V

57.4.
註)58.6.8

ストークス,オゼーン流れの最少抵抗問題

別府正利

目次

註) (2.22)式は成立しないので少し結果は異なる。
「2次元オゼーン流れについて」参照の事。

参照文献

1) Pironneau, O. "On optimum profiles in Stokes Flow" J.F.M. vol.59, 1973

2) 佐野学, 酒井浩 「ストークス流中における最小抵抗力 . . . 」 日本航空宇宙学会誌 30巻 339号, 1982年4月.

概要

造波抵抗理論の進展に伴い船型の改良は目覚ましいものがあったが、その改良は主として前半部のみで後半部については複雑な粘性現象、推進性能のために全く理論的基盤を欠き、経験的実験的改良に止まっている。

筆者はさきにこの点に注目してクロス・フロウの小さいあるいはない船型が望ましい事を2，3の点から提唱しそのような船型、具体的には肋骨線形状のつくり方について試案を示した。

またクロス・フロウがない為には船体表面上の速度が至る所等しければよいがそれは空洞流れである事を指摘した。

この空洞流れをうる方法についても検討した。

一方平面弾性論における空孔の応力集中緩和法として空孔の指定された部分で応力一定となる形状の求め方その計算例を示した。

最近ストークス流れにおける最小抵抗問題の

発表を見る機会があったが、それは物体表面上で渦度の自乗和が一定となると言う、見易い結論であるがその計算手順はあまり優れているとは思えない。

前述の空洞流れ、応力集中緩和法の経験から考えると、その計算の手順の中に、物体の微小変形に基づく速度変化を求める計算プログラムを含ませるのが望ましい。

又ストークス流れ、オセーン流れの境界値問題の解法と基礎的な関係についてはかつて覚書を作った事があるので、それに基づいてストークス流れの最小抵抗問題の扱い方を提示しまたオセーン流れの場合についても述べる心算である。

1. 2次元ストークス流れ

よく知られているように2次元ストークス流れでは抵抗は無限大となるのでこの場合を考えるのは無駄であるが式が簡単なのでこの方法の要点を理解するのに便利であり、また後出のオセーン流れの場合との差異も明らかになるので採り上げる。

微分方程式は

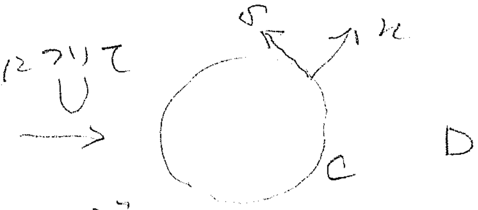
$$\left.\begin{aligned} p_x &= \mu \Delta u, \\ p_y &= \mu \Delta v. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

連続方程式は $\quad u_x + v_y = 0, \qquad (1.2)$

境界条件は

$$\left.\begin{aligned} u &= -U \\ v &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ on } C, \qquad (1.3)$$

Cの外側の領域をDとし
$\boldsymbol{u} = (u, v)$, $\boldsymbol{u}' = (u', v')$ なる2つの流れについて



$$E_D(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = \mu \iint_D \left[2u_x u'_x + 2v_y v'_y + (u_y + v_x)(u'_y + v'_x) \right] dx\,dy, \qquad (1.4)$$

なる積分を定義しよう*。

部分積分により、(1.1), (1.2)を使うと、

$$E_D(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = -\int_C (u'X + v'Y)\,ds = -\int_C (uX' + vY')\,ds, \qquad (1.5)$$

* Lamb p.580, 581

2・12

$$X = (2\mu u_x - p)x_n + \mu(u_y + v_x)y_n$$
$$Y = \mu(u_y + v_x)x_n + (2\mu v_y - p)y_n \qquad (1.6)$$

つまり表面に働く力とする。

相反定理は (1.5) の右辺の形式でもよく又

$$E_D(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = E_D(\mathbf{u}', \mathbf{u}), \quad \cdots\cdots (1.7)$$

と書いてもよい。

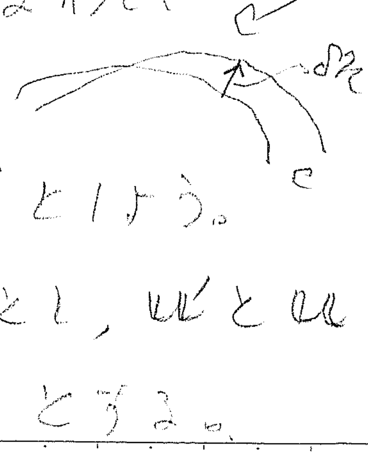
さて $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ の時は特に $E_D(\mathbf{u})$ と書く事にし、(1.3) を代入すると

$$E_D(\mathbf{u}) = -\int_C (uX + vY)\,ds$$
$$= U\int_C X\,ds = UR, \quad \cdots\cdots (1.8)$$

ここに R は抵抗とする。

E_D は粘性による散逸エネルギーであるから今の場合それは抵抗のなす仕事に等しい。

さて今 C が法線方向に僅かに変形して C' なる曲線になったとして



C' なる物体による速度場を $\mathbf{u}'$ としよう。

この変形は滑らかになされるものとし、$\mathbf{u}'$ と $\mathbf{u}$ との差はまた僅かにとどまるものとする。

また u, u' は C' の近くでその内外に C まで解析接続されるものとする。

高次の項を省略して
そうすると図から

$$u'|_C \doteqdot u'|_{C'} - (\delta n)\frac{\partial u'}{\partial n}\Big|_{C'}$$

$$\doteqdot -U - \frac{\partial u}{\partial n}\delta n\,,$$

$$v'|_C \doteqdot -\delta n\frac{\partial v'}{\partial n}\Big|_{C'} \doteqdot -\frac{\partial v}{\partial n}\delta n\,,$$

それ故

$$\left.\begin{aligned} u'-u &= \delta u|_C = -u_n(\delta n) \\ v'-v &= \delta v|_C = -v_n(\delta n) \end{aligned}\right\} \quad (1.9)$$

さらに渦度

$$\zeta = v_x - u_y \qquad , \quad \cdots \quad (1.10)$$

を導入して C の上では (1.3) が成立つことから
$u_s|_C = v_s|_C = 0$ であるので

$$\left.\begin{aligned} \zeta|_C &= v_n x_n - u_n y_n\,, \\ u_n x_n + v_n y_n &= 0\,, \ \text{on } C \end{aligned}\right\} \quad (1.11)$$

(1.3) より

なるから

$$\left.\begin{aligned} u_n &= -y_n\,\zeta|_C \\ v_n &= x_n\,\zeta|_C \end{aligned}\right\} \text{on } C, \cdots \quad (1.12)$$

となり (1.9) は

$$\left.\begin{aligned} \delta u|_C &= \zeta|_C\, y_n\,\delta n = \zeta|_C(\delta y) \\ \delta v|_C &= -\zeta|_C\, x_n\,\delta n = \zeta|_C(\delta x) \end{aligned}\right\} \quad (1.9')$$

と書いてもよい。

この境界条件の下に境界値問題をとけば $\delta u, \delta v$ 従って $\delta\zeta$ 等が常套のような方法で求められる。

この形では C 上の各点の変形 δn は線型的に定まっているから 後出の条件，偏度が一定にする為には各点の ~~で $\delta\zeta$~~ とるべき（実際には $\frac{\partial}{\partial s}(\delta\zeta)$ を指定する方がよい）が与えられるので，その条件で δn が近似的に求められる。

さてこの変形によって抵抗はどう変るだろうか。

$$U(R'-R) = E_{D'}(u') - E_D(u) \qquad , \cdots (1.9)$$

$$E_{D'}(u') - E_D(u) = E_D(u') - E_D(u)$$
$$+ \mu \iint_{D'-D} \left[2u_x^2 + 2v_y^2 + (u_y + v_x)^2 \right] dx\,dy, \qquad \cdots (1.10)$$

であるから (1.5) により

$$E_D(u') - E_D(u) = -\int_C (u'X' + v'Y' - uX - vY)\,ds$$

$u' = u + \delta u$, $X' = X + \delta X$, とおき相反定理を用い，高次の項を省略すると

$$E_D(u') - E_D(u) = -\int_C (\delta u X + \delta v Y + u\delta X + v\delta Y)\,ds$$
$$= -2\int_C (X\delta u + Y\delta v)\,ds,$$

ここに (1.9') を代入し (1.6) から

$$X y_n - Y x_n = 2\mu(u_x - v_y) x_n y_n + \mu (u_y + v_x)(y_n^2 - x_n^2)$$

$$= \mu\left[2u_n x_n^2 y_n + u_n y_n (y_n^2 - x_n^2) - 2 v_n x_n y_n^2 + v_n x_n (y_n^2 \ldots \right.$$

$$= \mu [u_n y_n - v_n x_n] = -\mu\, \zeta|_C \quad , \cdots (1.11)$$

を代入すると

$$E_D(uu') - E_D(uu) = 2\mu \int_C \zeta^2 (\delta n)\, ds \quad , \cdots (1.12)$$

次に (1.10) 右辺第3項 は (1.11)によって.

$$2(u_x^2 + v_y^2) + (u_y + v_x)^2 \Big|_C = 2(u_n^2 x_n^2 + v_n^2 y_n^2) + (u_n y_n + v_n x_n)^2$$

$$= 2(u_n x_n + v_n y_n)^2 - 2u_n v_n x_n y_n + u_n^2 y_n^2 + v_n^2 x_n^2$$

$$= \zeta^2|_C \quad , \cdots\cdots (1.13).$$

なる故

$$\mu \iint_{D'-D} [2u_x^2 + 2u_y^2 + (u_y + v_x)^2]\, dx\, dy = -\mu \int_C \zeta^2 (\delta n)\, ds, \quad \cdots (1.14)$$

となり 結局

$$U(R'-R) = E_{D'}(uu') - E_D(uu) = \mu \int_C \zeta^2 (\delta n)\, dS, \quad (1.15')$$

を得る。

これは Pironneau の条件の2次元形である。

それ故 面積一定

$$\int_c (\delta n)\, ds = 0, \quad \cdots \quad (1.16)$$

の下に R が 極値をとる為には $(R'-R=0)$

$$s^2/c = \text{Const}, \quad \cdots \quad (1.17)$$

なる条件が必要である。

数値計算上は 既に微小変形による(δs)の求め方は述べてあるから s が一定となるよう δs 従って δn を決めればよい。

その際 (1.17)の定数は未定であるから $\frac{\partial s}{\partial s} = 0$ となるよう δn を決める方がよい。

この操作では2位の微少量を無視しているので
このようにして得られた形状は正解そのものではないので この操作を繰り返せばよい。

なお 2次元問題を有限領域で 数値 解いたかぎりでは 先端がとがっている (3次元回転体でもそうだった) が、3次元回転体の場合のようにうまく証明出来ない。

この点には疑問が残るが、少くとも先端が丸ければ解がうまく収束しない事は間違いない。

(∵ s は左右で符号が違うから先、後端では 両から急
に[illegible]する必要[illegible])

2. 2次元オゼーン流れ

オゼーン方程式は

$$\left.\begin{aligned}\rho U u_x &= -p_x + \mu \Delta u \\ \rho U v_x &= -p_y + \mu \Delta v\end{aligned}\right\} \cdots \quad (2.1)$$

連続の式は

$$u_x + v_y = 0 , \quad \cdots \quad (2.2)$$

逆流れでは

$$\left.\begin{aligned}-\rho U \tilde{u}_x &= -\tilde{p}_x + \mu \Delta \tilde{u} \\ -\rho U \tilde{v}_x &= -\tilde{p}_y + \mu \Delta \tilde{v}\end{aligned}\right\} \cdots \quad (2.3)$$

$$\tilde{u}_x + \tilde{v}_y = 0 , \quad \cdots \quad (2.4)$$

(2.3) は (2.1) の随伴方程式である。

もし物体が前後左右対称ならば明らかに

$$\left.\begin{aligned}\tilde{u}(+x, y) &= -u(-x, y) \\ \tilde{v}(x, y) &= v(-x, y) \\ \tilde{p}(x, y) &= p(-x, y)\end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

さて この場合 前節の E 積分は有限ではないので

次の積分を考える。

$$E_D(\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}}) = \mu \iint_D \left\{ 2 u_x \tilde{u}_x + 2 v_y \tilde{v}_y + (u_y + v_x)(\tilde{u}_y + \tilde{v}_x) \right\} dxdy$$

$$\cdots (2.6)$$

明らかに $E_D(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}) = E_D(\boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{u}}),$ $\cdots$ (2.7)

(2.6) を部分積分すると

$$E_D = -F_D(\tilde{u}, u) - \int_C (\tilde{u}X + \tilde{v}Y)\,ds, \quad \cdots (2.8)$$

$$F_D(\tilde{u}, u) = \rho U \iint_D (\tilde{u}u_x + \tilde{v}v_x)\,dxdy, \quad (2.9)$$

X, Yは (1.6) と同じく境界の力成分である。

同様にして

$$\tilde{E}_D = F_D(u, \tilde{u}) - \int_C (u\tilde{X} + v\tilde{Y})\,ds, \quad \cdots (2.10)$$

$$F_D(u, \tilde{u}) = \rho U \iint_D (u\tilde{u}_x + v\tilde{v}_x)\,dxdy, \quad (2.11)$$

で

$$F_D(u, \tilde{u}) + F_D(\tilde{u}, u) = -\rho U \int_C (u\tilde{u} + v\tilde{v})\,ds, \quad (2.12)$$

そて境界条件は (1.3) と同じで

$$\left.\begin{array}{l} u = -U \\ v = 0 \end{array}\right\} \text{on } C, \quad (2.13)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{u} = U \\ \tilde{v} = 0 \end{array}\right\} \text{on } C, \quad (2.14)$$

(2.8)に代入すると

$$UR = U\int_C X\,ds = -F_D(u, \tilde{u}) - F_D(\tilde{u}, u), \quad \cdots (2.15)$$

C'を前節同様 C の変形とすると、

$$U(R'-R) = E_D(u,\tilde{u}) + F_D(\tilde{u},u) - E_{D'}(u',\tilde{u}') - F_{D'}(\tilde{u}',u'), \quad \cdots (2.16)$$

$$E_{D'}(u',\tilde{u}') + F_{D'}(\tilde{u}',u')$$
$$= E_D(u',\tilde{u}') + F_D(\tilde{u}',u') + E_{D'-D} + F_{D'-D},$$
$$= -\int_C(\tilde{u}'X'+\tilde{v}'Y')ds + E_{D'-D} + F_{D'-D}, \quad (2.17)$$

前同様 C の近くでは、$u_s = v_s = \tilde{u}_s = \tilde{v}_s = 0$ なる

$$2u_x\tilde{u}_x + 2v_y\tilde{v}_y + (u_y+v_x)(\tilde{u}_y+\tilde{v}_x) = \zeta\tilde{\zeta}, \quad (2.18)$$

$$\tilde{u}u_x + \tilde{v}v_x\Big|_C = \tilde{u}_n u_n x_n \quad (2.19)$$

故

$$E_{D'-D} + F_{D'-D} = \mu\int_C \zeta\tilde{\zeta}\,\delta n\,ds + \rho U^2\int_C u_n x_n\,\delta n\,ds, \quad (2.20)$$

$$\int_C(-\tilde{u}X - \tilde{v}Y + \tilde{u}'X' + \tilde{v}'Y')ds$$
$$\fallingdotseq \int_C(\delta\tilde{u}X + \delta\tilde{v}Y + \tilde{u}\delta X + \tilde{v}\delta Y)ds$$
$$= \int_C(\delta\tilde{u}X + \delta\tilde{v}Y + \delta u\tilde{X} + \delta v\tilde{Y})ds, \quad (2.21)$$

$$\because \int_C(\delta u\tilde{X} + \delta v\tilde{Y})ds = \int_C(\tilde{u}\delta X + \tilde{v}\delta Y)ds, \quad (2.22)$$

△式は (2·8) と (2·10) とを等置して (2·12) を用い

かつ $u = -\tilde{u} = -U,\ v = \tilde{v} = 0$ on C

$$\int_C x_n ds = 0$$

つまり物体が閉じていれば

$$\int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y) ds = \int_C (u \tilde{X} + v \tilde{Y}) ds, \quad (2\cdot23)$$

さらに前回示した

$$\left.\begin{aligned} \delta u|_c &= \zeta y_n \delta n \\ \delta v|_c &= -\zeta x_n \delta n \end{aligned}\right\} \quad \cancel{X} y_n - Y x_n = -\mu \zeta, \quad (2\cdot24)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta \tilde{u}|_c &= \tilde{\zeta} y_n \delta n \\ \delta \tilde{v}|_c &= -\tilde{\zeta} x_n \delta n \end{aligned}\right\} \quad \tilde{X} y_n - \tilde{Y} x_n = -\mu \tilde{\zeta}, \quad (2\cdot25)$$

なるから

$$E_D(u) - E_D(u') = 2\mu \int_C \zeta \tilde{\zeta}\, \delta n\, ds, \quad (2\cdot26)$$

$$\therefore U \delta R = \int_C \left[\rho U^2 u_n x_n - \mu \zeta \tilde{\zeta} \right] \delta n\, ds, \quad (2\cdot27)$$

それから $\int_C \delta n\, ds' = 0$, (2·28)

の條件の下に　$\delta R = 0$ なるためには

$$\rho U^2 u_x - \mu \zeta \xi^2 = \mathrm{Const}, \qquad \text{--- (2.29)}$$

なる事が必要である。

薄い物体を考えると物体の中央部では u を含む第1項は小さいと考えられるのでストークス流れの条件に似ており、左辺第2項が小さければ

$$u_x = \mathrm{Const}, \qquad (2.30)$$

であるが u_x は前後で符号が変るので右辺の定数は 0，つまり $u = \mathrm{Const.}$，と　(2.31)

となるがこれは近似的に空洞流れに一致する。

附録A 3次元空洞流れ

空洞流れは附加質量の最小値問題として定義する事が出来る。(Bergman-Schiffer*)

速度ポテンシャルは

$$\phi(Q) = \iint_S \left[\phi(P) \frac{\partial}{\partial n} S(P,Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} S(P,Q) \right] dS, \quad (A.1)$$

$$S(P,Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R(P,Q)}, \quad R = \overline{PQ}, \quad (A.2)$$

境界条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n} \quad \text{on } S, \quad (A.3)$$

無限遠方では(左右対称の場合を考えて)

$$\phi(Q) \longrightarrow \frac{x'}{4\pi r'^3} A + \cdots, \quad (A.4)$$

$$A = \iint_S \left[\phi \frac{\partial x}{\partial n} - x \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS$$

$$= -\iint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds + V = -\iint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \quad (A.5)$$

$$V = \iint_S x \frac{\partial x}{\partial n} dS, \quad ; \text{volume}, \quad (A.6)$$

ところで

$$E_D(\phi) = -\iint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \iiint_D (\nabla \phi)^2 dx\,dy\,dz, \quad (A.7)$$

は運動エネルギの2倍である。

そこで今体積一定の下に S が (δn) だけふくれて、

S' になったとすると

$$\iint_S (\delta n)\, dS = 0, \qquad (A\cdot 8)$$

S' の解を ϕ' とすると

$$A(\phi') - A(\phi) = E_{D'}(\phi') - E_D(\phi), \qquad (A\cdot 9)$$

$$E_{D'}(\phi') = E_D(\phi') + \iiint_{D'-D} (\nabla\phi)^2\, dx\, dy\, dz,$$

$$\fallingdotseq -\iint_S \phi' \frac{\partial \phi'}{\partial n} dS - \iint_S (\nabla\phi)^2 (\delta n)\, dS, \qquad (A\cdot 10)$$

$$\therefore\ E_{D'}(\phi') - E_D(\phi) = \iint_S \left[\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi'\frac{\partial\phi'}{\partial n}\right) - (\nabla\phi)^2 \delta n\right] dS,$$

$\phi' = \phi + \delta\phi$ とおくと

$$-\phi\frac{\partial\phi}{\partial n} + \phi'\frac{\partial\phi'}{\partial n} \doteqdot \delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial n} + \phi\frac{\partial\delta\phi}{\partial n},$$

で明らかに

$$\iint_S \delta\phi \frac{\partial\phi}{\partial n} dS = \iint \phi\frac{\partial\delta\phi}{\partial n} dS = \iiint_{D'-D}$$

$$\therefore\ A(\phi') - A(\phi) = -\iint_S \left[2\phi\frac{\partial}{\partial n}(\delta\phi) + (\nabla\phi)^2 \delta n\right] dS, \qquad (A\cdot 11)$$

ここで $2\iint_S \phi \frac{\partial}{\partial n}(\delta\phi)\, dS = 2\iint_S \phi \frac{\partial}{\partial n}(\Phi' - \Phi)\, dS$

ここに $\Phi' = x + \phi', \quad \Phi = x + \phi,$
$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\Phi'\right|_{S'} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_S = 0 \qquad \cdots (A.11)$$

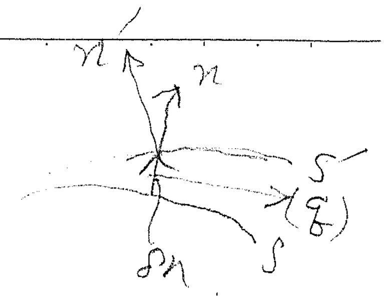
それ故
$$2\iint_S \phi \frac{\partial}{\partial n}\delta\phi\, dS = 2\iint_S \phi \frac{\partial \Phi'}{\partial n} dS$$
$$= 2\iint_{S'} \phi \frac{\partial \Phi'}{\partial n} dS - 2\iiint_{D'-D} \nabla\phi\nabla\Phi' \, dS$$
$$= -2\iint_{S'-D} \nabla\phi\nabla\Phi\, dS \simeq -2\iint_S [\phi_x + (\nabla\phi)^2]\,\delta n\, dS.$$

$$\therefore A(\phi') - A(\phi) = \iint_S [2\phi_x + (\nabla\phi)^2]\,\delta n\, dS$$
$$= \iint_S (\nabla\Phi)^2\,\delta n\, dS, \qquad \cdots (A.12)$$
$$\because \iint \delta n\, dS = 0$$

それ故 A の極値は (A.8) の条件の下で

$$(\nabla\Phi)^2 = \text{Const}, \qquad (A.13)$$

の時，つまり C 上の速度が等しい時に得られる。
この時，(A.13) となるように δn を決めるにはやはり
δn 拡によっておこる速度変化を求めておく方から
やり易い。



$$\frac{\partial}{\partial n}(\delta\phi) = \left.\frac{\partial \Phi'}{\partial n}\right|_{s} - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{s}$$

$$= \left.\frac{\partial \Phi'}{\partial n}\right|_{s} \quad , \cdots (A\cdot13)$$

今S'上で流速をq その方向を(s')とすると、

$$\Phi' \doteqdot \Phi'|_{s} + \delta n' \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n'}\right|_{s'} + \delta s' \left.\frac{\partial \Phi}{\partial s'}\right|_{s'}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s'}\right|_{s'} \doteqdot \left.\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right|_{s} = q \quad , \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial n'}\right|_{s'} = 0 ,$$

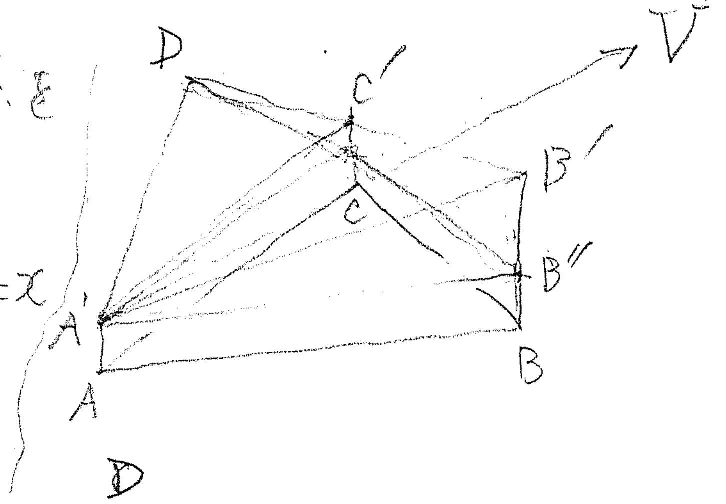
ですから

$$\frac{\partial}{\partial n}(\delta\phi) = \left.\frac{\partial \Phi'}{\partial n}\right|_{s} \doteqdot \frac{\partial}{\partial n}(\delta s')\, q \doteqdot q\frac{\partial}{\partial s}(\delta n) \quad , \cdots (A\cdot14)$$

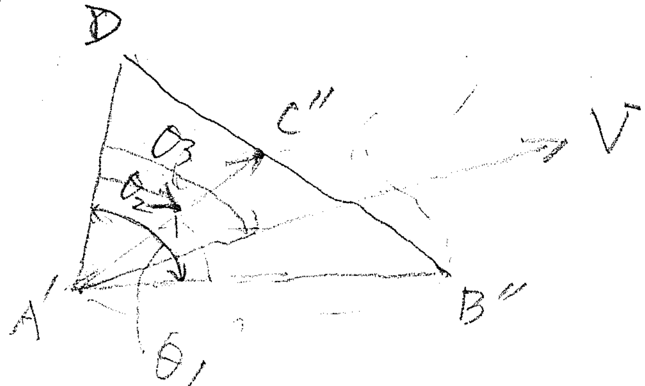
つまり図のように近似的には流向が容形分だけ少し変ると考えればよい。(3角要素についての計算法を次頁に示す)

この境界条件で$\delta\phi$を求めればよいが、もっと近似的にはこれだけの吹出しをS上においてもよいであろう。

Sの3角形要素をABCとして以下 $\frac{\partial}{\partial s}(\delta n)=x$ を計算した。



$\overline{AA'}=\alpha$
$\overline{BB'}=\beta$
$\overline{CC'}=\gamma$



$$\left.\begin{array}{l}\angle DA'B''=\theta_1\\ \angle DA'C''=\theta_2\\ \angle DA'V=\theta_3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=a\\ \overline{BC}=b\\ \overline{CA}=c\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle B'A'B''=\dfrac{\beta-\alpha}{a}\\ \angle C'A'C''=\dfrac{\gamma-\alpha}{c}\end{array}\right\}.$$

$$\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\delta_1$$

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\delta_2$$

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon\sin\theta_2=\dfrac{\gamma-\alpha}{c}\\ \varepsilon\sin\theta_1=\dfrac{\beta-\alpha}{a}\\ \varepsilon\sin\theta_3=x\end{array}\right\}$$

xを求む。

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1=\delta_1+\delta_2\\ \theta_2=\delta_2-\delta_1\end{array}\right\}.$$

$$\varepsilon\sin\theta_1=\varepsilon\left[\sin\delta_1\cos\delta_2+\sin\delta_2\cos\delta_1\right]$$

$$\varepsilon\sin\theta_2=\varepsilon\left[\sin\delta_2\cos\delta_1-\sin\delta_1\cos\delta_2\right]$$

$$2\varepsilon\sin\delta_2\cos\delta_1=\frac{\beta-\alpha}{a}+\frac{\gamma-\alpha}{c}$$

$$2\varepsilon\cos\delta_2\sin\delta_1=\frac{\beta-\alpha}{a}-\frac{\gamma-\alpha}{c}$$

$$\theta_3 = \delta_2 + \delta_3$$

$$\chi = \cancel{\varepsilon} \sin\theta_3 = \varepsilon\left(\sin\delta_2\cos\delta_3 + \cos\delta_2\sin\delta_3\right)$$

$$= \frac{\cos\delta_3}{2\cos\delta_1}\left(\frac{\beta-\alpha}{a} + \frac{\gamma-\alpha}{c}\right) + \frac{\sin\delta_3}{2\sin\delta_1}\left(\frac{\beta-\alpha}{a} - \frac{\gamma-\alpha}{c}\right)$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{a}\,\frac{\sin(\delta_1+\delta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_2)} + \frac{\gamma-\alpha}{c}\,\frac{\sin(\delta_1-\delta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\delta_1 \pm \delta_3 = \frac{\theta_1-\theta_2}{2} \pm \left(\theta_3 - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$= \begin{Bmatrix} -\theta_2 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \pm \theta_3 = \begin{Bmatrix} \theta_3-\theta_2 \\ \theta_1-\theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(\delta n) = \chi = \frac{1}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\left[\frac{\beta-\alpha}{a}\sin(\theta_3-\theta_2) + \frac{\gamma-\alpha}{c}\sin(\theta_1-\theta_3)\right]$$

No.

Date

Lamb, p.580

$$\Phi = \mu\left[2u_x^2 + 2v_y^2 + 2w_z^2 + (w_y + v_z)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_x + u_y)^2\right]$$

$$2F = \iiint \Phi \, d\tau = \mu \iiint (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, d\tau$$

$u, v, w = 0$ on S

$$\Phi = \mu\{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\} - 4\mu(v_y w_z - v_z w_y + w_z u_x - u_z w_x + u_x v_y - u_y v_x)$$

$\because \ (u_x + v_y + w_z)^2 = 0$

P.581

$$2F = \mu \iiint |\nabla w|^2 d\tau - \mu \iint_S \frac{\partial}{\partial n} q^2 \, dS + 2\mu \iint \begin{vmatrix} l, m, n \\ u, v, w \\ \xi, \eta, \zeta \end{vmatrix} dS$$

$v(w_z \, dx\, dz - w_y \, dx\, dy) +$

No.

Date

$$4\pi\left(\frac{\partial}{\partial y}U^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x}V^{(1)}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\lg R + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y^2}{R^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{xy}{R^2}$$

$$= \frac{2y}{R^2} - \frac{2y^3}{R^4} + \frac{y}{R^2} - \frac{2x^2y}{R^4} + \frac{\partial}{\partial y}\lg R$$

$$= \frac{3y}{R^2} - \frac{2y}{R^2} + \frac{y}{R^2} = \frac{2y}{R^2}$$

$$4\pi\left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial V^{(2)}}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{xy}{R^2} - \frac{\partial}{\partial x}\lg R - \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{R^2}$$

$$= -\frac{x}{R} + \frac{2xy^2}{R^4} - \frac{2x}{R^2} + \frac{2x^3}{R^4} - \frac{x}{R^2} = -\frac{x}{R^2}$$

$$4\pi\left(\frac{\partial U^{(3)}}{\partial y} - \frac{\partial V^{(3)}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(1) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{xy}{R^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2}{R^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{R^2}$$

$$= \frac{2x}{R^2}$$

$$4\pi\left(\frac{\partial U^{(4)}}{\partial y} - \frac{\partial V^{(4)}}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2}{R^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{xy}{R^2} - \frac{\partial}{\partial x}(1)$$

$$= \frac{2y}{R^2}$$

$$4\pi\ \frac{\partial}{\partial x}U^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x}\lg R + \frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2}{R^2} = \frac{x}{R^2} - \frac{2xy^2}{R^4} = \frac{x(x^2-y^2)}{R^4}.$$

$$4\pi\ \frac{\partial}{\partial x}U^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{xy}{R^2} = -\frac{y}{R^2} + \frac{2x^2y}{R^4} = \frac{y(x^2-y^2)}{R^4}$$