"波の強制力 其の他に関する覚書"

防衛大学校
別所正利

昭和 39年 8月 18日

内容

頁

DIRECT COPY SYSTEMS

1. 序言

現在波浪中の諸問題は花岡の華麗な理論，丸尾の円熟した考察等によって理論的には略々完成しているにも拘わらず，理論が難解であり，数値計算が複雑であり又其のまゝの項が物理的に親密な諸量にはっきりと結びつけられていない為に，実用上はフルードクリロッフ理論に2次元的計算の諸結果理論的成果を参照してストリップ法を用いている様である。[8)9)]

従って今後の発展の為には此等の理論相互間の関係をはっきり認識すると云う事が重要な問題であると考えられる。

特に花岡の理論はすべて線型的に整備されているので他の理論との比較に当ってはかなりの困難を感ずる。

例えば丸尾によれば振動しつゝ運動する様な物体に働く力 F_i はベルヌーイの定理

$$p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} q^2 \quad , \quad \cdots\cdots (1.1)$$

に準じて

$$F_i = \rho \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial n} ds - \frac{\rho}{2} \iint_S q^2 \frac{\partial x_i}{\partial n} ds , \quad \cdots\cdots (1.2)$$

但し $i=1,2,3$ で $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ とする。

であって，此の右辺第2項はラガリーの公式で与えられ従って基本振動部分を含まない[6)]から F_i の基本振動部分 $\hat{F_i}$ は

$$\hat{F_i} = \rho \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial n} ds , \quad \cdots\cdots (1.3)$$

であると云う。

一方花岡によれば φ を撹乱のポテンシャルとして

$$p \fallingdotseq \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad \cdots\cdots (1.4)$$

であるから

$$\hat{F_i} = \rho \iint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial x_i}{\partial n} ds , \quad \cdots\cdots (1.5)$$

であると云う[1)]。

A4×100
DIRECT COPY SYSTEMS

此の形は明らかに(1.3)と異なる

然しながら花岡の境界条件[1)]

$$\frac{\partial}{\partial n}\overline{\varphi_i} = \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial y}\Big|_{y=0} = \left(-i\omega + V\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \chi_i}{\partial n}, \quad \cdots\cdots (1.6)$$

但し φ_i は

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial n} = -\frac{\partial \chi_i}{\partial n}, \quad \cdots\cdots (1.7)$$

の様な境界条件を持つ函数とし、上横棒は今後共複素共軛値を意味するものとする。

又 φ_i は $e^{i\omega t}$ に比例するものとする。

(1.6)を使って(1.5)を $y=0$ の面上で部分積分すると、形式的に(1.3)に移行する事が証明出来る。

或いは又、後述の花岡の第2定理(6.6)を用いれば(1.5)右辺第2項は、(1.7)を使って、

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\chi_i}{\partial n}ds = -\iint \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i^*}{\partial n}ds = -\iint \varphi_i^*\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)ds, \quad \cdots(1.8)$$

此処に φ_i^* は後述の φ_i の逆ポテンシャルである。

であるから、此れは2次の項であって線型理論の観点から考えれば当然省略すべき項となる。

此の様にして線型的立場に立って言えば、花岡理論における(1.5),(1.6)両式は(1.3),(1.7)式と等価である事になるが、(1.6)の境界条件よりは(1.7)の方が直観的で理解しやすい~~ので~~し、又2次元問題等の他の分野では(1.3),(1.7)式の記述になっているので便利であろう。

さて此の覚書の目的は波の強制力等に関するHaskind-花岡の公式の説明であるが、順序として速度ポテンシャル、特に2次元の境界値問題等についても考察する。

2. Green 函数

先ず x の正の方向に単位速度の流れがあるものとし z-軸を上方にとり、速度ポテンシャルを

A4×100
DIRECT COPY SYSTEMS

$$\varphi'(x,y,z,t) = Re\left[i\omega a e^{i\omega t}\varphi(x,y,z)\right], \quad \cdots\cdots (2\cdot1)$$

とおく。但し t は時間, ω は円周波数, a は振動の振巾とする。
水面 $z=0$ では

$$L[\varphi] = 0 \quad , \quad z=0 \quad \cdots\cdots (2\cdot2)$$

但し
$$L \equiv \lim_{\mu\to+0}\left[\left(i\omega+\frac{\partial}{\partial x}+\mu\right)^2 + g\frac{\partial}{\partial z}\right], \quad \cdots\cdots (2\cdot3)$$

g は重力の常数とする。
此の条件を満足し且つ点 $Q\equiv(x',y',z')$ に $\frac{1}{r}$ の様な特異点を持つ函数は[1)3)]

$$G(P,Q) = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{g}{\pi}\lim_{\mu\to+0}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K e^{K(z+z')+iK(\widetilde{\omega}-\widetilde{\omega'})}\,dK d\theta}{(K\cos\theta+\omega-\mu i)^2 - gK}, \quad \cdots (2\cdot4)$$

但し $P\equiv(x,y,z)$, $Q\equiv(x',y',z')$, $r_1=\overline{PQ}$, $r_2=\overline{P\bar{Q}}$, $\bar{Q}\equiv(x',y',-z')$
$\widetilde{\omega} = x\cos\theta + y\sin\theta$, $\widetilde{\omega'} = x'\cos\theta + y'\sin\theta$。
即ち
$$L_P G(P,Q) = 0 \quad , \quad \text{for } z=0 \quad , \quad \cdots (2\cdot5)$$

一方
$$L^* \equiv \lim_{\mu\to+0}\left[\left(i\omega+\mu-\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + g\frac{\partial}{\partial z}\right], \quad \cdots (2\cdot6)$$

を導入すると
$$L^*_Q\, G(P,Q) = 0 \quad , \quad \text{for } z'=0 \quad , \quad \cdots (2\cdot7)$$

が容易に判る。
(2·7) の条件は花岡の reverse flow potential[5)] の水面条件であるから, * 印によってそれを表わす事にすると

$$G(Q,P) = G^*(P,Q) \quad , \quad \cdots\cdots (2\cdot8)$$

の様に書ける。
即ち一般にグリーン函数は $G(P,Q)=G(Q,P)$ なる対称性を持っているが我々の場合は此の (2·8) 式を持っている訳である。
特に一様流れのない場合は,

$$L \equiv L^* = \left[(i\omega+\mu)^2 + g\frac{\partial}{\partial z}\right], \quad G(P,Q) = G(Q,P), \quad \cdots (2\cdot9)$$

である。

A4×100
DIRECT COPY SYSTEMS

さて

$$\iint\left\{\varphi(Q)\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)-G(P,Q)\frac{\partial\varphi(Q)}{\partial n}\right\}ds$$

なる面積分を、P点の周り及び物体の表面，水面，無限遠方の円筒面，底面上に積分すると零になる筈である。

此の内Pの周りの積分は $4\pi\varphi(P)$，底面の積分は零，円筒面の積分は φ と G が共に発散波を持つと考えられるので零

水面上の積分は

$$-\iint_{z'=0}\left\{\varphi(Q)\frac{\partial}{\partial z_Q}G(P,Q)-G(P,Q)\frac{\partial\varphi}{\partial z_Q}\right\}dx\,dy.$$

であるから(2.2)，(2.7)を代入して部分積分し，φ が無限遠で高々~~[illegible]~~発散波を持つとすれば矢張零になる。

従って，

$$\varphi(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}G(P,Q)-\varphi\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)\right\}ds_Q, \quad \cdots(2.10)$$

がえられる。

又

$$H(k,\theta)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{kz-ik\varpi}\,ds, \quad \cdots(2.11)$$

なる函数を定義すると(2.1)，(2.4)を使って，(2.10)から，

$$\varphi(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\right)\frac{1}{r_1}ds-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(k\cos\theta+\omega-\mu i)^2+gK}{(k\cos\theta+\omega-\mu i)^2-gK}H(k,\theta)e^{kz+ik\varpi}\,dk\,d\theta \quad \cdots(2.12)$$

なる表示式もえられる。[1]

3. 波なし分布

φ は(2.10)以外にも波なし分布と適当な波源の組合せで表わす事も出来る。[10,13]

そこで一般の波なし分布について考えて見よう。

さて(2.2)は実虚部共に満足しなければならないから其の夫々については

$$LL^* \text{ or } L\bar{L}=\left\{\left(i\omega+\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+g\frac{\partial}{\partial z}\right\}\left\{\left(-i\omega+\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+g\frac{\partial}{\partial z}\right\}, \quad \cdots(3.1)$$

なる演算について水面上で零にならなければならない。

尚此処では波のないものを考えるから μ を考える事は必要がないので以下とった式を扱う。

A4×100
DIRECT COPY SYSTEMS

そこで更に

$$\tilde{L} \equiv \left[(i\omega+\frac{\partial}{\partial x})^2 - g\frac{\partial}{\partial z}\right],$$
$$\bar{\tilde{L}} \equiv \left[(-i\omega+\frac{\partial}{\partial x})^2 - g\frac{\partial}{\partial z}\right], \quad \cdots \quad (3.2)$$

なる随伴演算子を導入して

$$\varphi = \bar{L}\tilde{L}\bar{\tilde{L}} f \quad , \cdots\cdots\cdots \quad (3.3)$$

な函数 f を考えると

$$L\varphi = L\bar{L}\tilde{L}\bar{\tilde{L}} f =$$
$$= \left[(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\omega^2)^4 - 2g^2(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 6\omega^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\omega^4) + g^4\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right] f, \quad \cdots \quad (3.4)$$

であるから $\overbrace{}^{\text{逆に}}$ f が水面に関して上下$\overbrace{}^{\text{反}}$対称でありさえすれば水面条件を満足し，然も波のないポテンシャル φ を (3.3)式によって求める事は容易に出来る。[15]

例えば f として

$$(\frac{\partial}{\partial z})^{2l}(\frac{\partial}{\partial x})^m(\frac{\partial}{\partial y})^n(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}),$$
$$(\frac{\partial}{\partial z})^{2l+1}(\frac{\partial}{\partial x})^m(\frac{\partial}{\partial y})^n\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \quad \cdots \quad (3.5)$$

とすれば (3.3) の演算によって波のないポテンシャルが求められる。

特に2次元の場合は至極簡単である。

i) $\omega = 0$ の場合[15] は

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+g\frac{\partial}{\partial z} = \bar{L}, \quad \tilde{L}=\bar{\tilde{L}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - g\frac{\partial}{\partial z},$$
$$L\tilde{L} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - g^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \cdots \quad (3.6)$$

特に2次元では $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 故

$$L\tilde{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+g^2) \quad , \cdots\cdots \quad (3.7)$$

となるから 例えば

$$f_n = \frac{\sin n\theta}{r^n}, \quad \zeta = x+iz = re^{i\theta}, \quad n\geq 1, \quad \cdots (3.8)$$

とおくと，

$$\tilde{L} f_n = g\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\zeta^n} - \frac{in}{g\zeta^{n+1}}\right],$$

となるから一度 x で積分して．

A4 × 100
DIRECT COPY SYSTEMS

$$\varphi_n(x,z) = Re\left[\frac{1}{\zeta^n} - \frac{in}{g\zeta^{n+1}}\right], \cdots$$

更には

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_n(x,z) = Re\left[\frac{1}{\zeta^n} - \frac{in}{g\zeta^{n+1}}\right], \cdots \\ &\varphi_0(x,z) = Re\left[\log\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right) + \frac{2i}{g(\zeta^2-1)}\right],\end{aligned}\right\} \cdots(3.9)$$

が波なし分布の全体である。

ii) 一様流れがなければ[13]

$$\left.\begin{aligned}&L=\bar{L} = -\omega^2 + g\frac{\partial}{\partial z}, \quad \tilde{L}=\bar{\tilde{L}} = -\omega^2 - g\frac{\partial}{\partial z}, \\ &L\tilde{L} = \left(\omega^4 - g^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),\end{aligned}\right\} (3.10)$$

であるから，2次元では $\zeta = x+iz$ とおいて，上と同様にして

$$\varphi_n = I\left\{\frac{1}{\zeta^n} - \frac{in}{K\zeta^{n+1}}\right\}, \quad K=\frac{\omega^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda}, \cdots(3.11)$$

(3.9), (3.10) の $n=1$ の場合の流線を第1図に夫々実線点線で示す。　鎖線は (3.9) で φ_0 も含めた場合であるが此の場合は(3.9)から判る様に水面に特異点があるので波はないとしてもモーメンタム・ロスを伴う様な事になる。

さて此の様に上下動の場合は K が大きいと極めて円筒に近い[17]。

其の他の場合には簡単には求められないが φ_n を n ケ考えて n ケの点について流れ函数を与えれば大抵の場合解がえられる筈である。

特に K が大きいと $\varphi_n \to \frac{\sin n\theta}{r^n}$ で上下反対称のポテンシャルであるから此の時ローリング問題は鏡像を考えた物体の回転運動のポテンシャルで近似出来る。

一方此の問題で $K \to 0$ では (3.11) から判る様に $\varphi_n \to \cos n\theta / r^n$ で上下対称なポテンシャルで近似出来る。[1,2]

又此の極限で Ursell は波の振巾が消える様な断面（第1図上図）を発見し[13]，此れは実験的にもある程度確認された[14]。

此の様な波なし分布（準波なしと呼ぶ）を系統的に見出すのは簡単ではなさそうだが，とにかくいくらもありそうで，しかもその中には割合簡単な形なものも含まれていそうである。

逆に云えば横揺れ等では波が大きい方がよいのであるから，やはり形状に注意しないといけないと云う事である。

A4 × 100
DIRECT COPY SYSTEMS

4. 一様流れのない場合（2次元）

簡単の為に2次元で考えるが此の節の結論を3次元に拡張するのには殆ど問題がない。

今垂直軸として y を上向きにとると §2 のグリーン函数は

$$G(P,Q)=\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)-2\lim_{\mu\to 0}\int_0^\infty e^{k(y+y')}\frac{\cos k(x-x')}{k-K-\mu i}\,dk, \quad \cdots\quad (4.1)$$ [17]

但し $P\equiv(x,y)$, $Q\equiv(x',y')$, $r_1=\overline{PQ}$, $r_2=\overline{P\bar{Q}}$, $\bar{Q}\equiv(x',-y')$,

$K=\cancel{\omega^2}/g=2\pi/\lambda$, λ は波長 等である。

よって

$$\varphi(P)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}G(P,Q)-\varphi\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)\right\}ds_Q, \quad \cdots\quad (4.2)$$ [17]

x が充分大きいと

$$G(P,Q)\xrightarrow[|x|\gg 1]{}-2\pi i\,e^{K(y+y')+iK|x-x'|}, \quad \cdots\quad (4.3)$$ [17]

であるから

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y)&\xrightarrow[x\gg 1]{}-2\pi i\,e^{Ky+iKx}H^+(K),\\&\xrightarrow[x\ll -1]{}-2\pi i\,e^{Ky-iKx}H^-(K),\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad(4.4)$$ [17]

但し

$$H^{\pm}(K)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{Ky\mp iKx}\,ds, \quad \cdots\quad (4.5)$$

一方では φ は波源と波なし分布の和で表わされるから[13]，例えば

$$\varphi(x,y)=A\,G(x,y;0,0)+B\frac{\partial}{\partial x'}G(x,y;0,0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n f_n(x,y), \quad\cdots\quad (4.6)$$

此處に f_n は (3.11) で与えられるものとする。

従って (4.3), (4.4), (4.6) から，

$$H^+(K)=A-iB,\quad H^-(K)=A+iB, \quad\cdots\quad (4.7)$$

次に境界条件を考えよう。

i) 左右ゆれ

ポテンシャル φ_1'，振巾 a_1，$\varphi_1'=i\omega a_1 e^{i\omega t}\varphi_1$，

C上で $\dfrac{\partial\varphi_1'}{\partial n}=-i\omega a_1 e^{i\omega t}\dfrac{\partial x}{\partial n}$

よって

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\frac{\partial x}{\partial n}=-\frac{\partial x_1}{\partial n}, \quad \psi_1=-y, \quad (4.8)$$

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

ii) 上下ゆれ

ポテンシャル φ_2', 振巾 a_2, $\varphi_2' = i\omega a_2 e^{i\omega t}\varphi_2$,

よって

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} &= -\frac{\partial y}{\partial n} \equiv -\frac{\partial x_2}{\partial n},\\ \psi_2 &= x \equiv x_1,\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (4.9)$$

iii) 横ゆれ

ポテンシャル φ_3', 振巾 a_3, $\varphi_3' = i\omega a_3 e^{i\omega t}\varphi_3$,

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = -\left(x\frac{\partial y}{\partial n} - y\frac{\partial x}{\partial n}\right), \quad \psi_3 = -\frac{1}{2}(x^2+y^2), \quad \cdots (4.10)$$

iv) 波の反射

入射波 $\varphi_0' = \frac{g a_0}{\omega i} e^{ky+ikx+i\omega t}$

$$\varphi_0 = e^{ky+ikx}, \quad \cdots\cdots \quad (4.11)$$

反射波 $\varphi_4' = \frac{g a_0}{\omega i} e^{i\omega t}\varphi_4$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} &= -\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}\left(e^{ky+ikx}\right),\\ \psi_4 &= -\psi_0 = i\,e^{ky+ikx},\end{aligned}\right\} \quad (4.12)$$

此處で φ_i の共軛函数，即ち流れ函数を ψ_i とした。さて此等の境界条件は φ_i がすべて複素数であるから夫々実虚部の2つの条件を含めている訳であり，上の様に定義すると虚部はすべて零という斉次の境界条件になる訳である。

(4.6)から

$$\psi_i = A_i\tilde{G} + B_i\tilde{G}_{x'} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(i)}\tilde{f}_n, \quad i = 1\sim4, \quad \cdots (4.13)$$

但し右辺の～印は流れ函数を意味するものとしよう。

今 $A_i = \alpha_i e^{i\varepsilon_i}$, $B_i = \beta_i e^{i\delta_i}$, $A_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} + i\beta_n^{(i)}$, $\cdots (4.14)$

$$\tilde{G} = \tilde{G}_c + i\tilde{G}_s, \quad \tilde{G}_{x'} = \tilde{G}_c' + i\tilde{G}_s', \quad \cdots\cdots \quad (4.15)$$

と実虚部を分離すると (4.1)から先ず

$$\left.\begin{aligned}\tilde{G}_c &= -2\pi e^{ky}\cos kx, & \tilde{G}_s &= -2\pi e^{ky}\sin kx,\\ \tilde{G}_c' &= -2\pi K e^{ky}\sin kx, & \tilde{G}_s' &= 2\pi K e^{ky}\cos kx,\end{aligned}\right\} (4.16)$$

更に簡単の為に物体が左右対称であるとすると φ_1, φ_3 は x に関し反対称で $A_i = 0$, $A_{2n+1}^{(i)} = 0$, φ_2 は x に関し対称

で $B_i=0$, $A_{2n}^{(i)}=0$ となる。

(4.8) から (4.12) 迄の境界条件を Ψ_i に関して書いて見ると、

$i=1,3$)

$$\left.\begin{aligned}&\beta_i\cos\delta_i\,\widetilde{G_c}-\beta_i\sin\delta_i\,\widetilde{G_s}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}^{(i)}\widetilde{f_{2n}}=\begin{cases}-y, & \text{for } i=1,\\ -\dfrac{x^2+y^2}{2}, & \text{for } i=3,\end{cases}\\ &\beta_i\cos\delta_i\,\widetilde{G_s}+\beta_i\sin\delta_i\,\widetilde{G_c}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{2n}^{(i)}\widetilde{f_{2n}}=0,\end{aligned}\right\}\tag{4.17}$$

$i=2$)

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2\cos\varepsilon_2\,\widetilde{G_c}-\alpha_2\sin\varepsilon_2\,\widetilde{G_s}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}^{(2)}\widetilde{f_{2n+1}}=x,\\ &\alpha_2\cos\varepsilon_2\,\widetilde{G_s}+\alpha_2\sin\varepsilon_2\,\widetilde{G_c}+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n+1}^{(2)}\widetilde{f_{2n+1}}=0,\end{aligned}\right\}\cdots(4.18)$$

$i=4$)

此の場合は対称性から4組の方程式群がえられる。

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_4\cos\varepsilon_4\,\widetilde{G_c}-\alpha_4\sin\varepsilon_4\,\widetilde{G_s}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}^{(4)}\widetilde{f_{2n+1}}=e^{-ky}\sin kx,\\ &\alpha_4\cos\varepsilon_4\,\widetilde{G_s}+\alpha_4\sin\varepsilon_4\,\widetilde{G_c}+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n+1}^{(4)}\widetilde{f_{2n+1}}=0,\end{aligned}\right\}\tag{4.19}$$

$$\left.\begin{aligned}&\beta_4\cos\delta_4\,\widetilde{G_c}-\beta_4\sin\delta_4\,\widetilde{G_s}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}^{(4)}\widetilde{f_{2n}}=0,\\ &\beta_4\cos\delta_4\,\widetilde{G_s}+\beta_4\sin\delta_4\,\widetilde{G_c}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{2n}^{(4)}\widetilde{f_{2n}}=e^{ky}\cos kx,\end{aligned}\right\}\tag{4.20}$$

此等の聯立方程式の内右辺が0になる式について考えると G, f_n 等が互に一次独立とするとすべての係数が零となって意味のない解しかえられない事になるから、解がえられるとするならば、此等の函数の間に一つの関係が存在する事を意味する。

即ち (4.17) 第2式は $i=1,3$ に対し同じ式であると考えられるので

$$\frac{\beta_1\cos\delta_1}{\beta_3\cos\delta_3}=\frac{\beta_1\sin\delta_1}{\beta_3\sin\delta_3}=\frac{\beta_{2n}^{(1)}}{\beta_{2n}^{(3)}},\quad \text{よって}\ \delta_1=\delta_3,\quad\cdots(4.21)$$

次に (4.17) 第2式と (4.20) 第2式、(4.18) 第2式と (4.19) 第2式は (4.16) を考えると、やはり同じ式と考えられるから

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha_4\cos\varepsilon_4}{\alpha_2\cos\varepsilon_2}=\frac{\alpha_4\sin\varepsilon_4}{\alpha_2\sin\varepsilon_2}=\frac{\beta_{2n+1}^{(4)}}{\beta_{2n+1}^{(2)}},\quad \varepsilon_2=\varepsilon_4\\ &\frac{\beta_4\cos\delta_4-\frac{1}{2\pi K}}{\beta_1\cos\delta_1}=\frac{\beta_4\sin\delta_4}{\beta_1\sin\delta_1}=\frac{\beta_{2n}^{(4)}}{\beta_{2n}^{(1)}},\end{aligned}\right\}\tag{4.22}$$

更に (4.19), (4.20) の夫々第1式と第2式も (4.16) を考えれば夫々に同じ方程式と考えられるので、解く必要もなく.

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

$$\frac{\alpha_4 \cos\varepsilon_4}{\alpha_4 \sin\varepsilon_4} = \frac{-\alpha_4 \sin\varepsilon_4 - \frac{1}{2\pi}}{\alpha_4 \cos\varepsilon_4} = \frac{\alpha^{(4)}_{2n+1}}{\beta^{(4)}_{2n+1}},$$
$$\frac{\beta_4 \cos\delta_4}{\beta_4 \sin\delta_4} = \frac{-\beta_4 \sin\delta_4}{\beta_4 \cos\delta_4 - \frac{1}{2\pi K}} = \frac{\alpha^{(4)}_{2n}}{\beta^{(4)}_{2n}}, \quad \cdots\cdots (4.23)$$

此等の式から，まず φ_1, φ_2 の諸係数が判れば φ_3 については波の振巾だけ判れば (4.21) で各係数が決まってしまい，φ_4 については (4.22) でその虚部については各係数の比がきまり，且つ (4.23) で波の振巾迄きまってしまう。

即ち，計算すれば，

$$A_4 = \alpha_4 e^{i\varepsilon_4} = -\frac{\sin\varepsilon_4}{2\pi} e^{i\varepsilon_4},$$
$$B_4 = \beta_4 e^{i\delta_4} = -\frac{i\sin\delta_2}{2\pi K} e^{i\delta_2}, \quad \cdots (4.24)$$

結局の所，今の場合は $i=1, 2$ について各2組，$i=3$については実部のみ1組，合計5組の聯立方程式を解けば，それで充分である事になる。此れを3次元で考えると波源の置き方等の点でうまく成功しない。

5. 物体に働く力（2次元一様流れなし）

さて周期的な力は (1.3) の形で与えられるから，無次元的に考えて，j なる方向の φ_i による力を

$$F_{ij} = \int_C \varphi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\int_C \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds,$$

モーメントは
$$F_{i,3} = \int_C \varphi_i \left(x\frac{\partial y}{\partial n} - y\frac{\partial x}{\partial n}\right) ds = -\int_C \varphi_i \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} ds, \quad \cdots (5.1)$$

と定義しておこう。((4.8), (4.9), (4.10) の境界条件を使ってある。)

特に波の強制力は，

$$E_i = +\int_C (\varphi_0 + \varphi_4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_i}{\partial n} \\ x\frac{\partial y}{\partial n} - y\frac{\partial x}{\partial n} \end{array} \right\} ds = -\int_C (\varphi_0 + \varphi_4) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds, \quad \cdots (5.2)$$

と書ける。

今

$$\int \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) ds, \quad i = 1 \sim 4$$

なる積分を物体表面Cと水表面Fと無限遠の下半円上にとると，F上では水面条件で消え，下半円上でも φ_i, φ_j が共に

A4×100
DIRECT COPY SYSTEMS

外側に出て行く波と考えられるのでやはり消える。[4)]

よって

$$\int_C \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds = \int_C \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds , \quad \text{- - - -} \quad (5.3)$$

(5.1)で考えれば

$$F_{ij} = F_{ji} , \quad \text{- - - - - -} \quad (5.4)$$

此等の関係は計算で確かめられている様である。[11) 12)]

次に(5.2)式について考えるに $\varphi_0 + \varphi_4$ の境界値は(4.12)であるから、更に(4.4)を使って、

$$E_i = \int_C \left\{ \varphi_i \frac{\partial}{\partial n}(\varphi_0+\varphi_4) - (\varphi_0+\varphi_4)\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right\} ds$$

$$= -2\pi H_i^{-}(K) + \int_C \left\{ \varphi_i \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} - \varphi_4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right\} ds$$

即ち(5.3)によって、

$$E_i = -2\pi H_i^{-}(K) = -2\pi (A_i + iB_i) , \quad \text{- - - -} \quad (5.5)$$

$$\left(= \int_C \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{ky+ikx} ds , \right)$$

此れ等が Haskind の関係である。[4)]

此の式は E_i が運動 i による波の入射波と同じ方向に進むものの振巾に比例する事を示している。

又最右辺第1項はフルード・クリロッフの力を示しており、第2項は、それを運動 i によるダブレットだけ補正すればよい事を示している。

さて次に

$$\int \left(\varphi_i \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial n} - \bar{\varphi}_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) ds ,$$

なる積分を考えよう。[4) 16)]

今度は φ_i は波が外に出るのに対し、$\bar{\varphi}_j$ は波が内側に向いている、いわば虚像ポテンシャルであるから、無限大半円上の積分は有限になる。[4)]

(4.4)を代入して計算すると、

$$\int_C \left(\varphi_i \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial n} - \bar{\varphi}_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) ds = 2\pi^2 i \left[H_i^{+} \bar{H}_j^{+} + \bar{H}_i^{+} H_j^{+} + H_i^{-} \bar{H}_j^{-} + \bar{H}_i^{-} H_j^{-} \right] , \quad \text{- -} \quad (5.6)$$

此れは明らかに虚数値である。

~~特に~~ 又 $j = 1, 2, 3$ では

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}$$

であるから

A4×100
DIRECT COPY SYSTEMS

$$F_{ij} = -\int_C \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds = -\int_C \bar{\varphi}_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds + 2\pi^2 i \left[\sum H_i H_j \right],$$

即ち

$$\mathcal{I}\{F_{ij}\} = 2\pi^2 Re\left[H_i^+ \overline{H_j^+} + H_i^- \overline{H_j^-}\right] = 4\pi^2 Re(A_i \bar{A}_j + B_i \bar{B}_j), \quad \text{---}(5.7)$$

特に $i=j$ ならば $\mathcal{I}\{F_{ii}\} = 4\pi^2 \left[A_i\bar{A}_i + B_i\bar{B}_i\right]$, ---(5.8)

である。[4),16)]

此れはよく知られたダムピングが生成波高の自乗に比例する力であると云う式であって、(5.5)と較べれば判る様に此れは(5.5)の絶対値の自乗になっている。[4)]

即ち

$$\mathcal{I}\{F_{ii}\} = E_i \bar{E}_i, \quad \text{----}(5.9)$$

此れは3次元では勿論一般には成立ないが、$E_i\bar{E}_i$ を各方向に積分したものがダムピングに等しくなる事になる。[4)]

此の式から種々の面白い実験が考えられるであろう。

尚此処でダムピングと強制力が結びついているから、例えばダムピングは大きいが波からの力は少いと云う様なうまい具合にはゆかない事になる。

又ダムピングの極大化と云う様な問題も考えられるが此の為には例えば(4.5)式の絶対値の自乗の変分をとれば積分方程式がえられるけれども此の方程式の核 e^{ky+ikx} は正則であるので極値は存在しない。換言すればダムピングはいくらでも大きく出来る事になる。

そて最後に従来・力は(5.1)等でC上で積分して求めている。[10) 11) 12)]

此れは等角写像が簡単に判る場合は便利であるが、形が図式的に与えられる様な場合はむしろ(4.16)以下の聯立方程式を直接とりた方が便利であろう。

その様な時には $j=1,2$ については

$$F_{ij} = \int_C \varphi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \int_C x_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds + \int_{C'} \left(\varphi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} - x_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) ds, \quad \text{---}(5.10)$$

とおいて C' を適当な曲線にとれば簡単な計算(数値)に還元出来る。 $j=3$ には此れはうまくない。

A4×100
DIRECT COPY SYSTEMS

6. 一様流れのある場合（3次元）

此の場合も§4, 5と同様な考察をすれば面白い結果が出そうであるが、此れは大変面倒なことなので、(5.3), (5.5) (5.6)の拡張についてだけ考える。

矢張運動 i によるポテンシャルを φ_i とし、$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}$ が実数となる様にえらんでおく。

$i=1\sim6$，として，7は波の反射，0は入射波を意味するものとする。

先ず花岡[5]に従って φ の逆ポテンシャル φ^* を (2.6) を満足し，且つ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=\frac{\partial\varphi^*}{\partial\nu}=\frac{\partial\overline{\varphi_i}}{\partial\nu}=\frac{\partial\overline{\varphi_i^*}}{\partial\nu}, \quad \cdots (6.1)$$

の様に定義する。

グリーン函数は (2.4) と同様にして，

$$G^*(x,y,z;x',y',z')=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{g}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{Ke^{K(z+z')+iK(\varpi-\varpi')}\,dK\,d\theta}{(K\cos\theta+\omega-\mu i)^2-gK},$$

$$=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{g}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{Ke^{K(z+z')-iK(\varpi-\varpi')}\,dK\,d\theta}{(K\cos\theta+\omega-\mu i)^2-gK}, \quad \cdots (6.2)$$

となるから (2.4) と較べて，

$$G^*(x,y,z;x',y',z')=G(-x,-y,z;-x',-y',z')$$

$$=G(-x,y,z;-x',y',z'), \quad \cdots (6.3)$$

である。

此れから (2.9) と同様にして，

$$\varphi^*(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{\partial\varphi^*}{\partial\nu}-\varphi^*\frac{\partial}{\partial\nu}\right\}G^*(x,y,z;x',y',z')\,ds.$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{\partial\varphi^*}{\partial\nu}-\varphi^*\frac{\partial}{\partial\nu}\right\}G(-x,y,z;-x',y',z')\,ds, \quad -(6.4)$$

が得られる。

此の様に φ^* は φ と丁度反対側に波を持って居り，且つ (6.1) の条件をも満たすから，最初の定義から考えて，全く一様流れの方向を逆にしただけの違いであると考えられる。

従って境界値が前後対称（今左右は対称として考えない）と非対称な部分に別けられるとすると

即ち

$$\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial \nu}\right)_s + \left(\frac{\partial \varphi_\xi}{\partial \nu}\right)_a .$$

φ_ξ も φ_ξ^* も夫々別けられて.

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_a, \quad \varphi^* = \varphi_s^* + \varphi_a^*$$

即ち

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_s, \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_a .$$

そうすると上の考察から[5)]

$$\varphi_s^*(x,y,z) = \varphi_s(-x,y,z), \quad \varphi_a^*(x,y,z) = -\varphi_a(-x,y,z), \quad \cdots (6.5)$$

従って今

$$\iint_{S+F+R} \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial n} - \varphi_j^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) ds$$

なる積分を考えると前同様 F, R 上の積分は消えて, 花園の第2定理がなり立つ[5)].

即ち

$$\iint_S \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial n} - \varphi_j^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) ds = 0, \quad j,i \neq 0 \quad \cdots (6.6)$$

前同様周期力として

$$F_{ij} = -\iint_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds, \quad i,j = 1 \sim 6, \quad \cdots (6.7)$$

とおくと (6.1) を使って (6.6) から

$$F_{ij} = -\iint_S \varphi_j^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds, \quad \cdots\cdots (6.8)$$

従って境界条件の対称性に従って (6.5) から

$$F_{ij} = \pm F_{ji}, \quad \cdots (6.9)$$

が成立つ[5)]が一般には.

$$F_{ij} - F_{ji} = \iint_S (\varphi_j - \varphi_j^*) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds, \quad \cdots (6.10)$$

である。

然し乍ら (6.5) の関係があるから, 元々境界値問題をとく時に対称部分と非対称部分に別けて解いておけば宜しい。

次に波の強制力については、

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

$$\varphi_0 = e^{K_0 z - iK_0(x\cos\chi + y\sin\chi)}$$
$$\omega = K_0(c - \cos\chi),\quad K_0 = g/c^2, \quad \Bigg\} \cdots (6.11)$$

としておけば前と同じ様に

$$E_i = -\iint_S (\varphi_0 + \varphi_7)\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}dS = \iint_S \left(\varphi_i^*\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} - \varphi_0\frac{\partial\varphi_i^*}{\partial n}\right)dS$$
$$+ \iint_S \left(\frac{\partial\varphi_7}{\partial n}\varphi_i^* - \varphi_7\frac{\partial\varphi_i^*}{\partial n}\right)dS,$$

で上の定理から此の第2項は消え、従って

$$E_i = \iint_S \left(\varphi_i^*\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_i^*}{\partial n}\right)e^{K_0 z - iK_0(x\cos\chi + y\sin\chi)}dS, \quad \cdots (6.12)$$

所で (6.2), (6.4) から φ^* を (2.12) の様にかくと

$$\varphi^*(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial n} - \varphi^*\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right)dS - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(K\cos\theta+\omega-\mu i)^2+gK}{(K\cos\theta+\omega-\mu i)^2-gK}H^*(K,\theta)e^{Kz-iK\varpi}dK\,d\theta$$
$$\cdots (6.13)$$

ここに

$$H^*(K,\theta) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial n} - \varphi^*\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{Kz+iK\varpi}dS, \quad \cdots (6.14)$$

であるから (6.12) は

$$E_i = -4\pi H_i^*\{K_0(\chi), \chi\}, \quad \cdots (6.15)$$

の様にも書ける。

此れが Haskind の定理の拡張である。

花岡は (6.12) の右辺を彼の境界値を使って変形し且つ $\varphi_i = \pm\varphi_i^*$ の様な場合のみ考えて

$$E_i^{(H)} = \iint_S p_i\frac{\partial}{\partial n}e^{K_0 z - iK_0\varpi(\chi)}dS, \quad \cdots (6.16)$$

を導いた。[5]

此處に p_i は運動 i による圧力である。

此の式を流れのない場合に適用して (5.5) と比較すると、フルード・クリロッフの力がぬけているから、此の式はその様に理解すべきなのであろう。

さて次に (5.6) の拡張を考えよう。

$$\iint_{S+F+R}\left(\varphi_i\frac{\partial\bar\varphi_j}{\partial n} - \bar\varphi_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right)dS$$

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

を考えると，此の場合も F上の積分は消えるが R上の積分は残る。今これを Q

$$\iint_S \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} - \overline{\varphi_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right) dS = Q_{ij} = \iint_R \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial r} - \overline{\varphi_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right) r\,d\varphi\,dz, \quad \cdots (6.17)$$

として計算出来る。

即ち無限遠方の波さえ判れば計算出来る訳であるが面倒なので今の此の儘にしておく。

然し例えば $i=j$ とおくと，此れは明らかに散乱波の失うエネルギーであるから，前と全く相似な関係を持つ事になる。

結言

以上，Haskind−花岡の波の強制力等に関する公式の説明を終えたい。

此等の公式は今後の理論的，実験的研究の上で，重要な役割を演ずるであろう事は充分予想出来る。

然し一方では又此等の公式をよく理解する為にはもう一度境界値問題を考えて見る必要がある様である。

此の様な過程を経て，始めてストリップ法との比較も可能になり，又波浪中の諸問題，例えば運動，抵抗増加等の極値問題（此れは又次で考えた様に確かに関係のある問題である），等にとりかかる事が出来るのではあるまいか。

以上.

A4×100
DIRECT COPY SYSTEMS

参考文献

1) 造船協会 60周年記念叢書 第2巻

2) 〃 〃 〃 6 〃

3) 〃 〃 〃 8 〃

4) J.N. Newman ; J.S.R. SNAME, vol. 6 No. 3 (1962)

5) 花岡達郎 ; 第9回応力連合講演会 (1959)

6) 丸尾孟 ; 〃 〃

7) G. Vossers ; I.S.P. vol. 7 (1960)

8) 福田淳一他 ; 造協論文集 110号 (1961)

9) 〃 〃 111号 (1962)

10) 田才福造 ; 〃 105 (1959)

11) 〃 ; 〃 110 (1961)

12) 田村欣也 ; 三菱研究報告

13) F. Ursell ; Q.J.M.A.M. vol. 2 (1949)

14) W.C. McLeod & T. Hsieh ; Schiffstechnik Bd 10 (1963)

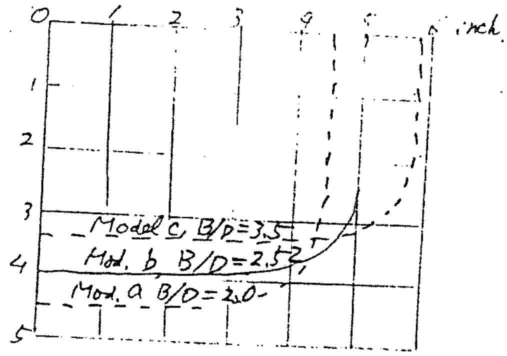
15) 別所正利 ; 防大欧文紀要 2巻2号 (1962)

16) 〃 ; 造協論文集 103号 (1958)

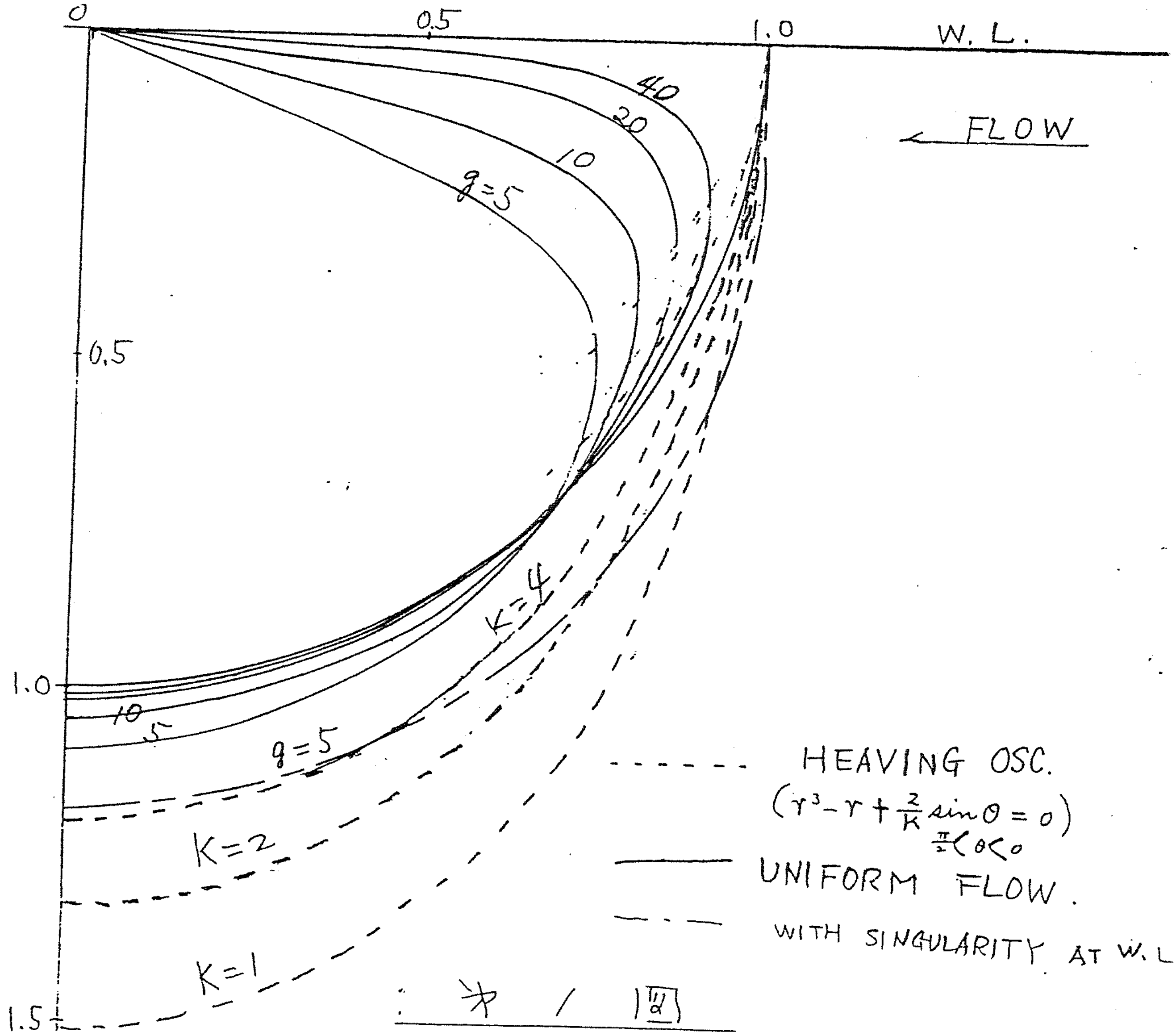
17) F. Ursell ; Q.J.M.A.M. vol. 7 (1954)

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

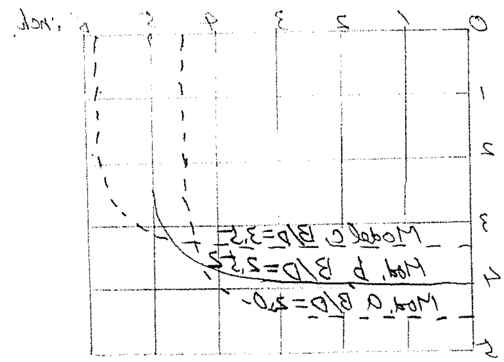


0
1
2
3
4
5
inch
Model c, B/D=3.5
Mod. b B/D=2.5
Mod. a B/D=2.0

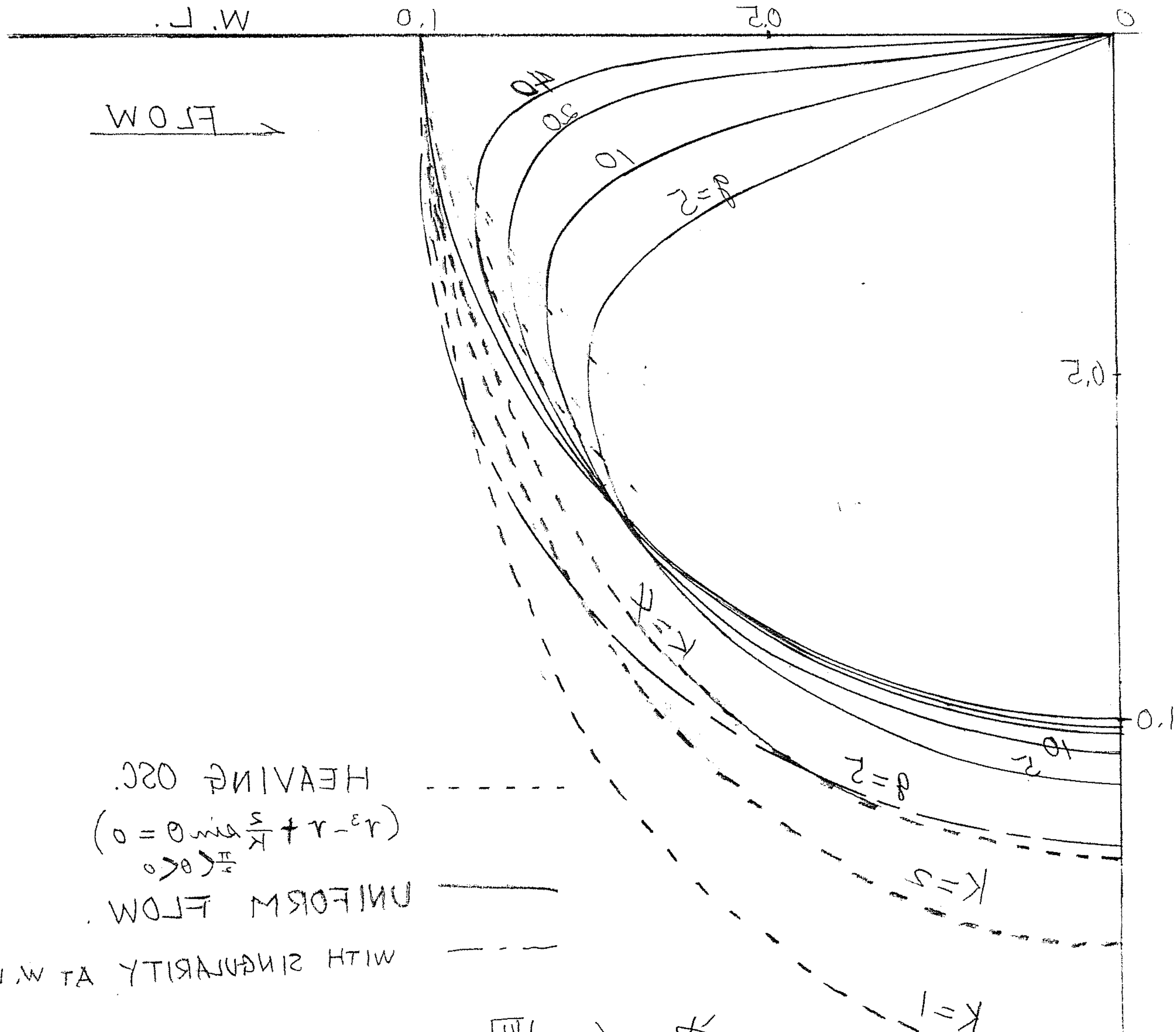


0
0.5
1.0
W. L.
FLOW
40
20
10
q=5
0.5
1.0
10
5
q=5
K=4
K=2
K=1
1.5
HEAVING OSC.
$(r^3 - r + \frac{2}{K}\sin\theta = 0)$
$\frac{\pi}{2} < \theta < 0$
UNIFORM FLOW.
WITH SINGULARITY AT W.L

第1図



Model C B/D=3.5
Mod. b B/D=2.5
Mod. a B/D=2.0



W. L.
1.0
0.5
0
FLOW
40
20
10
g=5
0.5
1.0
1.5
K=4
K=2
K=1
HEAVING OSC.
$(r^3 - r + \frac{2}{K}\sin\theta = 0)$
$\frac{\pi}{2} < \theta < 0$
UNIFORM FLOW.
WITH SINGULARITY AT W.L.

第1図