^{(1)}(Q,P)\cos\alpha\cos\alpha' + V^{(1)}(Q,P)\sin(\alpha+\alpha')\\
&\quad + V^{(2)}(Q,P)\sin\alpha\sin\alpha',\\
V_s^{(1)}(Q,P) &= -U^{(1)}(Q,P)\sin\alpha\cos\alpha' + V^{(1)}(Q,P)\cos(\alpha+\alpha')\\
&\quad + V^{(2)}(Q,P)\cos\alpha\sin\alpha',\\
V_n^{(2)}(Q,P) &= -U^{(1)}(Q,P)\cos\alpha\sin\alpha' + V^{(1)}(Q,P)\cos(\alpha+\alpha')\\
&\quad + V^{(2)}(Q,P)\sin\alpha\cos\alpha',\\
V_s^{(2)}(Q,P) &= U^{(1)}(Q,P)\sin\alpha\sin\alpha' - V^{(1)}(Q,P)\sin(\alpha+\alpha')\\
&\quad + V^{(2)}(Q,P)\cos\alpha\cos\alpha',
\end{aligned}
\right\} \quad (2.8)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
v_n(Q) &= \frac{+U}{\mu}\int_C \left[p V_n^{(1)}(Q,P) - \mu\zeta V_s^{(1)}(Q,P)\right] ds_P,\\
v_s(Q) &= +\frac{U}{\mu}\int_C \left[p V_n^{(2)}(Q,P) - \mu\zeta V_s^{(2)}(Q,P)\right] ds_P.
\end{aligned}
\right\} \quad (2.9)
$$

3. 漸近的性質（速度場の）

まずレイノルズ数が充分小さいとし，(B.6)の近似を適用すると(B.8)のストークス核を使って．(2.3)は

$$
\left.
\begin{aligned}
u(Q) &\fallingdotseq -\frac{U}{\mu}\int_C \left[X_s U^{(1)}(Q,P) + Y_s V^{(1)}(Q,P)\right] ds_P \\
&\quad - \frac{U\left(1-\log\frac{\gamma k}{2}\right)}{4\pi\mu}\int_C X\, ds, \\
v(Q) &\fallingdotseq -\frac{U}{\mu}\int_C \left[X_s V^{(1)}(Q,P) + Y_s V^{(2)}(Q,P)\right] ds \\
&\quad + \frac{U\log\frac{\gamma k}{2}}{4\pi\mu}\int_C Y\, ds,
\end{aligned}
\right\} \quad (3.1)
$$

夫々右辺第1項はストークス流れの方程式を満たすが，よく知られているように2次元ストークス流れでは抗力は存在しない。（エネルギー散逸が無限大となる）

しかしこの形から見れば近場ではオセーン流れと右辺第2項の定数分が異なるだけである。

それ故今(3.1)の右辺第2項のない解，今はこれをストークス解とよぼう，を u^s, v^s とすると(3.1)の解との関係は次のようになる。

ストークス解の境界積分方程式は

$$-U = \frac{-U}{\mu}\int_c \left[X^s{}_s U^{(1)} + Y^s{}_s V^{(1)}\right] ds ,$$
$$0 = \frac{-U}{\mu}\int_c \left[X^s{}_s U^{(2)} + Y^s{}_s V^{(2)}\right] ds , \quad \cdots (3.2)$$

この解 X^s, Y^s がわかれば (3.1) の境界方程式は

今はなに

$$\int_c X ds = D , \quad \int_c Y ds = 0 , \quad \cdots (3.3)$$

とおくと、

$$-U + \frac{(1-l_g\frac{\gamma k}{2})}{4\pi\mu} DU = \frac{-U}{\mu}\int_c \left[X_s U^{(1)} + Y_s V^{(1)}\right] ds ,$$
$$0 = \frac{-U}{\mu}\int_c \left[X_s U^{(2)} + Y_s V^{(2)}\right] ds , \quad (3.4)$$

であるから

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X^s \\ Y^s \end{Bmatrix}\left[1 + \frac{(1-l_g\frac{\gamma k}{2})}{4\pi\mu} D\right] , \quad (\quad)$$

となり (3.3) より

$$\int_c X^s ds = D^s , \quad \cdots (3.5)$$

とおくと

$$D = D^s \left[1 + \frac{1-l_g\frac{\gamma k}{2}}{4\pi\mu} D\right]$$

なら ?

$$D = \frac{D_s}{1 + \frac{1-l_g\frac{\gamma k}{2}}{4\pi\mu} D_s} , \quad (3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \frac{D}{D^s}\begin{Bmatrix} X^s \\ Y^s \end{Bmatrix} ,$$

充分遠方では (B・8) を代入し，又 (B・8) 右辺第2項は無視し，(3・3) を代入すると

$$\left.\begin{aligned} u(Q) &\fallingdotseq \frac{-D}{4\pi\mu}\left(1+\frac{x'}{r'}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2kr'}}\,e^{-k(r'-x')}, \\ v(Q) &\fallingdotseq \frac{+D}{4\pi\mu}\left(\frac{y'}{r'}+1\right)\sqrt{\frac{\pi}{2kr'}}\,e^{-k(r'-x')}, \end{aligned}\right\} \quad (3・7)$$

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2},$$

一方レイノルズ数が充分小さいとして (3・1) で $R\to\infty$ とすると (B・6) により

$$\left.\begin{aligned} u(Q) &\fallingdotseq +\frac{U}{\mu}D\left[\log r' - \frac{x'^2}{r'^2} + \log\frac{\gamma k}{2}\right], \\ v(Q) &\fallingdotseq -\frac{U}{\mu}D\,\frac{x'y'}{r'^2}, \end{aligned}\right\} \quad (3・8)$$

(3・6) において $D>0$ と考えられるから $D_s<0$ となる。

4. 順流れと逆流れの関係

順流れと逆流れでは (A.6) により抗力は等しい

$$
\left.
\begin{aligned}
&D = \tilde{D} \\
&D = \int_C X\,ds, \quad \tilde{D} = -\int_C \tilde{X}\,ds,
\end{aligned}
\right\} \quad (4.1)
$$

これは前後非対称でも成立つ。

もし前後対称ならば物理的に明らかに

$$
\left.
\begin{aligned}
u(x,y) &= -\tilde{u}(-x,y) \\
v(x,y) &= \tilde{v}(-x,y)
\end{aligned}
\right\} \cdots \quad (4.2)
$$

従って

$$\zeta(x,y) = -\tilde{\zeta}(-x,y), \quad \cdots (4.3)$$

よって

$$
\begin{aligned}
\zeta(x,y) + \tilde{\zeta}(x,y) &= \tilde{\zeta}(x,y) - \tilde{\zeta}(-x,y) \\
&= -\zeta(-x,y) - \tilde{\zeta}(-x,y) \ ; \ \text{odd in } x \quad (4.4)
\end{aligned}
$$

$$\zeta(x,y) - \tilde{\zeta}(x,y) = -\tilde{\zeta}(-x,y) + \zeta(-x,y) \ ; \ \text{even in } x \quad (4.5)$$

もう一度前後非対称な場合も含めて考えよう。

境界条件 (1.5), (1.6) から

$$u + \tilde{u} = 0, \quad v + \tilde{v} = 0 \quad \text{on } C, \quad (4.6)$$

それ故 D内で $(u+\tilde{u},\ v+\tilde{v})$ なる速度場は C上で斉次の境界条件を有し、x軸の前後に wake を持つ。

この wake は (3.7) のように与えられるが次のように書いておく。

今

$$\phi(p) = K_0(kr)\,e^{kx},\quad \hat{\phi}(p) = K_0(kr)\,e^{-kx}, \qquad \cdots (4.7)$$

として

$$u_I(p) = \frac{1}{4\pi}\left(2 - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(p),\quad v_I = -\frac{1}{4\pi k}\frac{\partial}{\partial y}\phi \qquad (4.8)$$

$$\hat{u}_I = \frac{1}{4\pi}\left(2 + \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{\phi},\quad \hat{v}_I = \frac{1}{4\pi k}\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y}, \qquad \cdots (4.9)$$

とおくと、

$$u(p) \underset{x \gg 1}{\doteqdot} -\frac{D}{4\pi\mu} u_I(p),\quad v(p) \doteqdot -\frac{D}{4\pi\mu} v_I(p) \qquad \cdots (4.10)$$

一方

$$\hat{u}(p) \underset{x \ll -1}{\doteqdot} \frac{D}{4\pi\mu}\hat{u}_I(p),\quad \hat{v}(p) \doteqdot \frac{D}{4\pi\mu}\hat{v}_I(p) \qquad (4.11)$$

こゝで (4.8), (4.9) の伴流に対して新しく (u_d, v_d) なる流れを考えよう。

$$\begin{cases} u_I + \hat{u}_d = u_w, \quad v_I + \hat{v}_d = v_w \\ u_w = v_w = 0 \quad \text{on } C \\ \hat{u}_I + u_d = \hat{u}_w, \quad \hat{v}_I + v_d = \hat{v}_w \\ \hat{u}_w = \hat{v}_w = 0 \quad \text{on } C \end{cases} \qquad \cdots (4.12)$$

(u_d, v_d), は x の正軸に, $(\hat{u}_d, \hat{v}_d)$ は x の負軸方向に伴流を有するものとする。

今 次の速度場を考えると

$$\left.\begin{aligned} &u+\tilde{u}+\frac{D}{4\pi\mu}(u_I+\tilde{u}_a) \\ &v+\tilde{v}+\frac{D}{4\pi\mu}(v_I+\tilde{v}_a) \end{aligned}\right\} \text{ or } \left\{\begin{aligned} &u+\tilde{u}-\frac{D}{4\pi\mu}(\tilde{u}_I+u_a) \\ &v+\tilde{v}-\frac{D}{4\pi\mu}(\tilde{v}_I+v_a) \end{aligned}\right.$$

xの正軸方向の伴流はなく（or 負方向の　）境界条件は恒等的に0であるから解が一意的ならば、これらは恒等的に0である。

即ち

$$\left.\begin{aligned} u+\tilde{u} &= -\frac{D}{4\pi\mu}(u_I+\tilde{u}_a)=\frac{D}{4\pi\mu}(\tilde{u}_I+u_a), \\ v+\tilde{v} &= -\frac{D}{4\pi\mu}(v_I+\tilde{v}_a)=\frac{D}{4\pi\mu}(v_I+\tilde{v}_a), \end{aligned}\right\} \quad (4.13)$$

それ故渦度についても

$$\left.\begin{aligned} \zeta+\tilde{\zeta} &= -\frac{D}{4\pi\mu}\zeta_w=\frac{D}{4\pi\mu}\tilde{\zeta}_w \\ \zeta_w &= -\tilde{\zeta}_w, \end{aligned}\right\} \quad (4.14)$$

又 無限遠では

$$\left.\begin{aligned} &-\begin{Bmatrix}\tilde{u}_a \\ \tilde{v}_a\end{Bmatrix} \xrightarrow{x\ll -1} \begin{Bmatrix}\tilde{u}_I \\ \tilde{v}_I\end{Bmatrix} \\ &-\begin{Bmatrix}u_a \\ v_a\end{Bmatrix} \xrightarrow{x\gg 1} \begin{Bmatrix}u_I \\ v_I\end{Bmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (4.15)$$

5. 最小抵抗問題 （U=1とする）

(D.28), (D.29)より，抵抗が極値となる為の条件は物体の微少変形δnに対して

$$\left.\begin{aligned}&\int_C \left[\mu s \xi^2 + 2\rho \xi \frac{\partial \chi}{\partial n}\frac{\partial \xi}{\partial n}\right]\delta n\, ds = 0 \\ &\int_C \left[\mu s \tilde{\xi}^2 + 2\rho \tilde{\xi} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial n}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial n}\right]\delta n\, ds = 0\end{aligned}\right\} \cdots (5.1)$$

副条件として面積一定，つまり

$$\int_C \delta n\, ds = 0, \qquad \cdots \qquad (5.2)$$

なる条件をつけると (5.1) は明らかに

$$\left.\begin{aligned}&\mu s \xi^2 + 2\rho \xi \frac{\partial \chi}{\partial n}\frac{\partial \xi}{\partial n} = C \quad ; \text{constant} \\ &\mu s \tilde{\xi}^2 + 2\rho \tilde{\xi} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial n}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial n} = \tilde{C} \quad ; \text{const.}\end{aligned}\right\} (5.3)$$

によって満足される。

もっと一般的に副条件として，面積の重心，2次モーメント（幅を指定するかわりに用いる。）が指定されるならば

$$\int_C \delta n\, ds = \int_C x\, \delta n\, ds = \int_C x^2 \delta n\, ds = 0; \qquad (5.4)$$

となり (5.3)のかわりに

$$\left.\begin{aligned}&\mu s \xi^2 + 2\rho \xi \frac{\partial \chi}{\partial n}\frac{\partial \xi}{\partial n} = c + bx + ax^2 \\ &\mu s \tilde{\xi}^2 + 2\rho \tilde{\xi} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial n}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial n} = \tilde{c} + \tilde{b}x + \tilde{a}x^2\end{aligned}\right\} \cdots (5.5)$$

$a, b, c, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ 定数

とおけばよい。

物体が前後左右対称ならば (5.4)は

$$\int_c \delta n\, ds = \int_c x^2 \delta n\, ds = 0, \quad \cdots\cdots (5.6)$$

(5.5)は

$$\left.\begin{array}{l} \mu\zeta(x,y)\tilde{\zeta}(x,y) + 2\rho\zeta(x,y)\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n} = c + ax^2 \\ \mu\tilde{\zeta}(x,y)\zeta(x,y) + 2\rho\tilde{\zeta}(x,y)\frac{\partial \tilde{x}}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n} = \tilde{c} + \tilde{a}x^2 \end{array}\right\}$$

となるが (4.3)の関係があるので

$$\left.\begin{array}{l} -\mu\zeta(x,y)\zeta(-x,y) + 2\rho\zeta(x,y)\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n} = c + ax^2 \\ -\mu\zeta(x,y)\zeta(-x,y) - 2\rho\zeta(-x,y)\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n} = \tilde{c} + \tilde{a}x^2 \end{array}\right\} \quad (5.7)$$

となり，辺々相引くと．

$$2\rho\left[\zeta(x,y) + \zeta(-x,y)\right]\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n} = c - \tilde{c} + (a-\tilde{a})x^2,$$

を得るが左辺［］内は偶関数，右辺も偶関数だが，$\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}$は奇関数故

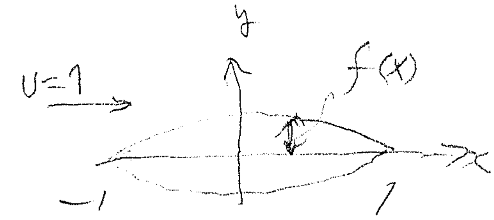
$$c = \tilde{c}, \quad a = \tilde{a}, \quad \cdots\cdots (5.8)$$

結局(5.7)は

$$-\mu\zeta(x,y)\zeta(-x,y) + \rho\left[\zeta(x,y) - \zeta(-x,y)\right]\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n} = c + ax^2, \quad \cdots (5.9)$$

6. 薄い物体

図のように薄い物体を考えよう。



薄い物体に常用される近似により境界条件は、

$$u\Big|_{y=0} = -1 \quad , \quad v\Big|_{y=0} = \frac{df(x)}{dx}, \ \text{for} \ |x|<1, \quad (6.1)$$

一方 (1.1) の特解としてポテンシャル流れ (u_p, v_p) があるからこれを援用して、

$$v_p\Big|_{y=0} = \frac{df}{dx} \quad \text{for} \ |x|<1, \qquad (6.2)$$

とすると、それに対する u_p は

$$u_p(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{df}{dx'}dx'}{x-x'} \quad , \qquad (6.3)$$

で与えられる。

なおその圧力は (1.1) より

$$p_p(x,y) = -\rho u_p(x,y) \quad , \qquad (6.4)$$

このポテンシャル流れを援用すると (6.1) は

$$u = u_p + u_H \quad , v = v_p + v_H \quad , \qquad (6.5)$$

とおいて

$$u_H\Big|_{y=0} = -1 - u_p\Big|_{y=0} , \quad v_H\Big|_{y=0} = 0 , \qquad (6.6)$$

それ故、(2.12) において

$$u_p(x',0) = -\frac{2}{\mu}\int_{-1}^{1} X(x)\, U^{(1)}(x',0;x,0)\,dx', \quad \cdots (6.7)$$

と考えてよい。

レイノルズ数が充分小さい時は (B.6) より

$$U^{(1)}(x',0,x,0) \fallingdotseq \frac{1}{4\pi}\left[1 - \log\frac{\gamma k}{2} - \log|x-x'|\right], \quad \cdots (6.8)$$

レイノルズ数が充分大きい時は (B.8) より

$$\left.\begin{aligned} U^{(1)} &\fallingdotseq 0 \quad \text{for } x > x' \\ &\fallingdotseq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2k|x-x'|}}, \quad \text{for } x' > x \end{aligned}\right\} \quad (6.9)$$

さて今 $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta, \quad x = \cos\theta, \quad (6.10)$$

とおくと $$\frac{df}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{a_n \cos n\theta}{\sin\theta}, \quad (6.11)$$

で (6.3) より

$$u_p(x) = \sum_{n=1} \frac{n a_n \sin n\theta}{\sin\theta}, \quad (6.12)$$ (sign?)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} &= 1 + 2\left[\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots + \cos 2n\theta\right], \\ \frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta} &= 2\left[\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta\right], \end{aligned}\right\}$$

故、

$$u_p(x,0) = \sum_{n=0} b_n \cos n\theta \quad , \quad \cdots \qquad (6.13)$$

と置くと

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= a_1 + 3a_3 + \cdots + (2n+1)a_{2n+1} + \cdots \\ b_{2n} &= 2\left[(2n+1)a_{2n+1} + \cdots\cdots\right] \\ b_1 &= 2\left[2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2n a_{2n} + \cdots\right] \\ b_{2n-1} &= 2\left[2n a_{2n} + \cdots\cdots\right] \end{aligned}\right\} \qquad (6.14)$$

また

$$\left.\begin{aligned} &\text{面積} & A &= 2\int_{-1}^{1} f\,dx = \pi a_1 \\ &\text{モーメント} & M &= 2\int_{-1}^{1} f\,dx = \frac{\pi}{2} a_2 \\ &\text{2次モーメント} & I &= 2\int_{-1}^{1} f x^2\,dx = \frac{\pi}{4}(a_1 + a_3) \end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

先ずレイノルズ数が充分小さい時は (6.8) により

$$-\log|\cos\theta - \cos\theta'| = \log 2 + 2\sum_{n=1} \frac{\cos n\theta \cos n\theta'}{n} \,,$$

だから

$$\left.\begin{aligned} U^{(1)} &= \frac{B}{4\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1} \frac{\cos n\theta \cos n\theta'}{n} \\ B &= 1 - \log\frac{\gamma k}{4} = 1 - \log\frac{\gamma k}{2} + \log 2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.16)$$

となり 今

$$X = \sum_{n=0} \frac{c_n \cos n\theta}{\sin\theta} \,, \qquad (6.17)$$

とおくと $D = 2\int_{-1}^{1} X\,dx = 2\pi c_0$, (6.18)

$$u_{\pi} = -\frac{B}{2\mu}C_0 - \frac{1}{2\mu}\sum_{n=1} \frac{C_n}{n}\cos n\theta, \qquad (6.19)$$

(6.6)により (6.13)と比べて

$$\left.\begin{aligned} \frac{BC_0}{2\mu} &= 1 + b_0 = 1 + a_1 + 3a_3 + \cdots + (2n+1)a_{2n+1} + \cdots \\ \frac{C_n}{2\mu} &= b_n = 2\left[(n+1)a_{n+1} + (n+3)a_{n+3} + \cdots\cdots\right] \end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

(6.11)と(6.17)から

$$X - \frac{1}{4\mu}\frac{df}{dx} = \frac{C_0}{\sin\theta} + 4\mu\sum_{n=1}\frac{(n+3)a_{n+3}}{\sin\theta}\cos n\theta, \qquad (6.21)$$

となる。(5.

(5.7)と較べて ($X=\mu\xi$) 右辺第1項は (5.7)の定数に対応していると考えてよいけれど第2項が残るので (5.7)が成立っているかどうか不明である。

なお今の場合抗力は (6.18)で C_0は(6.20)第1式で与えられるから、この式で極値問題を考えると

$b_0 = -1$ とすると $X = 0$, ‥‥ (6.22)

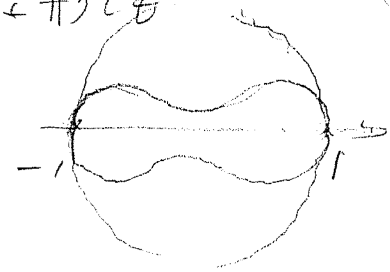
でその時端点近くでは

$$\frac{df}{dx} \doteqdot \frac{b_0}{\sqrt{1-X^2}}, \quad \text{for } x \doteqdot 1$$

$$f \doteqdot b_0\int\frac{dx}{\sqrt{1-X^2}} \doteqdot b_0\sqrt{1-X^{12}},$$

＊この事はストークス流れで得られている解の事実と反する事であり、
この原因は圧力抵抗を無視したためと考えられる。
それをどう採り入れるかは今後の問題としても少くとも
(6.4)を代入しても抗力は2次形式となる。

つまり前後の曲率半径が1ならば、他は どんな形でも抗力は0（！）と云う事になる。



このように抗力が0となるのは抗力が形状を表わす係数 a_n の一次形式となっている以上必然的な事である。＊

次にレイノルズ数が充分大きい時を考えよう。

(6.9)を代入すると(6.7)は

$$1 + u_p(x,0) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi k}}\int_{-1}^{x}\frac{X(x')\,dx'}{\sqrt{x-x'}} , \quad \cdots (6.23)$$

のようにアーベル型の積分方程式となり、その解は

$$X(x) = \mu\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}\frac{(1+u_p)\,dx'}{\sqrt{|x-x'|}} , \quad (6.24)$$

これ故抗力は

$$D = 2\int_{-1}^{1}X\,dx = 2\mu\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{(1+u_p)\,dx'}{\sqrt{1-x'}} , \quad (6.25)$$

(6.24)の表現は少し面倒なので以下抗力のみ考えよう。

(6.12)を(6.25)に代入すると

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1+u_p)\,dx'}{\sqrt{1-x'}} = 2\sqrt{2}\left[1+\sum_{n=1} n\,a_n\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu-1)}\right\}\right] , \quad \cdots (6.26)$$

となり，やはり a_n の一次形式となるので抗力の最小値は0と考えられ，(6.26)の形からレイノルズ数の小さい時と同じく，両端近くの形だけで抗力0の形状が与えられるように見える。

前頁の図のような形状は形状影響係数を小さくしようとすると言われて来た*。

そのような事があらわれる原因の一つは線型化した事にもよると思われるが，造波抵抗理論で球状船首が有用であり，またその効果は粘性抵抗の減少にもあると言われる事からすれば，なお検討の余地があろう。

* 別所，防大紀要

7. 解法について

§5の問題を解くにあたってまず所望の面積，重心，2次モーメントを持つ物体を適当に選び，その周りの流れを求める。

境界積分方程式としては(2.9)がもっとも便利である。

$$
\left.
\begin{aligned}
v_n(Q) &= \int_C \left[\frac{p}{\mu} V_n^{(1)}(Q,P) - \zeta V_s^{(1)}(Q,P) \right] ds(P), \\
v_s(Q) &= \int_C \left[\frac{p}{\mu} V_n^{(2)}(Q,P) - \zeta V_s^{(2)}(Q,P) \right] ds(P),
\end{aligned}
\right\} \quad (7.1)
$$

逆流れについても

$$
\left.
\begin{aligned}
\tilde{v}_n(Q) &= \int_C \left[\frac{\tilde{p}}{\mu} V_n^{(1)}(P,Q) - \tilde{\zeta} V_s^{(1)}(P,Q) \right] ds(P), \\
\tilde{v}_s(Q) &= \int_C \left[\frac{\tilde{p}}{\mu} V_n^{(2)}(P,Q) - \tilde{\zeta} V_s^{(2)}(P,Q) \right] ds(P),
\end{aligned}
\right\} \quad (7.2)
$$

sign?

境界条件は

$$
\left.
\begin{aligned}
&v_n = -\frac{\partial x}{\partial n}, \quad v_s = \frac{\partial y}{\partial n}, \\
&\tilde{v}_n = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \tilde{v}_s = -\frac{\partial y}{\partial n}
\end{aligned}
\right\} \quad (7.3)
$$

前輪前後対称の時は(4.2)，(4.3)の関係があるから(7.1)だけでよい。

これを δn だけ変形すると (D.12)により

$$
\left.
\begin{aligned}
&\delta v_n = \delta u \frac{\partial x}{\partial n} + \delta v \frac{\partial y}{\partial n} = 0, \quad \delta v_s = -\delta u \frac{\partial y}{\partial n} + \delta v \frac{\partial x}{\partial n} = -\zeta \delta n, \\
&\delta \tilde{v}_n = 0, \quad \delta \tilde{v}_s = -\tilde{\zeta} \delta n
\end{aligned}
\right\} \quad (7.4)
$$

これを(7.1)，(7.2)に代入して解くとその解 $\delta p, \delta\zeta, \delta\tilde{p}, \delta\tilde{\zeta}$ が求まるがこれは附録Dで考えているもの(例えば $\delta\zeta$ は $\delta\zeta = \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\delta u$ のように導かれる)とは一般に異なると考えられる。(つまり $\delta u, \delta v$ 等の表示は一般には(2.1)である)。

しかしその一般式は面倒であるので，とにかく少くとも近似式としてその解が $\delta p, \delta\zeta$ 等を代表するものとする。

さて最少摂擾物体では(6.5)が成立たねばならぬから(7.3)の解から得られる ζ/c を ζ_0 と記すと，$\delta\zeta$ なる変形によって(6.5)が成立つためには2次の項を省略して

$$\left(\mu\tilde{\zeta}_0 + 2\rho\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\delta\zeta + \mu\zeta_0\delta\tilde{\zeta} = c + bx + ax^2 - \left[\mu\zeta_0\tilde{\zeta}_0 + 2\rho\zeta_0\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\right],$$

$$\left(\mu\zeta_0 + 2\rho\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\delta\tilde{\zeta} + \mu\tilde{\zeta}_0\delta\zeta = \tilde{c} + \tilde{b}x + \tilde{a}x^2 - \left[\mu\zeta_0\tilde{\zeta}_0 + 2\rho\tilde{\zeta}_0\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\right], \quad (7.5)$$

即ち

$$\delta\zeta = \frac{1}{\Delta}\Big[\Big\{c + bx + ax^2 - \Big(\mu\zeta_0\tilde{\zeta}_0 + 2\rho\zeta_0\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\Big)\Big\}\Big(\mu\zeta_0 + 2\rho\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\Big) - \Big\{\tilde{c} + \tilde{b}x + \tilde{a}x^2 - \mu\zeta_0\tilde{\zeta}_0 - 2\rho\tilde{\zeta}_0\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\Big\}\mu\zeta_0\Big],$$

$$\delta\tilde{\zeta} = \frac{1}{\Delta}\Big[\Big\{\tilde{c} + \tilde{b}x + \tilde{a}x^2 - \mu\zeta_0\tilde{\zeta}_0 - 2\rho\tilde{\zeta}_0\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\Big\}\Big(\mu\tilde{\zeta}_0 + 2\rho\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\Big) - \Big\{c + bx + ax^2 - \mu\zeta_0\tilde{\zeta}_0 - 2\rho\zeta_0\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\Big\}\mu\tilde{\zeta}_0\Big], \quad (7.6)$$

$$\Delta = \left(\mu\zeta_0 + 2\rho\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\left(\mu\tilde{\zeta}_0 + 2\rho\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\right),$$

これを(7.1),(7.2)の式と第1式に代入し,(7.4)の境界条件 $\delta v_n = \delta \hat{v}_n = 0$ について解けば対応する $\delta p, \delta \hat{p}$ が求まり,それを式と第2式に代入すれば δn が求まる。

この時定数 a, b, c 等は未定であるが(5.4)の条件によって定まる。

このようにして δn が定まればその形をそれだけ変形して計算をくり返し,適当な所でとめる。

物体が前後対称ならば(5.6)以下のようにかなり簡単になる。

§6節の考察から見るとレイノルズ数が充分大きい時は解が不安定となる可能性がある。

その原因は(5.1)で $\mu \to 0$ となると

$$2\rho\int_C \zeta \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial n}\frac{\partial \psi}{\partial n}\delta n\, ds = 0,\quad 2\rho\int_C \hat{\zeta} \frac{\partial \chi}{\partial n}\frac{\partial \psi}{\partial n}\delta n\, ds = 0 \qquad (7.7)$$

となる。 つまり一次形式になるので§6のような事が起りうる事になる。

一方ストークス流れでは解が実際得られているのは

$$\mu \int_C \zeta^2 \delta n \, ds = 0 , \qquad (7.8)$$

つまりζの2次形式になっているためであると考えられる。

しかし今は $\zeta\tilde{\zeta}$ つまり双一次形式となっているので前後対称な物体では解はあると考えられるが前後非対称の時は解が不定となるかも知れない。ここで解が不定と言う意味は一様収束する解がないと言う事であって、計算上では逐次計算を進めて行く時抵抗値が逐次小さくなって行くとは限らないで大きくなったり小さくなったりし、一定の形状に収束しないと言う事である。

No.

Date

$E = 2u_x \tilde{u}_x + 2v_y\tilde{v}_y + (u_y + v_x)(\tilde{u}_y + \tilde{v}_x)$

$= 4u_x \tilde{u}_x + (\zeta + 2u_y)(\zeta^2 + 2\tilde{u}_y)$

$= 4u_x \tilde{u}_y + 4u_y \tilde{u}_y + 2\zeta\,\tilde{u}_y + 2\zeta^2 u_y$

$u_x = u_n x_n$, $u_y = u_n y_n$.

$u_x = -\zeta y_n x_n$, $u_y = \zeta - \zeta y_n^2$

$E = -4\zeta\zeta^2 x_n^2 y_n^2 + \zeta\zeta^2 (x_n^2 - y_n^2)^2 = \zeta^2 (x_n^2 + y_n^2)$

$= -\zeta\zeta^2 [(x_n^2 + y_n^2)^2 -$

$(x_n^2 + y_n^2)^2 = 1$

$= x_n^4 + y_n^4 + 2x_n^2 y_n^2$

$= \zeta\zeta y_n^2 (x_n^2 + y_n^2 - 1) = 0$

$(u\tilde{u}_n + v\tilde{v}_n)\big|_C = (u\tilde{u}_n + v\tilde{v}_n)_C$

$= (\tilde{u}_n u_n + \underline{u\tilde{u}_n} + v_n\tilde{v}_n$

$\zeta\zeta\,\delta_n$

$v_x = v_n x_n = \zeta x_n^2$, $v_y = v_n y_n = \zeta x_n y_n =$

$u_x = u_n x_n = -\zeta y_n x_n$ $\quad u_y = -\zeta y_n^2$

$u_y + v_x = \zeta (x_n^2 - y_n^2)$

附録 A　可逆定理

任意の速度場 (u, v) とそれとは無関係な任意の逆流れの速度場 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ を考え全流体領域 D 上で次の積分を考えよう。

$$E(u,v;\tilde{u},\tilde{v}) = 2\mu \iint_D \Big[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\Big)\Big] dx\,dy, \qquad (A\cdot 1)$$

対称性から明らかに

$$E(u,v;\tilde{u},\tilde{v}) = E(\tilde{u},\tilde{v};u,v), \qquad (A\cdot 2)$$

なる可逆性がある。

(A·1)を部分積分し (1·7)の定義により境界力を導入し、さらに (1·1) を使うと最終的に

$$E = -\rho U \iint_D \Big(\tilde{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) dx\,dy - \int_C (\tilde{u}X + \tilde{v}Y)\, ds. \qquad (A\cdot 3)$$

同様にして

$$E = \rho U \iint_D \Big(u\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\Big) dx\,dy - \int_C (u\tilde{X} + v\tilde{Y})\, ds. \qquad (A\cdot 4)$$

(A·2)により上2式は等しい故、整理して面積分を積分すると

$$\int_C (\tilde{u}X + \tilde{v}Y - u\tilde{X} - v\tilde{Y})\,ds$$

$$= -\rho U \int_C (u\tilde{u} + v\tilde{v})\frac{\partial \chi}{\partial n}\,ds, \qquad (A.5)$$

を得る。

特に (u, v), $(\tilde{u}, \tilde{v})$ が (1.5), (1.6) の解ならば

$$U\int_C X\,ds = -U\int_C \tilde{X}\,ds \quad , \quad \cdots (A.6)$$

つまり 順流れにおける抵抗は逆流れの抵抗に等しい。(前後対称 非対称に拘わらず)。

附録B　核関数

オセーンによれば

$$4\pi U^{(1)}(P,Q) = -\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\log R + 2\Phi(P,Q) - \frac{\partial \Phi}{k\,\partial x},$$

$$4\pi V^{(1)}(P,Q) = 4\pi U^{(2)}(P,Q) = -\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial y}\log R - \frac{\partial \Phi}{k\,\partial y}, \qquad \text{(B.1)}$$

$$4\pi V^{(2)}(P,Q) = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\log R + \frac{\partial \Phi}{k\,\partial x},$$

$$k = \frac{U}{2\nu} = \frac{\rho U}{2\mu}, \quad R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} = \overline{PQ},$$

$$\Phi(P,Q) = K_0(kR)\,e^{k(x-x')}, \qquad \text{(B.2)}$$

$$\nabla^2 \Phi = 2k\frac{\partial}{\partial x}\Phi,$$

$$\tilde{U}^{(1)}(P,Q) = U^{(1)}(Q,P),$$

$$\tilde{V}^{(1)}(P,Q) = V^{(1)}(Q,P) = \tilde{U}^{(2)}(P,Q) = U^{(2)}(Q,P) \qquad \text{(B.3)}$$

$$\tilde{V}^{(2)}(P,Q) = V^{(2)}(Q,P),$$

$$p^{(1)}(P,Q) = \tilde{p}^{(1)}(P,Q) = \frac{2\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\log R$$

$$p^{(2)}(P,Q) = \tilde{p}^{(2)}(P,Q) = \frac{2\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\log R \qquad \text{(B.4)}$$

$$\gamma^{(1)} = \frac{2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\Phi, \quad \gamma^{(2)} = -\frac{2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\Phi, \qquad \text{(B.5)}$$

$X^{(j)}, Y^{(j)}$ は上の (B.1) から (1.9) によって計算されるもので複雑だし今は必要ないので省略する。

さて kRの小さい所では

$$\Phi(P,Q) \doteqdot -\left(1+\frac{k^2R^2}{4}\right)\log\left(\frac{\gamma k R}{2}\right)\left[1+\sigma(x-x')\right],$$

なので　　　　　　　　　　　γ: オイラー定数 ($\log\gamma = .5772$)

$$\left.\begin{aligned}
4\pi U^{(1)}(P,Q) &\doteqdot \log\frac{1}{R} - \frac{(y-y')^2}{R^2} + 1 - \log\frac{\gamma k}{2},\\
4\pi V^{(1)} = 4\pi U^{(2)}(P,Q) &\doteqdot \frac{(x-x')(y-y')}{R^2},\\
4\pi V^{(2)}(P,Q) &\doteqdot \log\frac{1}{R} - \frac{(x-x')^2}{R^2} - \log\frac{\gamma k}{2},
\end{aligned}\right\}\quad (B\cdot 6)$$

これ故 小円の周りに力を積分すると

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_\varepsilon X^{(1)}ds_p &= \oint Y^{(2)}ds_p = \mu\\
\oint_\varepsilon X^{(2)}ds &= \oint_\varepsilon Y^{(1)}ds_p = 0
\end{aligned}\right\}\quad (B\cdot 7)$$

$R \gg 1$ では

$$\Phi(P,Q) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\, e^{-k[R-(x-x')]}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}
4\pi U^{(1)}(P,Q) &\doteqdot \left(1+\frac{x-x'}{R}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\, e^{-k(R-\overline{x-x'})} - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\log R,\\
4\pi V^{(1)}(P,Q) = 4\pi U^{(2)} &= \left(\frac{y-y'}{R}-1\right)\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\, e^{-k(R-\overline{x-x'})} - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial y}\log R,\\
4\pi V^{(2)}(P,Q) &\doteqdot \left(1-\frac{x-x'}{R}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\, e^{-k(R-\overline{x-x'})} + \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\log R,
\end{aligned}\right\}\quad (B\cdot 8)$$

となって右辺第1項は上流側ではexponentialに小さく後流側の伴流を表わしている。

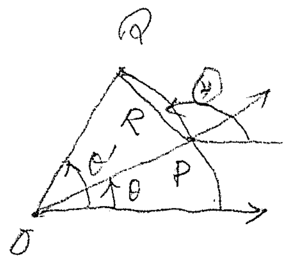
ストークス流れの核は(B.6)と定数だけ異なって

$$\left.\begin{aligned}
{}_sU^{(1)}(P,Q) &= U^{(1)}(P,Q) - \frac{1}{4\pi}\left(1-\log\frac{\gamma k}{2}\right),\\
{}_sV^{(1)}(P,Q) &= {}_sU^{(2)}(P,Q) = V^{(1)}(P,Q),\\
{}_sV^{(2)}(P,Q) &= V^{(2)}(P,Q) + \frac{1}{4\pi}\log\frac{\gamma k}{2},
\end{aligned}\right\} \quad (B.8)$$

附録C　円筒の解

§3で述べたように実質的な境界方程式はストークス流れの(3・2)である。

円筒上では



$$\left.\begin{aligned} 4\pi s U^{(11)} &= -\log R - \frac{(y-y')^2}{R^2} \\ 4\pi s V^{(11)} &= 4\pi s U^{(12)} = +\frac{(x-x')(y-y')}{R^2} \\ 4\pi s V^{(12)} &= -\log R - \frac{(x-x')^2}{R^2}, \end{aligned}\right\} \quad (C.1)$$

$$\left.\begin{aligned} R^2 &= 2 - 2\cos(\theta-\theta') \\ \frac{(y-y')^2}{R^2} &= \sin^2\Theta = \cos^2\frac{\theta+\theta'}{2} = \frac{1+\cos(\theta+\theta')}{2}, \\ \frac{(x-x')^2}{R^2} &= \cos^2\Theta = \frac{1-\cos(\theta+\theta')}{2}. \\ \log R &= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\theta-\theta')}{n}, \end{aligned}\right\} \quad (C.2)$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} 4\pi U^{(11)} &= -\frac{1+\cos(\theta+\theta')}{2} + 2\sum_{n=1}\frac{\cos n(\theta-\theta')}{n}, \\ 4\pi V^{(11)} &= 4\pi U^{(12)} = -\frac{1}{2}\sin(\theta+\theta'), \\ 4\pi V^{(12)} &= -\frac{1-\cos(\theta+\theta')}{2} + 2\sum_{n=1}\frac{\cos n(\theta-\theta')}{n}, \end{aligned}\right\} \quad (C.3)$$

(3・2)で $\left\{\begin{matrix}\text{半径1} \\ U=1\end{matrix}\right\}$ とおくと

$$\left.\begin{aligned} -1 &= -\frac{1}{\mu}\int_0^{2\pi}\left[X^s U^{(11)} + Y^s V^{(11)}\right] d\theta, \\ 0 &= -\frac{1}{\mu}\int_0^{2\pi}\left[X^s U^{(12)} + Y^s V^{(12)}\right] d\theta. \end{aligned}\right\} \quad (C.4)$$

この解は $X^s = -4\mu$, $Y^s = 0$, ・・・ (C.5).

それ故 $D_s = \int_C X^s d\theta = -8\pi\mu$, (C.6)

(3.6)に代入するとオセーン流れの抵抗は

$$D = \frac{4\pi\mu}{\frac{1}{2} - \log\frac{\gamma k}{2}}, \quad \cdots \quad (C.7)$$

となってLambの結果に一致する。

この時の速度場は (Lamb p.616)

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{C}{2}\left[-\frac{1}{2} + \log\left(\frac{\gamma k r}{2}\right) + \frac{1}{2}(r^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log r\right], \\ v &= \frac{C}{4}(r^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\log r, \\ C &= \frac{2}{\frac{1}{2} - \log\left(\frac{\gamma k}{2}\right)}, \end{aligned}\right\} \quad (C.8)$$

なお x軸半長 a, y軸 b の楕円の抵抗は

$$D = \frac{4\pi\mu U}{\frac{a}{a+b} - \log\frac{\gamma k}{4}(a+b)}, \quad (C.9)$$

?

No. D-1

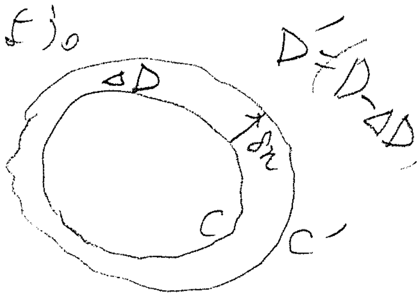
Date

附録D　微少変形

物体Cが δnだけ変形して C'になったとしよう。

変形前の速度場 (u,v) は (u',v')

になり、抗力Dは D' となるとする。



境界条件は

$$\left.\begin{array}{ll} u=-U, & v=0 \\ \tilde{u}=U, & \tilde{v}=0 \end{array}\right\} \text{ on } C, \quad (D.1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} u'=-U, & v'=0 \\ \tilde{u}'=U, & \tilde{v}'=0 \end{array}\right\} \text{ on } C', \quad (D.2)$$

(A.3)により抗力は

$$UD' = U\int_{C'} X' ds = -E_{D'}(u',v') + \rho U \iint_{D'} \left(\tilde{u}' \frac{\partial u'}{\partial x} + \tilde{v}' \frac{\partial v'}{\partial x}\right) dx dy,$$

$$UD = U\int_{C} X ds = -E_{D}(u,v) + \rho U \iint_{D} \left(\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx dy, \quad (D.3)$$

$$\therefore \quad U\delta D = U(D'-D) \fallingdotseq \mathrm{I} + \mathrm{II}, \quad (D.4)$$

$$\mathrm{I} = + E_{\Delta D}(u,v) + \rho U \iint_{\Delta D} \left(\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx dy, \quad (D.5)$$

$$\mathrm{II} = -E_{D}(u',v') + E_{D}(u,v) + \rho U \iint_{D} \left[\left(\tilde{u}' \frac{\partial u'}{\partial x} + \tilde{v}' \frac{\partial v'}{\partial x}\right) - \left(\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] dx dy, \quad (D.6)$$

先ず ΔD は近似的に $(\delta n\, ds)$ の積分と考えられ、

C の上では速度の微分は 0 であるから

$$2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)\Bigg|_C=\zeta\tilde{\zeta}, \quad (D.7)$$

となり

$$I=+\int_C\left[\mu\zeta\tilde{\zeta}+\rho U^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]\delta n\, ds, \quad (D.8)$$

次に (A.3) により (D.6) は

$$II=\int_C(\tilde{u}'X'+\tilde{v}'Y'-\tilde{u}X-\tilde{v}Y)\,ds$$

$$\fallingdotseq\int_C(\delta\tilde{u}X+\delta\tilde{v}Y+\tilde{u}\delta X+\tilde{v}\delta Y)\,ds, \quad (D.9)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}&\delta\tilde{u}=\tilde{u}'-\tilde{u}\big|_C,\quad \delta\tilde{v}=\tilde{v}'-\tilde{v}\big|_C,\\&\delta X=X'-X\big|_C,\quad \delta Y=Y'-Y\big|_C\end{aligned}\right\} \quad (D.10)$$

所で (A.5) により

$$\int_C(\tilde{u}\delta X+\tilde{v}\delta Y)\,ds=\int_C(\delta u\tilde{X}+\delta v\tilde{Y})\,ds-\rho U\int_C(\tilde{u}\delta u+\tilde{v}\delta v)\frac{\partial x}{\partial n}\,ds$$

なる故

$$II\fallingdotseq\int_C\left[X\delta\tilde{u}+Y\delta\tilde{v}+\tilde{X}\delta u+\tilde{Y}\delta u-\rho U(\tilde{u}\delta u+\tilde{v}\delta v)\frac{\partial x}{\partial n}\right]ds,$$
$$(D.11)$$

ここで $\delta u|_c = u'|_c - u|_c \doteqdot -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_c \delta n$ …

(1.11)より $\delta v|_c \doteqdot -\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_c \delta n$

$$\delta u|_c = \zeta \frac{\partial y}{\partial n}\delta n, \quad \delta v|_c = -\zeta \frac{\partial x}{\partial n}\delta n, \qquad \text{(D.12)}$$

同様にして

$$\delta \tilde{u}|_c = \tilde{\zeta} \frac{\partial y}{\partial n}\delta n, \quad \delta \tilde{v}|_c = -\tilde{\zeta} \frac{\partial x}{\partial n}\delta n$$

それ故

$$X\delta\tilde{u} + Y\delta\tilde{v} = \left(X\frac{\partial y}{\partial n} - Y\frac{\partial x}{\partial n}\right)\tilde{\zeta}\delta n$$

となり、さらに (1.12) より

$$X\delta\tilde{u} + Y\delta\tilde{v} = -\mu\zeta\tilde{\zeta}\delta n. \qquad \text{(D.13)}$$

同様にして

$$\tilde{X}\delta u + \tilde{Y}\delta v = -\mu\zeta\tilde{\zeta}\delta n$$

又 $\delta u \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n}\delta n = \cancel{+}\zeta\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}\delta n = -\frac{\partial u}{\partial x}\delta n$ (D.14)

$$\therefore \quad II = -\int_C \left[+2\mu\zeta\tilde{\zeta} \cancel{+} \rho U^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right]\delta n\, ds, \qquad \text{(D.14)}$$

結局

$$U\delta D = \int_C \left[2\rho U^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \mu\zeta\tilde{\zeta}\right]\delta n\, ds, \qquad \text{(D.15)}$$

(A.4)から逆流れの抗力については

$$U\tilde{D} = -\int_{C'} \tilde{X}' ds = E_{D'}(u', v') - \rho U \iint_{D'} \left(u'\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial x} + v'\frac{\partial \tilde{v}'}{\partial x}\right) dx\, dy, \qquad \text{(D.16)}$$

故、同様にして

$$U\delta\tilde{D} = \mathrm{I} + \mathrm{II}, \qquad \text{(D.17)}$$

$$\mathrm{I} = -E_{\Delta D}(u, v) + \rho U \iint_{\Delta D}\left(u\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)dx\,dy, \qquad \text{(D.18)}$$

$$\mathrm{II} = -\int_C \left(\tilde{X}\delta u + \tilde{Y}\delta v + u\delta\tilde{X} + v\delta\tilde{Y}\right)ds, \qquad \text{(D.19)}$$

これを使えば

$$\mathrm{I} = -\int_C \left[\mu\zeta\tilde{\zeta} + \rho U^2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right]\delta n\,ds, \qquad \text{(D.20)}$$

次に

$$\int_C \left(u\delta\tilde{X} + v\delta\tilde{Y}\right)ds = \int_C \left(X\delta\tilde{u} + Y\delta\tilde{v}\right)ds + \rho U\int_C \left(u\delta\tilde{u} + v\delta\tilde{v}\right)\frac{\partial x}{\partial n}ds$$

同

$$\mathrm{II} = -\int_C \left(X\delta\tilde{u} + Y\delta\tilde{v} + \tilde{X}\delta u + \tilde{Y}\delta v\right)ds + \rho U^2\int_C \delta\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial n}ds, \qquad \text{(D.21)}$$

前同様にして

$$\mathrm{II} = \int_C \left[2\mu\zeta\tilde{\zeta} - \rho U^2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right]\delta n\,ds, \qquad \text{(D.22)}$$

$$\therefore U\delta\tilde{D} = \int_C \left[\mu\zeta\tilde{\zeta} - 2\rho U^2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right]\delta n\,ds, \qquad \text{(D.23)}$$

$$\therefore U(\delta D + \delta \tilde{D}) = 2\rho U^2 \int \frac{\partial}{\partial x}(u - \tilde{u})\, \delta n\, ds = 0, \quad \cdots (D.24)$$

$$\because \quad D = -\tilde{D}$$

$$\frac{U}{2}(\delta D - \delta \tilde{D}) = U\delta D = -\int_C \left[\mu \zeta \tilde{\zeta} - \rho U^2 \frac{\partial}{\partial x}(u + \tilde{u})\right] \delta n\, ds, \quad (D.25)$$

また (D.14) より

$$\int_C (\zeta - \tilde{\zeta}) \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial n}\, \delta n\, ds = 0, \quad \cdots (D.26)$$

$$U\delta D = -\int_C \left[\mu \zeta \tilde{\zeta} + \rho U^2 (\zeta + \tilde{\zeta}) \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial n}\right] \delta n\, ds, \quad (D.27)$$

あるいは 次の形に直して

$$U\delta D = -\int_C \left[\mu \zeta^2 + 2\rho U^2 \zeta \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial n}\right] \delta n\, ds, \quad (D.28)$$

$$U\delta \tilde{D} = -\int_C \left[\mu \tilde{\zeta}^2 + 2\rho U^2 \tilde{\zeta} \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial n}\right] \delta n\, ds, \quad (D.29)$$

No.

Date 58.5.13.

ストークス流れの最小抵抗問題

別所

目次