二次元波動問題に関する覚書

別　所　正　利

内　容

耐航性小委員会において

昭和43年1月27日

防衛大学校

1. 速度ポテンシャルと境界値と力およびモーメント

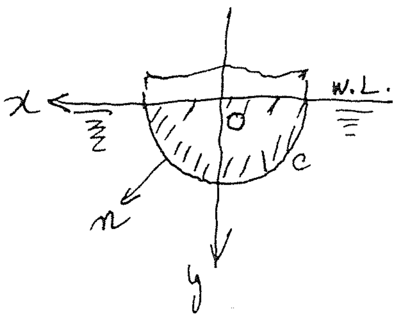
速度ポテンシャルを

$\mathrm{Re}\{\varphi(x,y)e^{i\omega t}\}$

圧力を $\mathrm{Re}\{p(x,y)e^{i\omega t}\}$

$\varphi=\varphi_c+i\varphi_s$,

$p=p_c+ip_s$. $\quad$ -- (1.1)



のように表わされるものとすると線型理論では

$$p(x,y)=\rho i\omega\varphi(x,y)\ , \quad --- (1.2)$$

水面条件は

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+K\right)\varphi(x,0)=0,\quad K=\omega^2/g\ , \quad -- (1.3)$$

求める運動のポテンシャルは次の5種のポテンシャルの重ね合せで表わされる。

i) x軸に平行な運動 ---- 添字 I
ii) y 〃 〃 II
iii) 原点まわりの回転 III
iv) 散乱波 d
v) 入射波 0

それぞれの境界条件は次の通りである。

$$\partial\varphi_j/\partial n = -i\omega X_j\, \partial x_j/\partial n\ ,\quad j=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$$

X_jは振幅とする。従って

$$\varphi_j = i\omega X_j \phi_j\ , \quad ---- (1.4)$$

とおくとϕ_jに対しては

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_j = -\frac{\partial x_j}{\partial n}\ ,\quad j=\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}\ , \quad --- (1.5)$$

但し $\quad x_{\mathrm{I}}\equiv x,\ x_{\mathrm{II}}=y,\ \frac{\partial}{\partial n}x_{\mathrm{III}}=x\frac{\partial y}{\partial n}-y\frac{\partial x}{\partial n}\ , \quad -(1.6)$

振幅 a で x の負(および正)の方向に進む規則波は

$$\varphi_0^\pm(x,y)=\frac{iga}{\omega}\phi_0^\pm(x,y),\quad \phi_0^\pm(x,y)=e^{-Ky\pm iKx}\ , \quad ..(1.7)$$

であるから $\quad \varphi_d^\pm=\frac{iga}{\omega}\phi_d^\pm\ , \quad ---- (1.8)$

としておくと境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\phi_0^\pm+\phi_d^\pm\right)=0\ , \quad ---- (1.9)$$

これらのポテンシャルによる圧力は (1.2) によって

$$\left.\begin{aligned} p_j &= -\rho g K X_j \phi_j , \quad j = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III} \\ p_j &= -\rho g a \phi_j , \quad j = 0, d \end{aligned}\right\} \cdots \quad (1.10)$$

となるから船に働らく力およびモーメントは運動 i による j 方向の力あるいはモーメントを F_{ij} と記す事にすると、

$$\left.\begin{aligned} F_{ij} &= -\int_C p_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \rho g K X_i f_{ij} \\ f_{ij} &= \int_C \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\int_C \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \end{aligned}\right\} \cdots \quad (1.11)$$

波の強制力およびモーメントは、

$$\left.\begin{aligned} E_j &= -\int_C (p_0 + p_d) \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \rho g a e_j \\ e_j &= \int_C (\phi_0 + \phi_d) \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\int_C (\phi_0 + \phi_d) \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \end{aligned}\right\} \quad (1.12)$$

Haskind の関係式は次の通りである。

$$f_{ij} = f_{ji} \quad \cdots \quad (1.13)$$

$$e_j = H_j^+(K) = \int_C \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) ds \quad \cdots \quad (1.14)$$

2. ノイマン函数の漸近展開とその変分

単位吹出しのポテンシャルは、

$$S(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')} \cos k(x-x')}{k - K + \mu i} dk , \quad \cdots \quad (2.1)$$

$P \equiv (x, y)$, $Q \equiv (x', y')$, $r_1 = \overline{PQ}$, $r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$,

であるが今

$$\frac{\partial}{\partial n_Q} A(P,Q) = -\frac{\partial}{\partial n_Q} S(P,Q) , \quad \cdots \quad (2.2)$$

で、水面条件を満たし、且つ $P=Q$ でも~~夫~~流体中でも正則な調和函数 A があったとすると、

$$N(P,Q) = S(P,Q) + A(P,Q) , \quad \cdots \quad (2.3)$$

のような所謂ノイマン函数によって速度ポテンシャルは次のように表わされる。

$$\phi(P) = -\int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} N(P,Q)\, ds_Q, \quad \cdots\cdots (2.4)$$

定義からAは正則であるから上と同様に表現出来て、(2.2)の境界値により

$$A(P,R) = \int_C \left\{\frac{\partial}{\partial n_Q} S(P,R)\right\} N(Q,R)\, ds_R, \quad \cdots (2.5)$$

のように表わされるだろう。

さて無限遠方では

$$S(P,R) \xrightarrow[P\to\infty]{} -i e^{-K(y+y'+i|x-x'|)} + \left(y'-\frac{1}{K}\right)u_1(P) + \left(y'-\frac{1}{K}\right)x' u_2(P) + \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} &P\equiv(x,y),\ R\equiv(x',y') \\ &u_1(P) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{y}{r^2} - \frac{x^2-y^2}{Kr^4}\right) \\ &u_2(P) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{xy}{r^4} - \frac{x^3-3xy^2}{Kr^6}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

これを(2.5)に代入すると

$$A(P,Q) \xrightarrow[P\to\infty]{} -i e^{-K(y\pm ix)} \phi_d^{\pm}(Q) + u_1(P)\phi_{II}(Q) + u_2(P)\left\{\phi_3(Q) - \frac{\phi_I(Q)}{K}\right\} + \cdots \quad (2.7)$$

($x>0$ ならば上の符号, $x<0$ 〃 下の 〃 } 以下同様)

ここに

$$\left.\begin{aligned} &\phi_d^{\pm}(Q) = -\int_C \left\{\frac{\partial}{\partial n}\phi_0^{\pm}(P)\right\} N(Q,P)\, ds_P. \\ &\phi_j(Q) = \int_C \frac{\partial x_j}{\partial n} N(Q,P)\, ds_P, \quad j = I, II. \\ &\phi_3(Q) = \int_C \frac{\partial (xy)}{\partial n} N(Q,P)\, ds_P. \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

(2.3)に代入し(2.6)を考え合せてまとめる。

$$N(P,Q) \xrightarrow[P\to\infty]{} -i\phi_0^{\mp}(P)\Phi_d^{\pm}(Q) + u_1(P)\left\{\Phi_{II}(Q) - \frac{1}{K}\right\} + u_2(P)\left\{\Phi_3(Q) - \frac{1}{K}\Phi_I(Q)\right\} + \cdots (2.9)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} &x_j + \phi_j = \Phi_j, \quad j = I, II \\ &xy + \phi_3 = \Phi_3, \\ &\phi_0^{\pm} + \phi_d^{\pm} = \Phi_d^{\pm} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2.10)$$

明らかに

$$\frac{\partial}{\partial n}\Phi_j = 0, \quad j = I, II, 3, d. \quad \cdots\cdots (2.11)$$

(2・9)を(2・4)に代入すれば

$$\phi_i(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} i\phi_0^{\mp}(p)\,C_d^{\pm} + \left(C_{II} - \frac{C_0}{K}\right)u_1(p) + \left(C_3 - \frac{C_I}{K}\right)u_2(p) + \cdots \qquad (2.12)$$

$$C_{0,i} = -\int_C \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds, \quad C_{ji} = -\int_C \Phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds,\ i,j = d, I, II, 3, \cdots \qquad (2.13)$$

(1・11), (1・12) 等から $C_{j,i}$ は力に関係づけられるのであるが、今物体が左右対称とすると次の如くである.

i) 左右動 (I)

$$\left.\begin{aligned} C_{0,I} &= \int_C \frac{\partial x}{\partial n} ds = 0, \quad C_{II} = \int_C (y + \phi_{II}) \frac{\partial x}{\partial n} ds = 0 \\ C_{I,I} &= \int_C \Phi_1 \frac{\partial x}{\partial n} ds = \nabla + f_{I,I} \\ C_{3,I} &= \int_C (xy + \phi_3) \frac{\partial x}{\partial n} ds \\ C_{d,I}^{\pm} &= \int (\phi_0^{\pm} + \phi_d^{\pm}) \frac{\partial x}{\partial n} ds = e_I^{\pm} = H_I^{\pm}(K), \end{aligned}\right\} (2.14)$$

ii) 上下動 (II)

$$\left.\begin{aligned} C_{3,II} &= C_3 = 0 \\ C_{0,II} &= \int \frac{\partial y}{\partial n} ds = B \quad (\text{船幅}) \\ C_{II,II} &= \int (y + \phi_{II}) \frac{\partial y}{\partial n} ds = \nabla + f_{II,II} \\ C_{d,II}^{\pm} &= H_{II}^{\pm}(K) \end{aligned}\right\} \cdots (2.15)$$

iii) ローリング (III)

$$\left.\begin{aligned} C_{0,III} &= C_{II,III} = 0 \\ C_{I,III} &= \int_C \Phi_1 \frac{\partial x_{III}}{\partial n} ds \\ C_{3,III} &= \int_C \Phi_3 \frac{\partial x_{III}}{\partial n} ds, \quad C_{d\,III}^{\pm} = H_{III}^{\pm}(K) \end{aligned}\right\} \cdots (2.16)$$

iv) 散乱 (ϕ_d^+)

$$\left.\begin{aligned} C_{0,d} &= -2\sin\frac{KB}{2}, \quad C_{I,d} = K\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} x e^{iKx} dx + H_I^+(K) \\ C_{II,d} &= 2i\frac{KB}{2} + H_{II}^+(K), \quad C_{3,d} = H_3^+(K) \\ C_{d,d}^{\pm} &= \int_C (\phi_0^{\pm} + \phi_d^{\pm}) \frac{\partial \phi_0^+}{\partial n} ds = H_d^{\pm}(K), \end{aligned}\right\} \cdots (2.17)$$

Bergman & Schiffer によれば境界 C が $\delta\nu$ だけふくれると N の変化は次式で与えられると言う。

$$\delta N(P,Q) = \int_C \mathrm{grad}\, N(P,Q')\, \mathrm{grad}\, N(Q',Q)\, (\delta\nu\, ds)_{Q'} \quad \cdots (2.18)$$

上式に(2.9)を代入し、両辺を比較すれば次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
\delta \Phi_d^{\pm}(Q) = \delta \phi_d^{\pm}(Q) &= \int_C \mathrm{grad}\, \Phi_d^{\pm}(Q')\, \mathrm{grad}\, N(Q',Q)\, \delta\nu\, ds_{Q'} \\
\delta \Phi_{II}(Q) = \delta \phi_{II}(Q) &= \int_C \mathrm{grad}\, \Phi_{II}(Q')\, \mathrm{grad}\, N(Q',Q)\, \delta\nu\, ds_{Q'} \\
\delta \left\{ \Phi_3(Q) - \frac{\Phi_I(Q)}{K} \right\} &= \int_C \mathrm{grad} \left\{ \Phi_3 - \frac{\Phi_I}{K} \right\} \mathrm{grad}\, N(Q',Q)\, \delta\nu\, ds_{Q'}
\end{aligned}\right\} \quad (2.19)$$

さらに (2.12)以下を代入して両辺を比較すれば

$$\left.\begin{aligned}
\delta H_d^{\pm}(K) &= -\int_C \left\{ \mathrm{grad}\, \Phi_d^{\pm}(Q') \right\}^2 \delta\nu\, ds \\
\delta H_{II}^{\pm}(K) &= -\int_C \mathrm{grad}\, \Phi_{II}\, \mathrm{grad}\, \Phi_d^{\pm}\, \delta\nu\, ds \\
\delta \left\{ H_3^{\pm}(K) - \underbrace{\frac{H_I^{\pm}(K)}{K}}_{\left(-\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} y\, \Delta k\, v\, dx\right)} \right\} &= \int_C \mathrm{grad}\, \Phi_d\, \mathrm{grad}\left(\Phi_3 - \frac{\Phi_I}{K} \right) \delta\nu\, ds
\end{aligned}\right\} \quad (2.20)$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta \left\{ \nabla + f_{II\,II} - \frac{B}{K} \right\} &= \int_C \left(\mathrm{grad}\, \Phi_{II} \right)^2 \delta\nu\, ds. \\
\delta \left\{ \int_C (xy + \phi_3) \frac{\partial\nu}{\partial n} ds - \frac{1}{K}(\nabla + f_{11}) \right\} &= \int_C \left\{ \mathrm{grad}\left(\Phi_3 - \frac{\Phi_1}{K} \right) \right\}^2 \delta\nu\, ds
\end{aligned}\right| \quad (2.21)$$

このようにして H_d, H_{II}, $f_{II,II}$ 等については対称的な~~式~~が得られるが、左右動等についてはきれいになりそうもない。
これらの式の意味はふくれた部分の絶対速度が大きければ量の変化も大きいだろうと言う直観的洞察を裏づけるものであるが、左右動等についてはそれが簡単には言えないと言うことであろう。

3. 境界値問題(1)

速度ポテンシャルの表現として吹出し分布を用いると

$$\phi(P) = \int_C \sigma(Q)\, S(P,Q)\, ds_Q \quad \cdots (3.1)$$

となるから、(2.6)によれば無限遠方では

$$\phi(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} i\phi^{\mp}(p)H^{\pm}(K) + M_1 u_1(p) + M_2 u_2(p) + \cdots \quad (3.2).$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} H^{\pm}(K) &= -\int_C \sigma(x,y) e^{-Ky \pm iKx} ds \\ M_1 &= \int_C \sigma(x,y)\left(y - \frac{1}{K}\right) ds \\ M_2 &= \int_C \sigma(x,y)\left(xy - \frac{x}{K}\right) ds. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3.3).$$

となるから (2.12) と比較して．

$$\left.\begin{aligned} H^{\pm}(K) &= -\int_C \Phi_d \frac{\partial\phi}{\partial n} ds = -\int_C \sigma e^{-Ky \pm iKx} ds \\ M_1 &= -\int_C \frac{\partial\phi}{\partial n}\left(\Phi_{II} - \frac{1}{K}\right) ds \\ M_2 &= -\int_C \frac{\partial\phi}{\partial n}\left(\Phi_3 - \frac{\Phi_1}{K}\right) ds \end{aligned}\right\} \quad \cdots (3.4).$$

に等しい事がわかる。

従って，波の強制力等は

$$e_j = -\int_C \sigma_j e^{-Ky + iKx} ds, \quad j = I, II, III, \quad \cdots\cdots (3.5)$$

上下動による力は

$$\nabla + f_{II,II} - \frac{B}{K} = \int_C \sigma_{II}(x,y)\left(y - \frac{1}{K}\right) ds, \quad \cdots (3.6)$$

と与えられるが，これ以外の左右動等についてはこのような簡単な式は得られない。なお没水体では次式が成立つ。

$$\nabla + f_{I,I} = \int_C \sigma_I(x,y)\, x\, ds, \quad \cdots\cdots (3.7)$$

さて (3.1) 式の境界値問題を解くには，分論これに共軛な流れ函数 ψ に関して解くのが便利である。

そうすると

$$\psi(p) = \int_C \sigma(Q) T(p,Q) ds_Q, \quad \cdots (3.8)$$

$$T(p,Q) = \frac{1}{2\pi}\left\{\tan^{-1}\frac{y+y'}{x-x'} - \tan^{-1}\frac{y-y'}{x-x'}\right\} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+y')}\sin k(x-x')}{k - K + \mu i} dk$$

$$= T_c(p,Q) - i e^{-K(y+y')}\sin K(x-x'), \quad \cdots (3.9)$$

T_c は T の実部を意味するものとする。

今
$$\sigma = \sigma_c + i\sigma_s \quad , \quad \cdots\cdots \quad (3.10)$$
とおいて (3.8) の実部と虚部をわけて書くと、
$$\left.\begin{aligned} \psi_c(P) &= \int_C \sigma_c(Q) T_c(P,Q) ds_Q + \int_C \sigma_s e^{-K(y+y')} \sin K(x-x') ds \\ \psi_s(P) &= \int_C \sigma_s(Q) T_c(P,Q) ds_Q - \int_C \sigma_s e^{-K(y+y')} \sin K(x-x') ds \end{aligned}\right\} \cdots (3.11)$$
となるが一方境界条件 (1.5)〜(1.9) は
$$\psi_I = -y, \quad \psi_{II} = x, \quad \psi_{III} = \frac{1}{2}(x^2+y^2), \quad \cdots (3.12)$$
$$\psi_d + \psi_0 = 0 \quad , \quad \psi_0 = -i e^{-Ky+iKx} \quad , \quad \cdots (3.13)$$
に移行する。

そこで物体が左右対称であるとして (3.11) を夫々の場合について書き下すと次のようになる。

(左右動)
$$\left.\begin{aligned} \psi_{Ic} = -y &= \int_C \sigma_{Ic} T_c ds + e^{-Ky} \cos Kx \, h_{Is}(K) \\ 0 &= \int_C \sigma_{Is} T_c ds - e^{-Ky} \cancel{\cos} Kx \, h_{Ic}(K) \end{aligned}\right\} \quad (3.14)$$
$$h_{Ic}(K), h_{Is}(K) = -\int_C (\sigma_{Ic}, \sigma_{Is}) e^{-Ky} \sin Kx \, ds, \quad \cdot (3.15)$$

(上下動)
$$\left.\begin{aligned} \psi_{IIc} = x &= \int \sigma_{IIc} T_c ds - H_{IIs}(K) e^{-Ky} \sin Kx \\ 0 &= \int \sigma_{IIs} T_c ds + H_{IIc}(K) e^{-Ky} \sin Kx \end{aligned}\right\} \cdots (3.16)$$
$$H_{IIc}(K), H_{IIs}(K) = -\int (\sigma_{IIc}, \sigma_{IIs}) e^{-Ky} \cos Kx \, ds, \quad \cdots (3.17)$$

(回転動)
$$\left.\begin{aligned} \psi_{IIIc} = \frac{x^2+y^2}{2} &= \int \sigma_{IIIc} T_c ds + h_{IIIs}(K) e^{-Ky} \cos Kx \\ 0 &= \int \sigma_{IIIs} T_c ds - h_{IIIc}(K) e^{-Ky} \cos Kx \end{aligned}\right\} \cdots (3.18)$$
$$h_{IIIc}(K), h_{IIIs}(K) = -\int (\sigma_{IIIc}, \sigma_{IIIs}) e^{-Ky} \sin Kx \, ds, \quad \cdots (3.19)$$

(動乱)

$$\left.\begin{aligned} e^{-ky}\cos kx &= \int \sigma_{dc} T_c \, ds + e^{-ky}(h_{ds}\cos kx - H_{ds}\sin kx) \\ -e^{-ky}\sin kx &= \int \sigma_{ds} T_c \, ds + e^{-ky}(H_{dc}\sin kx - h_{dc}\cos kx) \end{aligned}\right\} \quad (3.20)$$

$$\left.\begin{aligned} H_{ds}(k),\ h_{ds}(k) &= -\int \sigma_{ds}\, e^{-ky}(\cos kx, \sin kx)\,ds, \\ H_{dc}(k),\ h_{dc}(k) &= -\int \sigma_{dc}\, e^{-ky}(\cos kx, \sin kx)\,ds. \end{aligned}\right\} \quad \text{-- } (3.21)$$

これらの式は2組の連立一次方程式からなりたつておリ，このままで解くとすると例えば C を~~[illegible]~~等分すると~~[illegible]~~左右の対称性を考えても、$7\times 2=14$ 元の方程式になる。そこで両式に正弦余弦項があるのに注目して，次のように書きかえると，元数が半分の方程式を2組とけばよい事になる。

(左右動)

$$\int \mu_{Is} T_c\, ds = e^{-ky}\cos kx, \quad \int \mu_{Ic} T_c\, ds = -y \quad , \ \text{---} \ (3.22)$$

$$\mu_{Is} = \frac{\sigma_{Is}}{h_{Ic}} \quad , \quad \mu_{Ic} = \sigma_{Ic} + \frac{h_{Is}}{h_{Ic}}\sigma_{Is} \quad , \ \text{---} \ (3.23)$$

(上下動)

$$\int \mu_{IIc} T_c\, ds = -e^{-ky}\sin kx \quad , \quad \int \mu_{IIc} T_c\, ds = x \quad , \ \text{---} \ (3.24)$$

$$\mu_{IIs} = \frac{\sigma_{IIs}}{H_{IIc}} \quad , \quad \mu_{IIc} = \sigma_{IIc} + \frac{H_{IIs}}{H_{IIc}}\sigma_{IIs} \quad , \ \text{---} \ (3.25)$$

(回転動)

$$\int \mu_{IIIs} T_c\, ds = e^{-ky}\cos kx, \quad \int \mu_{IIIc} T_c\, ds = \frac{x^2+y^2}{2}, \quad (3.26)$$

$$\mu_{IIIs} = \frac{\sigma_{IIIs}}{h_{IIIc}} \quad , \quad \mu_{IIIc} = \sigma_{IIIc} + \frac{h_{IIIs}}{h_{IIIc}}\sigma_{IIIs} \quad , \ \text{----} \ (3.27)$$

(散乱)

$$\int \mu_{ds} T_c\, ds = -e^{-ky}\sin kx, \quad \int \mu_{dc} T_c\, ds = e^{-ky}\cos kx, \ \text{--} \ (3.28)$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_{ds} &= \frac{(1+h_{dc})\sigma_{dc} + h_{ds}\sigma_{ds}}{H_{dc}h_{ds} + (1-H_{ds})(1+h_{dc})} \\ \mu_{dc} &= \frac{(1-H_{ds})\sigma_{ds} - H_{dc}\sigma_{dc}}{(\text{同上})} \end{aligned}\right\} \quad \text{---} \ (3.29)$$

これらの積分方程式は唯一解をもつと考えられるから，上式から直ちに

$$\mu_{Is} = \mu_{IIIs} = \mu_{dc} \quad , \quad \mu_{IIs} = \mu_{ds} \quad , \ \text{---} \ (3.30)$$

となる。

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

今

$$-\int_C \mu e^{-Ky}\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}Kx\,ds = \left\{\begin{matrix}H^*\\ h^*\end{matrix}\right\} \quad \text{------} \quad (3\cdot31)$$

とおくと (3·23), (3·25), (3·27), (3·29) 等から

$$\left.\begin{aligned} h_{jc} &= \frac{h_{jc}^*}{1+h_{js}^{*2}}, \quad h_{js} = \frac{h_{jc}^* h_{js}^*}{1+h_{js}^{*2}}, \quad j = \mathrm{I}, \mathrm{II} \\ H_{\mathrm{II}c} &= \frac{H_{\mathrm{II}c}^*}{1+H_{\mathrm{II}s}^{*2}}, \quad H_{\mathrm{II}s} = \frac{H_{\mathrm{II}c}^* H_{\mathrm{II}s}^*}{1+H_{\mathrm{II}s}^{*2}} \end{aligned}\right\} (3\cdot32)$$

散乱問題については少々面倒であるが、先づ μ_{ds} は even, μ_{dc} は odd であるはずだから

$$H_{dc}^* = h_{ds}^* = 0 \quad , \quad \text{-------} \quad (3\cdot33)$$

これから $\quad h_{ds} + h_{dc}^2 + h_{ds}^2 = 0, \quad H_{ds} = H_{dc}^2 + H_{ds}^2 \quad , \quad \text{---} \quad (3\cdot34)$

が出て来るからこれを (3·29) に代入すると、

$$\mu_{ds} = \frac{-H_{ds}(h_{dc}\Gamma_{ds} - h_{ds}\Gamma_{dc})}{H_{dc}(H_{dc}h_{ds} - H_{ds}h_{dc})}, \quad \mu_{dc} = \frac{-h_{dc}(H_{dc}\Gamma_{ds} - H_{ds}\Gamma_{dc})}{h_{ds}(H_{dc}h_{ds} - H_{ds}h_{dc})} \quad , \quad \text{-} \quad (3\cdot35)$$

となるから結局

$$H_{dc} = \frac{H_{ds}^*}{1+H_{ds}^{*2}}, \quad H_{ds} = \frac{+H_{ds}^{*2}}{1+H_{ds}^{*2}}, \quad h_{ds} = \frac{h_{dc}^*}{1+h_{dc}^{*2}}, \quad h_{dc} = \frac{-h_{dc}^{*2}}{1+h_{dc}^{*2}} \quad \text{---} \quad (3\cdot36)$$

一方 (3·30) により $\quad H_{ds}^* = H_{\mathrm{II}s}^* \quad , \quad h_{dc}^* = h_{\mathrm{I}s}^* \quad , \quad \text{---} \quad (3\cdot37)$

であるから $\quad H_{\mathrm{II}s}^* = H_{\mathrm{II}s}/H_{\mathrm{II}c} \quad , \quad h_{\mathrm{I}s}^* = -h_{\mathrm{I}s}/h_{\mathrm{I}c} \quad$ を考えると、
(3·36) は結局

$$H_{dc} = \frac{H_{\mathrm{II}c}H_{\mathrm{II}s}}{H_{\mathrm{II}c}^2 + H_{\mathrm{II}s}^2}, \quad H_{ds} = \frac{+H_{\mathrm{II}s}^2}{H_{\mathrm{II}c}^2 + H_{\mathrm{II}s}^2}, \quad h_{ds} = \frac{h_{\mathrm{I}c}h_{\mathrm{I}s}}{h_{\mathrm{I}c}^2 + h_{\mathrm{I}s}^2}, \quad h_{dc} = \frac{-h_{\mathrm{I}s}^2}{h_{\mathrm{I}c}^2 + h_{\mathrm{I}s}^2} \quad \text{---} \quad (3\cdot8)$$

となる。

このように散乱波の振幅も上下, 左右振動がわかればわかるし、一方波の強制力もハスキントの公式でわかるので散乱波の方程式は特に解く必要はない事になる。

最後に F. Ursell の解き方について附言しよう。彼の方法は波の振幅や位相を基準に解いている訳であるから、今の場合に適用すると (3·16), (3·17) において $\quad H_{\mathrm{II}c} + iH_{\mathrm{II}s} = Ae^{i\varepsilon}$ とおき、これで両辺を割った形, つまり

$$\frac{x}{A}e^{-i\varepsilon} = \int\left(\frac{\sigma}{A}e^{-i\varepsilon}\right)T_c\,ds + ie^{-Ky}\sin Kx$$

A4 × 100

の形において の, A, ε をきめた事に相当する。 この時 ε は
ハスキントの公式によって 波の強制力の 波との位相差に相当
するから 上式から 上下動の速度と 波の振幅の位相差 が
これに等しい事がわかり、前の方式の計算で ε をきめておけば
波の強制力が 直ちに 位相も含めて わかる事になる。

4. 境界値問題(II)

2次元問題では 単位円への写像函数 がわかっている場合が多いと考えられるが、これを利用しても解の手続は必ずしも簡単ではなく、計算機の利用を(周知のように)前提にするとすれば、むしろ前節のような方法が簡単であり 又 複雑な形状でも心配はないようである。

しかし動揺の問題では一般に周期の大きい場合が問題であり、この場合 田才の述べたように 波高等は 第1近似でもかなりよく合うと考えられる。 そこで以下 Kotchin にならって 写像函数が知れているとして、Kotchin 函数に関する積分方程式を導いて見る。

先ず 物体の周 C の水面に関する鏡像 $\bar{C}$ をも考えて、その形状に対する ノイマン函数 $N(P,Q)$ (以下ではこれは波を含まないと考える) がわかっているとしよう。

そうすると 無限遠方で 正則で且つ 実軸に関し 上下反対称な 調和函数 φ_1 は次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(P) = -\int_C \frac{\partial \varphi_1(Q)}{\partial \nu} M(P,Q)\, ds_Q, \\ &M(P,Q) = N(P,Q) - N(P,\bar{Q}) \\ &P \equiv (x,y),\ Q \equiv (x',y'),\ \bar{Q} \equiv (x',-y') \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

$C+\bar{C}$ が単位円に写像された平面で極座標表示を使うと、それは実際

$$N(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{\rho}{r r_1 r_2}\right), \quad \left.\begin{aligned} r_1^2 &= \rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta-\varphi) \\ r_2^2 &= \rho^2 + \frac{1}{r^2} - 2\frac{\rho}{r}\cos(\theta-\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (4.2)$$

$$M(P,Q)\Big|_{\rho=1} = \frac{1}{2\pi}\log\left[\frac{r^2+1-2r\cos(\theta-\varphi)}{r^2+1-2r\cos(\theta+\varphi)}\right] = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta \sin n\varphi}{n r^n}, \quad (4.3)$$

ただし $\quad P \equiv (r,\theta), \quad Q \equiv (\rho, \varphi)$

水面条件を満たす函数 φ は

$$\varphi(P)=\int_C\left\{\varphi(Q)\frac{\partial}{\partial n}S(P,Q)-\frac{\partial\varphi}{\partial n}(Q)S(P,Q)\right\}ds_Q \quad ---- (4.4)$$

のように書けるからこれを分解して Kotchin 函数を使って書き直すと

$$\varphi(P)=\varphi_1(P)-\varphi_2(P)\ , \quad --------- (4.5)$$

$$\varphi_1(P)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\log\frac{r_2}{r_1}\,ds\ , \quad ----- (4.6)$$

$$\varphi_2(P)=\frac{-1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dk\,e^{-ky}}{k-K+\mu i}\left\{H^+(k)e^{-ikx}+H^-(k)e^{ikx}\right\}\ , \quad --(4.7)$$

ここに

$$H^\pm(k)=\int_C\left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)e^{-ky\pm ikx}ds\ , \quad ---- (4.8)$$

となり，φ_1 は (4.6) から $C+\bar{C}$ の外側で正則，φ_2 は下半面で正則である。

境界條件は

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{\partial x_j}{\partial n}\ , \quad ---- (4.9)$$

とすると (4.1) によって

$$\varphi_1(P)=\int_C\left(\frac{\partial x_j}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)M(P,Q)ds_Q \quad -- (4.10)$$

となるから，$H(k)$ がわかれば φ は求まる事になる。

物体が左右対称であれば明らかに次の関係がある。

$$H^+_{\mathrm{II}}(k)=H^-_{\mathrm{II}}(k)\ , \quad H^+_j(k)=-H^-_j(k)\ , \ j=\mathrm{I},\mathrm{III}\ , \quad --- (4.11)$$

そして

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{K}^\pm(k,P)=\int_C M(P,Q)\frac{\partial}{\partial n}e^{-ky\pm ikx'}ds_Q\\&e^{-ky\pm ikx}+\mathcal{K}^\pm(k,P)=\mathcal{M}^\pm(k,P)\\&\frac{\partial}{\partial n_P}\mathcal{K}^\pm(k,P)=-\frac{\partial}{\partial n}e^{-ky\pm ikx}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial n}\mathcal{M}^\pm(k,P)=0\ ,\end{aligned}\right\}\quad (4.12)$$

なる補助函数を導入し，(4.8) に (4.9)，(4.5) を代入すると

$$H^+(p)=\int_C\frac{\partial x_j}{\partial n}e^{-py\pm ipx}ds+I_1-I_2\ ,$$

$$I_1=\int_C\varphi_1\frac{\partial}{\partial n}e^{-py+ipx}ds\ ,\quad I_2=\int\varphi_2\frac{\partial}{\partial n}e^{-py+ipx}ds$$

I_1 に (4.10)，(4.12) を利用すれば

$$I_1=\int_C\left(\frac{\partial x_j}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\mathcal{K}^+(p,Q)ds_Q\ ,$$

従って上式は、

$$H^+(p) = \int_C \frac{\partial x_i}{\partial n} \mathcal{M}^+(p,Q)\, ds_Q + \int_C \left\{ \varphi_2 \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{m}(p,P) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \mathfrak{m}(p,P) \right\} ds_P \quad \cdots (4.13)$$

となる。これに(4.7)を代入し、積分順序を変えると

$$H^+(p) = \int_C \frac{\partial x_i}{\partial n} \mathcal{M}^+(p,Q)\, ds_Q + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dk}{k-K+\mu i}\left\{ H^+(k) K^{+-}(k,p) + H^- K^{++} \right\}, \quad \cdots (4.14)$$

ここに

$$\left.\begin{matrix} K^{+-}(k,p) \\ K^{++}(k,p) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_C \left\{ \mathfrak{m}^+(p,P) \frac{\partial}{\partial n} e^{-ky \mp ikx} - e^{-ky \mp ikx} \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{m}(p,P) \right\} ds_P. \quad \cdots (4.15)$$

同様にして、

$$H^-(p) = \int_C \frac{\partial x_i}{\partial n} \mathcal{M}^-(p,P)\, ds_P + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dk}{k-K+\mu i}\left\{ H^+(k) K^{--}(k,p) + H^-(k) K^{-+}(k,p) \right\}, \quad \cdots (4.16)$$

$$\left.\begin{matrix} K^{--}(k,p) \\ K^{-+}(k,p) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_C \left\{ \mathfrak{m}^-(p,P) \frac{\partial}{\partial n} e^{-ky \mp ikx} - e^{-ky \mp ikx} \frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{m}^-(p,P) \right\} ds_P \quad \cdots (4.17)$$

$M(P,Q)$は実函数であるから

$$\mathfrak{m}^+(p,P) = \overline{\mathfrak{m}^-(p,P)}, \quad \mathcal{M}^+(p,P) = \overline{\mathcal{M}^-(p,P)}, \quad \cdots (4.18)$$

なる関係があるから K の間には次の関係がある。

$$\overline{K^{+-}(k,p)} = K^{-+}(k,p), \quad \overline{K^{++}} = K^{--}, \quad \cdots (4.19)$$

対称性があれば(4.11)から明らかなように(4.14)か(4.16)のどちらかでよい訳である。つまり

$$H^+(p) = \int_C \frac{\partial x_i}{\partial n} \mathcal{M}^+(p,P)\, ds_P + \int_0^\infty \frac{dk\, H^+(k)}{k-K+\mu i}\left\{\begin{matrix} \mathbb{K}_C(k,p) & \text{for } \varphi \text{ even} \\ \mathbb{K}_S(k,p) & \text{〃 } \varphi \text{ odd} \end{matrix}\right\}, \quad \cdots (4.20)$$

ここに

$$\left.\begin{matrix} \mathbb{K}_C(k,p) \\ \mathbb{K}_S(k,p) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{ K^{+-}(k,p) \pm K^{++}(k,p) \right\}, \quad \cdots (4.21)$$

さて(4.3)の展開を使って具体的な函数形を考えて見よう。これを(4.12)の$\mathfrak{m}$に代入して項別積分すると

$$\mathfrak{m}^+(p,P) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n\theta}{n p^n}\int_C \sin n\varphi \frac{\partial}{\partial n} e^{ipz} ds, \quad (z = (x+iy))$$

$$\frac{\partial}{\partial n} e^{ipz} ds = -i \frac{\partial}{\partial s} e^{ipz} ds$$

を使って部分積分すれば

$$\mathcal{M}^+(p,P) = 2i\sum_{n=1}^{\infty} i^n E_n(p)\,\frac{\sin n\theta}{r^n}, \quad \cdots (4.22)$$

ただし

$$E_n(p) = \frac{1}{\pi i^n}\int_0^{\pi} e^{ipz}\cos n\varphi\, d\varphi, \quad \cdots\cdots (4.23)$$

一方この函数で

$$e^{ipz}\Big|_C = E_0(p) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n E_n(p)\cos n\theta, \quad \cdots (4.24)$$

よって

$$\mathcal{M}^+(p,P)\Big|_C = E_0(p) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n E_n(p) e^{in\theta}, \quad \cdots (4.25)$$

これを $\sin n\theta$ の項に展開すると．

$$\mathcal{M}^+(p,P) = 2\sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} F_n(p)\sin n\theta, \quad \cdots\cdots (4.26)$$

ただし

$$F_n(p) = \frac{1}{\pi i^n}\int_0^{\pi} e^{ipz-in\theta}\, d\theta = E_n(p) + \frac{1}{\pi i^{n+1}}\int_0^{\pi} e^{ipz}\sin n\theta\, d\theta \quad \cdots (4.27)$$

がえられる。

$F_n(p)$ は $E_n(p)$ に展開出来て，この右辺第2項は

$$\frac{1}{\pi i^{2n+1}}\int_0^{\pi} e^{ipz}\sin 2n\theta\, d\theta = \frac{8(-1)^n n}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m E_{2m+1}(p)}{4n^2-(2m+1)^2}$$

$$\frac{1}{\pi i^{2n}}\int_0^{\pi} e^{ipz}\sin(2n+1)\theta\, d\theta = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n+1)}E_0(p) + \frac{4(2n+1)}{\pi^2}(-1)^{n+1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m E_{2m}(p)}{(2n+1)^2-4m^2} \quad \cdots (4.28)$$

となる。

次に (4.12) によって $\mathcal{M}$ の性質から．

$$\int_C \left\{\mathcal{M}^+(p,P)\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{M}^-(k,P) - \mathcal{M}^-(k,P)\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{M}^+(p,P)\right\} ds = 0$$

となるから (4.15) は．

$$K^{+-}(k,p) = \frac{1}{\pi}\int_C \mathcal{M}^-(k,P)\frac{\partial}{\partial n}e^{ipz}\, ds_P, \quad \cdots (4.29)$$

となるから (4.26) を代入して項別積分をすると

$$K^{+-}(k,p) = 2\sum_{n=1}^{\infty} n E_n(p)\overline{F_n(-k)}, \quad \cdots\cdots \quad (4.30)$$

同様にして

$$K^{++}(k,p) = \frac{1}{\pi}\int_C \mathcal{M}^{+}(k,p)\frac{\partial}{\partial n}e^{ipz}\,ds = -2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n E_n(p)\overline{F_n(k)}, \quad \cdots (4.31)$$

$$\therefore \quad \left.\begin{matrix}\mathbb{K}_c(k,p)\\ \mathbb{K}_s(k,p)\end{matrix}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} n E_n(p)\left\{\overline{F_n(k)} \mp (-1)^n \overline{F_n(-k)}\right\}$$

となるから，さらに対称性を使って

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{K}_c(k,p) &= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)E_{2n+1}(p)D_{2n+1}(-k)\\ \mathbb{K}_s(k,p) &= \sum_{n=1}^{\infty}2n E_{2n}(p)D_{2n}(-k)\end{aligned}\right\} \quad \cdots (4.32)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}D_{2n+1}(k) &= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-ky}\sin\{kx-(2n+1)\theta\}\,d\theta,\\ D_{2n}(k) &= \frac{2(-1)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-ky}\cos\{kx-2n\theta\}\,d\theta\end{aligned}\right\} \quad \cdots (4.33)$$

と共に

$$\int_C \frac{\partial x_j}{\partial n}\mathcal{M}^{+}(p,p)\,ds = -\int_C \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}\left\{e^{ipz} + \int_C M(Q,P)\frac{\partial}{\partial n}e^{ipz}ds\right\}ds$$

$$= +\int_C\left\{\varphi_{j0}\frac{\partial}{\partial n}e^{ipz} - \frac{\partial \varphi_{j0}}{\partial n}e^{ipz}\right\}ds = H_{j0}^{+}(p), \quad \cdots (4.34)$$

ここに

$$\varphi_{j0}(P) = \int_C \frac{\partial x_j}{\partial n}M(P,Q)\,ds, \quad j = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \alpha, \quad \cdots\cdots (4.35)$$

となってこれは逆鏡像近似による H_j^{+} の近似値である事がわかる。この近似値を(4.20)の右辺第2項に代入すれば第2近似が求められる事になるが，見る通り計算は大変面倒に思われる。実際には $p=K$ の所つまり波の強制力に対する第2近似を計算するのに役立つ（ハスキンドが似た事をしている）程度であろう。

このような意味合いでは次のように附加質量の近似値も求める事が出来る。

先ず(4.8)から

$$\frac{\partial}{\partial p}H_{\mathrm{I}}^{+}(p)\Big|_{p=0} = i\int\left(\varphi_{\mathrm{I}}\frac{\partial x}{\partial n} - x\frac{\partial \varphi_{\mathrm{I}}}{\partial n}\right)ds = i\left(\nabla + f_{\mathrm{I,I}}\right) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} H_{II}^{+}(p)\Big|_{p=0} = -\int_C \left(\varphi_{II} \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial n} \right) ds = -(\nabla + f_{II\,II}) \quad (4.36)$$

同様に(4.2[illegible])から

$$\frac{\partial}{\partial p} K_c(k,p)\Big|_{p=0} = -\frac{1}{\pi} H_{II0}^{+}(k), \quad \frac{\partial}{\partial p} K_s(k,p)\Big|_{p=0} = \frac{1}{\pi i} H_{I0}^{+}(k), \quad (4.37)$$

が得られ，(4.36)と同様に．

$$\frac{\partial}{\partial p} H_{I0}^{+}(p)\Big|_{p=0} = i\nabla(1+k_{10}), \quad \frac{\partial}{\partial p} H_{II0}^{+}(p)\Big|_{p=0} = -\nabla(1+k_{20}), \quad (4.38)$$

ただし k_{10}, k_{20} は逆鏡像近似の附加質量係数とする。

であるから (4.20)は．

$$\left.\begin{aligned}
f_{I,I} &= k_{10}\nabla - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H_I^{+}(k) H_{I0}^{+}(k)}{k - K + \mu i} dk, \\
f_{II,II} &= k_{20}\nabla + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H_{II}^{+}(k) H_{II0}^{+}(k)}{k - K + \mu i} dk, \\
f_{III\,I} &= \int_C \varphi_{III0} \frac{\partial x}{\partial n} ds - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H_{III}^{+}(k) H_{I0}^{+}(k)}{k - K + \mu i} dk,
\end{aligned}\right\} \quad (4.39)$$

のように Kramers-Kronig の関係によく似た式が出て来る。

最後に散乱ポテンシャルに対しては (4.14), (4.16)は．

$$\left.\begin{aligned}
H_d^{+}(p) &= \pi K^{++}(p,K) + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dk}{k - K + \mu i} \left\{ H_d^{+}(k) K^{+-}(k,p) + H_d^{-}(k) K^{++}(k,p) \right\}, \\
H_d^{-}(p) &= \pi K^{+-}(p,K) + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dk}{k - K + \mu i} \left\{ H_d^{+}(k) \overline{K^{++}}(k,p) + H_d^{-}(k) \overline{K^{+-}}(k,p) \right\},
\end{aligned}\right\} \quad (4.40)$$

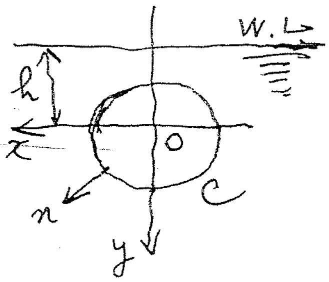
pで微分して，$p \to 0$とおけば長い運算の後に次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
H_{II}^{+}(K) &= H_{II0}^{+}(K) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H_{II0}^{+}(k)\left\{ H_d^{+}(k) + H_d^{-}(k) \right\}}{k - K + \mu i} dk \\
H_I^{+}(K) &= H_{I0}^{+}(K) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H_{I0}^{+}(k)\left\{ H_d^{+}(k) - H_d^{-}(k) \right\}}{k - K + \mu i} dk,
\end{aligned}\right\} \quad (4.41)$$

これは(4.20)で $p=K$ とおいたものに実質的に等しい関係である。

5. 續（没水体）

没水体の場合にも前節の議論は成立つが、写像函数が少々面倒になる（領域が2重連結になるので）。
この場合は C の外側領域を考えた方が簡単である。



左図のように座標をとり、速度ポテンシャルを次のように表わす事にする。

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \;, \qquad \cdots\cdots (5.1)$$

$$\varphi_1(P) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(\varphi\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\log\left\{\frac{1}{r(P,Q)}\right\} ds_Q , \qquad (5.2)$$

$$\varphi_2(P) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{(k+K)e^{-2kh-ky}\,dk}{k(k-K+\mu i)}\left\{H^+(k)e^{-ikx} + H^-(k)e^{ikx}\right\}, \qquad (5.3)$$

ここに

$$H^\pm(k) = \int_C \left(\varphi\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)e^{-ky\pm ikx}\,ds , \qquad \cdots (5.4)$$

又 $H^\pm(k)$ は $k\to 0$ で夫々 $O(k)$ であるから (5.3) の積分は存在すると考えてよい。

さて φ_1 は C の外で正則であるから C に関するノイマン函数が知れていれば

$$\varphi_1(P) = -\int_C \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}N(P,Q)\,ds , \qquad \cdots\cdots (5.5)$$

と表わす事が出来る。そして、

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}: \text{given} \qquad \cdots (5.6)$$

であるから前節同様にして (5.4) 式に (5.1) を代入し、(5.5), (5.6) を用いて積分順序を変更すれば

$$H^\pm(p) = -\int_C \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathcal{N}^\pm(p,P)\,ds - \int_C \left\{\varphi_2\frac{\partial}{\partial n}e^{-py\pm ipx} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\mathcal{N}^\pm(p,P)\right\}ds$$

となり、最終的に

$$H^\pm(p) = H_0^\pm(p) + \int_0^\infty \frac{(k+K)e^{-2hk}\,dk}{k(k-K+\mu i)}\left\{H^+(k)K^{\pm-}(k,p) + H^-(k)K^{\pm+}(k,p)\right\},$$

こゝに

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{X}^{\pm}(p,P) = e^{-py\pm ipx} + \chi^{\pm}(p,P)\\
&\chi^{\pm}(p,P) = \int_C N(P,Q)\frac{\partial}{\partial n} e^{-py'\pm ipx'}\, ds_Q\\
&\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{X}^{\pm}(p,P)\Big|_C = 0
\end{aligned}\right\} \cdots (5.9)$$

$$K^{\pm\mp}(k,p) = \frac{1}{4\pi}\int_C \left\{ \chi^{\pm}(p,P)\frac{\partial}{\partial n} e^{-ky\mp ikx} + e^{-ky\mp ikx}\frac{\partial}{\partial n}\chi^{\pm}(p,P)\right\} ds_P$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_C \mathcal{X}^{\mp}(k,P)\frac{\partial}{\partial n} e^{-py\pm ipx}\, ds, \quad \cdots (5.10)$$

従って物体が左右対称ならば

$$K^{+-}(k,p) = \overline{K^{-+}(k,p)}, \quad K^{++}(k,p) = \overline{K^{--}(k,p)}, \quad (5.11)$$

さて C を ζ 面の単位円に写像出来たとすると

$$N(P,Q) = -\frac{1}{2\pi}\log\left(1-\frac{\zeta}{\zeta'}\right)\left(1-\zeta'\bar{\zeta}\right), \quad \cdots (5.12)$$

$$P \equiv [z(\zeta)], \quad Q \equiv [z'(\zeta')]$$

であるから、

$$\chi^{+}(p,P) = \int_C N(P,Q)\frac{\partial}{\partial n} e^{ipz}\, ds = -i\int_C N(P,Q)\, d(e^{ipz})$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{ipz'}\left(\frac{1}{\zeta'-\zeta} + \frac{1}{\zeta'-\frac{1}{\bar{\zeta}}} - \frac{1}{\zeta'}\right) d\zeta', \quad \cdots (5.13)$$

特に $z=\zeta$, つまり円では

$$\left.\begin{aligned}
&\chi^{+}(p,P) = e^{\frac{ip}{z}} - 1,\\
&\mathcal{X}^{+}(p,P) = e^{ipz} + e^{\frac{ip}{z}} - 1 \xrightarrow[|z|=1]{} 2e^{ipz} - 1,
\end{aligned}\right\} \cdots (5.14)$$

これを (5.10) に代入すると

$$\left.\begin{aligned}
&K^{+-}(k,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{-ik\bar{z}}\, d(e^{ipz}) = \frac{p}{2\pi}\oint e^{ipz-\frac{ik}{z}}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(pk)^{n+1}}{n!(n+1)!}\\
&K^{++}(k,p) = \frac{i}{2\pi}\int_C e^{-ik\bar{z}}\, d(e^{-ip\bar{z}}) = 0,
\end{aligned}\right\} (5.15)$$

となり、非常に簡単になる。

さて，さらに円に沿って

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n}$ ならば

$$H^{+}_{1,0}(p) = 2\int dy\, e^{ipz} = \frac{1}{i}\int e^{ipz}\frac{dz}{z^2} = 2\pi p i\,, \quad \text{---}(5.16)$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial n}$ ならば

$$H^{+}_{2,0}(p) = -2\pi p\,, \quad \text{-----}(5.17)$$

又 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} e^{iKz}$ ならば

$$\left.\begin{aligned} H^{+}_{d0}(p) &= -2i\int e^{ipz}\, d(e^{iKz}) = 0\,, \\ H^{-}_{d0}(p) &= 2K\int e^{\frac{ip}{z}+iKz}\, dz = 4\pi K^{+-}(p,K) \end{aligned}\right\} \quad (5.18)$$

等となるので積分方程式は次のように書き下せる。

(上下動)

$$H^{+}_{2}(p) = -2\pi p + \int_0^\infty H^{+}_{2}(k)A(k,p)\,dk\,, \quad \text{----}(5.19)$$

(左右動)

$$H^{+}_{1}(p) = 2\pi i p + \int_0^\infty H^{+}_{1}(k)A(k,p)\,dk\,, \quad \text{---}(5.20)$$

(散乱波)

$$\left.\begin{aligned} H^{+}_{d}(p) &= \int_0^\infty A(k,p)H^{+}_{d}(k)\,dk \\ H^{-}_{d}(p) &= 4\pi K^{+-}(p,K) + \int_0^\infty A(k,p)H^{-}_{d}(k)\,dk\,, \end{aligned}\right\} \text{--}(5.21)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} A(k,p) &= \frac{(k+K)\,e^{-2hk}}{k(k-K+\mu i)}\, K^{+-}(k,p) \\ K^{+-}(k,p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(pk)^{n+1}}{n!\,(n+1)!}\,. \end{aligned}\right\} \text{---}(5.22)$$

この積分方程式は Havelock が没水円筒の造波抵抗の問題を扱かった時に導いたものに等しく，深度 h が大きければ逐次近似的に解く事は容易である。

又力については(4.36)が成立つので $H(p)$ を p の巾級数に展開した時の初項の係数として求められる訳である。(4.39)に対応するものを書き下せば

$$f_{2,2} = \pi - \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K+\mu i}\, e^{-2hk} H^{+}_{2}(k)\,dk\,, \quad \text{----}(5.23)$$

$$f_{1,1} = \pi - i\int_0^\infty \frac{k+K}{k-K+\mu i} e^{-2hk} H_1^+(k)\,dk, \quad \cdots (5.24)$$

6. 圧力分布

圧力 $p(x)e^{i\omega t}$ が $|x|\leq 1$ の区間に分布しているとすると、ベルヌーイの定理から線型的に

$$K\varphi(x,0) + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,0) = \begin{cases} \frac{i\omega}{\rho g}p(x) & \text{for } |x|\leq 1 \\ 0 & \text{for } |x|\geq 1 \end{cases} \quad \cdots (6.1)$$

X_j を振動の振幅とすると、境界条件は

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(x,0) = -i\omega X_j f_j(x), \text{ for } |x|\leq 1, \quad j=1,2,3,4 \quad (6.2)$$

の形になり

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\eta(x), && (\text{左右動}) \\ f_2(x) &= 1, && (\text{上下動}) \\ f_3(x) &= x, && (\text{回転動}) \\ f_4(x) &= -Ke^{iKx}, && (\text{散乱}) \end{aligned}\right\} \cdots (6.3)$$

$\eta(x)$ は c なる曲線の offset である。

そこで

$$\varphi_j(x,y) = i\omega X_j \phi_j(x,y), \quad \cdots (6.4)$$

とおけば (6.2) は

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi_j(x,0) = -f_j(x) \quad \text{for } |x|\leq 1, \quad \cdots (6.5)$$

となり、又 (6.1) は

$$K\phi_j(x,0) + \frac{\partial}{\partial y}\phi_j(x,0) = \frac{1}{\rho g}p_j(x), \quad \cdots (6.6)$$

となる。

ϕ および流れ函数 ψ は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \phi(x,y) &= \frac{-1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p(x')S(x-x',y)\,dx', \\ S(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-ky}\cos kx\,dk}{k-K+\mu i} \end{aligned}\right\} \cdots (6.7)$$

$$\psi(x,y) = \frac{-1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p(x')\, T(x-x', y)\,dx'$$

$$T(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-ky}\sin kx}{k-K+\mu i}\,dk \qquad \cdots (6.8)$$

無限遠方では (2.6)により

$$S(x,y) \longrightarrow -i\,e^{-Ky-iK|x|} - \frac{1}{K}u_1(x,y) - \frac{x'}{K}u_2(x,y) + \cdots \qquad \cdots (6.9)$$

であるから (6.7)に代入すると

$$\phi_j(x,y) \longrightarrow \frac{i}{\rho g}\,e^{-Ky\mp iKx} H_j^{\pm}(K) + \frac{F_{j2}}{\rho g K}u_1(x,y) + \frac{F_{j3}}{\rho g K}u_2(x,y) + \cdots \qquad \cdots (6.10)$$

ここに

$$H_j^{\pm}(K) = \int_{-1}^{1} p_j(x)\, e^{\pm iKx}\,dx, \qquad \cdots (6.11)$$

$$F_{j2} = \int_{-1}^{1} p_j\,dx, \quad F_{j3} = \int_{-1}^{1} p_j(x)\, x\,dx, \qquad \cdots (6.12)$$

F_{ji} は前同様やはり周期力となる。
これらの間には、

$$\int_{-1}^{1}\left(p_j\frac{\partial\phi_i}{\partial y} - p_i\frac{\partial}{\partial y}\phi_j\right)dx = \rho g K\int_{-1}^{1}\left(\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial y} - \phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\right)ds = 0$$

となる故 次の可逆性がある。

$$\int_{-1}^{1} p_j\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\,dx = \int_{-1}^{1} p_i\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\,dx\ ;\ \text{or}\ F_{ij} = F_{ji}, \qquad \cdots (6.13)$$

特に

$$\int_{-1}^{1} p_j\frac{\partial\phi_4}{\partial y}\,dx = \int_{-1}^{1} p_4\frac{\partial}{\partial y}\phi_j\,dx = K H_j^{+}(K), \qquad \cdots (6.14)$$

は Haskind の関係つまり波の強制力を与える事になる。
このように圧力分布では式が簡単になり、又翼理論における諸公式に類似性が大きくなる。
さて (6.11) は任意の k について定義されているものとし (6.7) を書きなおすと。

$$\phi(x,y) = -\frac{1}{2\pi\rho g}\int_0^\infty \frac{e^{-ky}dk}{k-K+\mu i}\{H_j^+(k)e^{-ikx}+H_j^-(k)e^{ikx}\}, \quad (6.15)$$

となるから，これを(6.6)に代入し $\frac{\partial}{\partial y}\overline{\Phi_i}$ をかけて x について積分すれば

$$\int_{-1}^1 p_j \frac{\partial}{\partial y}\overline{\Phi_i}\,dx = \rho g\int_{-1}^1 \frac{\partial\phi_j}{\partial y}\frac{\partial\overline{\Phi_i}}{\partial y}dx - \frac{K}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\{H_j^+(k)\overline{h_i^+(k)}+H_j^-(k)\overline{h_i^-(k)}\}}{k-K+\mu i}dk, \quad (6.16)$$

但し

$$\overline{h_i^\pm(k)} = \int_{-1}^1 \frac{\partial\overline{\Phi_i}}{\partial y}e^{\mp ikx}dx, \quad (6.17)$$

同様にして $\overline{p_i}$ をかけて積分すれば

$$\int_{-1}^1 \overline{p_i}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}dx = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^1 p_j\overline{p_i}\,dx + \frac{K}{2\pi\rho g}\int_0^\infty\{H_j^+(k)\overline{H_i^+(k)}+H_j^-(k)\overline{H_i^-(k)}\}\frac{dk}{k-K+\mu i}, \quad (6.18)$$

がえられる。この式は又 H を(6.11)によって p のフーリエ変換と見れば Plancherel の定理により

$$\int_{-1}^1 p_j\overline{p_i}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\{H_j^+(k)\overline{H_i^+(k)}+H_j^-(k)\overline{H_i^-(k)}\}dk.$$

であるから次のようにも書ける。

$$\int_{-1}^1\overline{p_i(x)}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}dx = \frac{1}{2\pi\rho g}\int_0^\infty\{H_j^+(k)\overline{H_i^+(k)}+H_j^-(k)\overline{H_i^-(k)}\}\frac{k\,dk}{k-K+\mu i}, \quad (6.19)$$

$H_j(k)$を決める積分方程式も同様にして(6.6)に $e^{\pm ikx}$ をかけて積分すれば直ちに得られる。

$$H_j^\pm(k) = \rho g\int_{-1}^1\frac{\partial\phi_j}{\partial y}e^{\pm ikx}dx - \frac{K}{\pi}\int_0^\infty\left\{H_j^+(k')\frac{\sin(k\mp k')}{k\mp k'}+H_j^-(k')\frac{\sin(k\pm k')}{k\pm k'}\right\}\frac{dk'}{k'-K+\mu i} \quad (6.20)$$

このように4節の場合に比して非常に簡単である。

境界条件の積分方程式は(6.6)その儘の形では

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -f(x) = \frac{p(x)}{\rho g} + \frac{K}{\rho g}\int_{-1}^1 p(x')S(x-x',0)\,dx', \quad (6.21)$$

となり，3節の方法でこれを簡単化し，各解の間の関係

を見出すことは容易である

振動によって出来る

3節における諸関係を物理的に考えると、波は変位と90°だけ位相が異なるので、変位の位相で出来た波は速度の位相において散乱反射される事になる訳であるから散乱ポテンシャルと変位振動等のポテンシャルルは必然的に関係があるのであると言う事になろう。

従って波が出来なければ分論関係がなくなってしまう訳である。　あるいは又ポテンシャルから正規波成分をとり除いても同じである。

その為に(6.8)に $\left(K^2+\frac{d^2}{dx^2}\right)$ なる演算を施こせば

$$\pi\rho g\left(\frac{d^2}{dx^2}+K^2\right)\psi(x,y) = \int_{-1}^{1} p(x')\left\{K\frac{(x-x')}{r^2}+\frac{\partial}{\partial x'}\frac{y}{r^2}\right\}dx'$$

$$\xrightarrow[y\to 0]{} -\frac{d}{dx}p(x) + \frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(x')}{x-x'}dx', \quad ---(6.22)$$

が得られる。

もう一度積分すると

$$\pi\rho g\left[\left(\frac{d^2}{dx^2}+K^2\right)\int_0^x \psi(x,0)dx + C\right] = -p(x) + \frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1} p(x')\log|x-x'|dx' \quad ---(6.23)$$

のようになって準特異積分方程式が得られる。(Wehausen)

そして散乱ポテンシャルの圧力分分は明らかにこの積分方程式の解として得られ、これだけは常に他の解を附加しても引いてもよい事になる。

$$C + Dx = -p(x) + \frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1} p(x')\log|x-x'|dx', \quad (6.24)$$

C, D. 任意常数.