No. 47.5.8

水面で振動する平板のつくる波について
(二次元問題)

別所正利

1. 速度ポテンシャルと境界条件

2. 力と相反性

3. 境界条件の積分方程式とその構成

4. 変分法

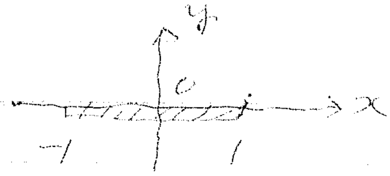
5. 解法について

附録I 核函数について
附録II 核函数の展開
補遺 解法について(II)

参考文献

1) MacCamy, R.C.; J.S.R. vol.5, 1961
2) Kim, W.D.; 〃 vol.7, 1963

1, 速度ポテンシャルと境界条件



圧力は

$$\frac{1}{\rho}P(x,y,t) = \Phi_t(x,y,t) - gy, \qquad (1.1)$$

水面では

$$\zeta_t(x,t) = -\Phi_y(x,0,t), \quad \cdots (1.2)$$

又

$$\frac{1}{\rho}P(x,0,t) = \Phi_t(x,0,t) - g\zeta(x,t), \qquad (1.3)$$

2式から

$$\frac{1}{\rho}P_t(x,0,t) = \Phi_{tt}(x,0,t) + g\Phi_y(x,0,t), \qquad (1.4)$$

今

$$\Phi(x,y,t) = \mathrm{Re}\{\varphi(x,y)e^{i\omega t}\} \quad \cdots \qquad (1.5)$$

のようにすべて $e^{i\omega t}$ が掛っているものとし、又その実部を suffix c、虚部を s で示すものとしよう。

$$\varphi(x,y) = \varphi_c + i\varphi_s,\ p = p_c + ip_s,\ \zeta = \zeta_c + i\zeta_s, \qquad (1.6)$$

(1.2), (1.3), (1.4) は次のようになる。

$$i\omega\zeta(x) = -\varphi_y(x,0), \qquad (1.7)$$

$$\frac{1}{\rho}P(x,0) \equiv \frac{1}{\rho}p(x) = i\omega\varphi(x,0) - g\zeta(x), \qquad (1.8)$$

$$\frac{i\omega}{\rho g}p(x) = -K\varphi(x,0) + \varphi_y(x,0), \qquad (1.9)$$

但し $K = \omega^2/g$ とする。

X_j を振動の振幅とすると境界条件は

$$\varphi_{jy}(x,0) = -i\omega X_j f_j(x) \quad \text{for } |x| \le 1, \qquad (1.10)$$

と書ける。

ここに suffix 1 は sway, 2 は heave, 3 は roll, $\cancel{X_4}$ ~~振~~ a は入射波の振幅とする。そうすると

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \zeta_x(x) \\ f_2(x) &= 1 \\ f_3(x) &= x \\ f_4(x) &= e^{iKx} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1.11)$$

そこで

$$\left.\begin{aligned} \varphi_j &= i\omega X_j \phi_j(x,y) \\ p_j(x) &\longrightarrow X_j p_j(x) \end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

のように法化すれば(1.10)は

$$\phi_{jy}(x,0) = -f_j(x) \quad \text{for } |x|<1 \quad , \cdot (1.13)$$

又(1.9)は

$$\phi_y(x,0) - K\phi(x,0) = \begin{cases} \dfrac{p(x)}{\rho g} & \text{for } |x|<1 \\ 0 & \text{for } |x|>1 \end{cases} \qquad (1.14)$$

となる。

なお入射波は

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(x,y) &= \frac{ag}{i\omega} e^{Ky+iKx} \\ \eta_0(x) &= a e^{iKx} \end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

の様なxの正方向から負方向に進む波と仮定してある。

さてこのような条件と波が外に出て行く条件を満足する解は

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p(x') S(x-x'; y)\, dx', \qquad (1.16)$$

ここに

$$S(x,y) = \frac{1}{\pi}\lim_{\mu\to+0}\int_0^{\infty} \frac{e^{ky}\cos kx}{k-K+i\mu}\, dk, \qquad (1.17)$$

で与えられる。

$|x| \gg 1$では

$$\left.\begin{aligned} S(x,y) &\longrightarrow -i e^{Ky-iK|x|} + \frac{1}{K}u_1(x,y) + \frac{-x}{K}u_2(x,y), \\ u_1(x,y) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{y}{r^2} + \frac{x^2-y^2}{Kr^4}\right), \\ u_2 &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{xy}{r^4} + \frac{x^3-3xy^2}{Kr^6}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (1.18)$$

となるから(1.16)に代入すると

$$\phi_j(x,y) \longrightarrow \frac{i}{\rho g} H_j^{\pm}(K) e^{Ky\mp iKx} + \frac{F_{j2}}{\rho g K} u_1(x,y) + \frac{F_{j3}}{\rho g K} u_2(x,y), \quad \cdots (1.19)$$

但し
$$H_j^{\pm}(K)=\int_{-1}^{1}p_j(x)e^{\pm iKx}dx, \quad \cdots \tag{1.20}$$
$$F_{j2}=\int_{-1}^{1}p_j(x)dx, \quad F_{j3}=\int_{-1}^{1}p_j(x)x\,dx, \tag{1.21}$$
なる漸近展開を得る。

なお u_1, u_2 は wave free potential である。

2. 力と相反性

核分の対称性から直ちに次の Haskind の関係がわかる。
$$\int_{-1}^{1}p_j(x)\phi_i(x,0)dx=\int_{-1}^{1}p_i(x)\phi_j(x,0)dx, \quad \cdots \tag{2.1}$$
or
$$\int_{-1}^{1}p_j\,\phi_{iy}(x,0)\,dx=\int_{-1}^{1}p_i\,\phi_{jy}\,dx, \tag{2.2}$$
特に
$$\int_{-1}^{1}p_j\,\phi_{4y}\,dx=\int_{-1}^{1}p_4\,\phi_{jy}\,dx, \quad \cdots \tag{2.3}$$
は波の力を与える。

同様にして
$$\int_{-1}^{1}p_i(x)\overline{\phi_{jy}}(x,0)\,dx=\frac{1}{2\pi\rho g}\int_0^{\infty}\left\{H_i^+(k)\overline{H_j^+(k)}+\overline{H_i^-(k)}H_j^-(k)\right\}\frac{k\,dk}{k-K-i\mu}, \quad \cdots \tag{2.4}$$
なる関係がある。

なお p は静水圧を含むので注意しなければならない。即ち
$$\rho g\int p_i\,\phi_{jy}\,dx=-K\int \phi_i\,\phi_{jy}\,dx+\int \phi_{iy}\,\phi_{jy}\,dx, \tag{2.5}$$
において右辺第2項は静水圧で普通は別に計算しているものである。

さて今実際の力を
$$F_{ij}=\int p_i f_j\,dx=M_{ij}\ddot{X}_i+N_{ij}\dot{X}+K_{ij}X_i, \quad \cdots \tag{2.6}$$

のように added mass M, damping N, 復原力 K で表わすと、

$$F_{ij} = [-\omega^2 M_{ij} + i\omega N_{ij} + K_{ij}]\, X_i e^{i\omega t} \quad , \qquad (2.7)$$

であり、一方 Normalize した形では

$$\left.\begin{aligned} F_{ij} &= \int P_i f_j \, dx \rightarrow -X_i e^{i\omega t} f_{ij} \, , \\ f_{ij} &= \int P_i \phi_{jy} \, dx \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

よって

$$\frac{1}{\rho g} f_{ij} = \frac{\omega^2}{\rho g} M_{ij} - \frac{i\omega}{\rho g} N_{ij} - \frac{1}{\rho g} K_{ij}$$

$$= \frac{K}{\rho} M_{ij} - i\frac{K}{\rho\omega} N_{ij} - \frac{K_{ij}}{\rho g} \, , \qquad (2.9)$$

(2.5) と比較して

$$\frac{1}{\rho} M_{ij} - \frac{i}{\rho\omega} N_{ij} = -\int \phi_i \phi_{jy} \, dx = \frac{1}{\rho g}(f_{ij} + K_{ij}) \, , \qquad (2.10)$$

$$\frac{1}{\rho g} K_{ij} = -\int \phi_{iy} \phi_{jy} \, dx \quad , \qquad (2.11)$$

となる。

4. 境界条件の積分方程式とその構成

境界条件は

$$\phi_y(x,0) = -f(x) = \frac{p(x)}{\rho g} + \frac{K}{\rho g} \int_{-1}^{1} p(x') \, S'(x-x',0) \, dx' \, , \qquad (3.1)$$

となるが $\quad S'(x,0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos kx \, dk}{k - K + \mu i} = S_c(x) - i\cos Kx \, , \qquad (3.2)$

これは実部と虚部の2つの方程式に表わされる。

今 $\frac{p}{\rho g} = P_c + iP_s$, $f = f_c + if_s$

とおくと

$$\left.\begin{aligned} &p_c(x) + K\left[\int p_c S_c\,dx' + \int_{-1}^{1} p_s(x')\cos K(x-x')\,dx'\right] = -f_c(x) \\ &p_s(x) + K\left[\int p_s S_c\,dx' - \int_{-1}^{1} p_c(x')\cos K(x-x')\,dx'\right] = -f_s(x) \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

特に heave では p は左右対称であるから

$$\int_{-1}^{1}(p_{2c}+ip_{2s})e^{iKx}dx = \int_{-1}^{1}(p_{2c}+ip_{2s})\cos Kx\,dx = H_{2c}(K)+iH_{2s}(K),$$

roll では反対称故

$$\int_{-1}^{1}(p_{3c}+ip_{3s})e^{iKx}dx = i\int_{-1}^{1}(p_{3c}+ip_{3s})\sin Kx\,dx = iH_{3c}(K)-H_{3s}(K) \quad (3.4)$$

となるので (3.3)は

$$\left.\begin{aligned} &p_{2c}(x) + K\int_{-1}^{1} p_{2c}S_c\,dx' + KH_{2s}\cos Kx = -1 \\ &p_{2s}(x) + K\int_{-1}^{1} p_{2s}S_c\,dx' - KH_{2c}\cos Kx = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

$$\left.\begin{aligned} &p_{3c}(x) + K\int_{-1}^{1} p_{3c}S_c\,dx' + KH_{3s}\sin Kx = -x \\ &p_{3s}(x) + K\int_{-1}^{1} p_{3s}S_c\,dx' - KH_{3c}\sin Kx = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

(3.5)において，それ自身を解く代りに

$$\left.\begin{aligned} &p_a + K\int_{-1}^{1} p_a S_c\,dx' = 1 \\ &p_e + K\int_{-1}^{1} p_e S_c\,dx' = \cos Kx \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

なる2つの式を解いて p_a, p_e を求めると線型的に加え合わせる事により，原解は次のように表わせる。

$$\left.\begin{aligned} &p_{2c}(x) = -p_a(x) - KH_{2s}(K)p_e(x) \\ &p_{2s}(x) = KH_{2c}(K)p_e(x), \end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

H を求めるには上式を積分して

$$\left.\begin{aligned} &H_{2c}(K) = -H_a(K) - KH_{2s}(K)H_e(K) \\ &H_{2s}(K) = KH_{2c}(K)H_e(K) \end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

or
$$H_a = -\frac{1}{H_{2c}}\{H_{2c}^2 + H_{2s}^2\}$$
$$H_b = \frac{1}{K}(H_{2s}/H_{2c}) \qquad (3.9)$$
or
$$H_{2c} = -H_a/(1+K^2H_b^2)$$
$$H_{2s} = -KH_aH_b/(1+K^2H_b^2)$$

よって最終的に

$$P_{2c}(x) + i P_{2s}(x) = -P_a(x) - \frac{H_a(K)}{1-iKH_a(K)}P_b(x), \quad (3.10)$$

同様にして．

$$P_c + K\int_{-1}^{1} P_c S_c\, dx' = x$$
$$P_d + K\int P_d S_c\, dx' = \sin Kx \qquad (3.11)$$

の解 P_c, P_d により (3.6) の解は．

$$P_{3c}(x) = -P_c(x) - KH_{3s}(K)P_d(x)$$
$$P_{3s}(x) = KH_{3c}(K)P_d(x) \qquad (3.12)$$

$$H_{3c} = -H_c - KH_{3s}H_d$$
$$H_{3s} = KH_{3c}H_d$$
or
$$H_{3c} = -H_c/(1+K^2H_d^2) \qquad (3.13)$$
$$H_{3s} = -KH_cH_d/(1+K^2H_d^2)$$

$$P_{3c}(x) + iP_{3s}(x) = -P_c(x) - \frac{iH_c(K)P_a(x)}{1-iKH_d(K)}, \quad (3.14)$$

をうる。

最後に diffraction では

$$\int_{-1}^{1}(P_{4c}+iP_{4s})\cos Kx\,dx = h_c + ih_s$$
$$\int_{-1}^{1}(P_{4c}+iP_{4s})\sin Kx\,dx = g_c + ig_s \qquad (3.15)$$

とおくと (3.3)は

$$\left.\begin{aligned} p_{4c}(x)+K\int p_{4c}S_c\,dx'+Kh_s\cos Kx+Kg_s\sin Kx&=-K\cos Kx\\ p_{4s}(x)+K\int p_{4s}S_c\,dx'-Kh_c\cos Kx-Kg_c\sin Kx&=-K\sin Kx\end{aligned}\right\}\quad(3.16)$$

となっているから (3.7), (3.11) のそれぞれの式の解を使うと

$$\left.\begin{aligned} p_{4c}(x)&=-Kg_s p_d(x)-K(1+h_s)p_e(x)\\ p_{4s}(x)&=Kh_c p_e(x)-K(1-g_c)p_d(x)\end{aligned}\right\}\quad(3.17)$$

と書ける。

前と同様にして

$$\left.\begin{aligned} h_c+ih_s&=-KH_e/(1-iKH_e)\\ g_c+ig_s&=-iKH_d/(1-iKH_d)\end{aligned}\right\}\quad(3.18)$$

$$p_{4c}(x)+ip_{4s}(x)=-K\left\{\frac{1+\cancel{iKH_e}}{1-iKH_e}\right\}p_e(x)-iK\left\{\frac{1+\cancel{iKH_d}}{1-iKH_d}\right\}p_d(x),\quad(3.19)$$

従って (3.7) と (3.11) の解からすべての解が導かれる事になる。

なお今は sway osc. は高次の微小量として以下考えない事にするが、diffraction pressure が上のように求まると、η 方向の力は

$$\int p\frac{\partial \eta}{\partial x}dx\qquad(\eta;\ \text{offset})\qquad,\qquad(3.20)$$

によって計算出来、又 Haskind の関係によって damping も求まる。従ってその大きさの程度は見当がつけられる事になる。

4. 変分法

汎函数

$$J = 2\int p f\,dx + \int p\,\varphi_y\,dx, \qquad (4.1)$$

において p を $p+\delta p$ と考えると相反原理により

$$\delta J = 2\int \delta p\,(f+\varphi_y)\,dx, \qquad (4.2)$$

となるから $\delta J=0$ は $\varphi_y + f = 0$, (4.3)

と等価になりこの時その停留値は

$$[J] = -\int p\,\varphi_y\,dx, \qquad (4.4)$$

となるがこれは p を適当な函数系に展開して解く時の数学的な又物理的な意味づけとなる。

なおこの時 J は複素数であるから、前節同様実部虚部の二つの方程式に分ける事が出来る。

このようにして考えて見ると、結局前節で定義した P_a, P_b, P_c, P_d に対して上の変分原理が成立つ事がわかる。

この原理は近似値を求める時極めて有用である。例えば(3.1)において $k\to 0$ の時の第0近似は

$$\frac{p(x)}{\rho g} \doteqdot -f(x), \qquad (4.5)$$

であるから(1.15)に代入すると第1近似は

$$\varphi(x,0) = -\int_{-1}^{1} f(x')\,S(x-x',0)\,dx', \qquad (4.6)$$

(2.10)によって局部的浮力を除く力の第1近似は

$$\int \varphi f\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x)f(x')\,S(x-x',0)\,dx\,dx', \qquad (4.7)$$

で与えられる。

この原理によれば(4.5)に未定定数αをかけて，それを決める事が出来る。

即ち

$$\frac{P(x)}{P\psi} = -\alpha f(x) \,, \qquad (4.8)$$

とおいて，

$$J = -2\alpha\int f^2 dx - \alpha^2\int f\psi_y(f)\,dx$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} J = -2\int f^2 dx - 2\alpha\int f\psi_y(f)\,dx = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
\therefore\quad & \alpha = \int f^2 dx \Big/ \left[\int f^2 dx + K\int \phi f\,dx\right], \\
\because\quad & \int f\psi_y(f)\,dx = -\int f^2 dx - K\int\phi f\,dx, \\
& [J] = -\left[\int f^2 dx\right]^2 \Big/ \left[\int f^2 dx + K\int\phi f\,dx\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

ここで$\int\phi f\,dx$は(4.7)によって与えられる。

そこでやはり(2.8)により，静的部分の寄与を除く分は

$$\int\phi f\,dx = \frac{1}{K}\left[[J] + \int f^2 dx\right] \simeq \frac{-\int\phi f\,dx}{1 + \left\{K\int f\phi\,dx \Big/ \int f^2 dx\right\}} \,, \qquad (4.10)$$

最左辺の$\int\phi f\,dx$は新らしい近似値を意味する。
右辺のそれは(4.7)と同じものであるから，その知識のみで新らしい近似値が出て来る事になり，これは又良い近似値を与える。

5. 解法について

3節の考察により(3.7),(3.11)を解けばよい。
これらは第2種フレドホルム型で核は対数的特異点を有する所謂準正則核であるから解の唯一性について問題はない。

附録IIのように解をLegendre函数に展開するのが最も簡単のように思われるが、McCamyの方法も魅力がある。ここではそれを少し変形しておこう。

まず

$$p(x) = \frac{d^2}{dx^2}\mu(x) + K^2\mu(x) \quad , \qquad (5.1)$$

としてμ(x)を定義すると与えられたpに対しμは境界条件を除いて唯一つ決まる。

そこで

$$\mu(\pm 1) = 0 \quad , \qquad (5.2)$$

としておこう。

(3.7),(3.11)を一括して

$$\left.\begin{aligned} p(x) + K\int_{-1}^{1} p(x')\,S_c(x-x')\,dx' &= f(x) , \\ S_c(x) &= \frac{1}{\pi}\,P.V.\int_0^\infty \frac{\cos kx\,dk}{k-K} \end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

とおき(5.1),(5.2)を代入して部分積分すると

$$\int_{-1}^{1} p(x')\,S_c(x-x')\,dx' = \mu'(1)\,S_c(x-1) - \mu'(-1)\,S_c(x+1) - K\mu(x) + \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-1}^{1}\frac{\mu(x')}{x-x'}dx'$$

となるから(5.3)に代入して結局

$$f(x) = \mu'(1)\,S_c(1-x) - \mu'(-1)\,S_c(1+x) + \mu''(x) - \frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mu'(x')\,dx'}{x-x'} , \qquad (5.4)$$

をうる。なお

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\mu(x')\,dx'}{x-x'} = \int_{-1}^{1}\frac{\mu'(x')\,dx'}{x-x'}$$

$$S_c(-x) = S_c(x)$$

である。

右辺最後の項は又

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mu'(x')dx'}{x-x'}=\int_{-1}^{1}\frac{\mu'(x')-\mu'(x)}{x-x'}dx'+\mu'(x)\int_{-1}^{1}\frac{dx'}{x-x'}$$

$$=\mu'(x)\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\int_{-1}^{1}\frac{\mu'(x)-\mu'(x')}{x-x'}dx', \qquad (5.5)$$

とおけば被積分函数は有限となって積分が簡単になる。

よって (5.4) は

$$f(x)=\mu'(1)S_c(1-x)+\mu'(x)\log(1-x)-\mu'(-1)S_c(1+x)-\mu'(x)\log(1+x)$$

$$+\mu''(x)+\frac{k}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mu'(x)-\mu'(x')}{x-x'}dx', \qquad (5.6)$$

と書く事が出来る。

そして又

$$S_c(1-x)\xrightarrow[x\to 1]{}-\frac{1}{\pi}\left[C+\log k+\log|1-x|\right]+\cdots$$

C; Euler's Constant

であるから $x=\pm 1$ において右辺はすべて有限な値となる事がわかる。

なお勿論 $\lim_{x\to x'}\frac{\mu'(x)-\mu'(x')}{x-x'}=\mu''(x)$ である。

従って $\int_{-1}^{1}\mu(x)dx=0$ となるような $\mu(x)$ を適当に仮定して (5.6) を解けばよい。(~~逐次近似的~~ 純数値的に解くのが便利)

なおこの時

$$\int_{-1}^{1}p(x)e^{ikx}dx=\mu'(1)e^{ik}-\mu'(-1)e^{-ik}, \qquad (5.7)$$

$$\int_{-1}^{1}p(x)\,dx=\mu'(1)-\mu'(-1)+k^2\int_{-1}^{1}\mu(x)dx$$

$$=\mu'(1)-\mu'(-1)-k^2\int_{-1}^{1}x\mu'(x)dx, \qquad (5.8)$$

$$\int_{-1}^{1}p(x)\,x\,dx=\mu'(1)+\mu'(-1)+k^2\int_{-1}^{1}x\mu(x)dx$$

$$=\mu'(1)+\mu'(-1)-\frac{k^2}{2}\int_{-1}^{1}x^2\mu'(x)dx, \qquad (5.9)$$

なる関係がある。

附録 I　積函数について．

$$S(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{ky}\cos kx\,dk}{k-K+\mu i}=S_c(x,y)-i\cos Kx,\qquad (1)$$

$$S_c(x,y)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P.V.}\int_0^\infty \frac{e^{ky}\cos kx\,dk}{k-K},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}S=-\frac{K}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{ky}\sin kx\,dk}{k-K+\mu i}-\frac{x}{\pi(x^2+y^2)},\qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}S=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{Ky}{\pi(x^2+y^2)}-\frac{K^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{ky}\cos kx\,dk}{k-K+\mu i}$$

$$\therefore\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+K^2\right)S(x,y)=\frac{1}{\pi}\left(K-\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{Ky}{\pi(x^2+y^2)}-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right),$$
$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+K^2\right)S_c(x,y)\qquad (3)$$

あらためてつぎの函数を導入しよう。

$$S(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos kx\,dk}{k-K+\mu i}$$
$$T(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin kx\,dk}{k-K+\mu i}\qquad (4)$$

そうすると　$x>0$に対して

$$S+iT=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{ikx}\,dk}{k-K+\mu i}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-ikx}\,dk}{k+K}$$
$$=\frac{e^{iKx}}{\pi}\int_{Kx}^\infty \frac{e^{-iu}\,du}{u}$$
$$=\frac{e^{iKx}}{\pi}\left\{-C_i(Kx)+i\,si(Kx)\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{g(Kx)-i f(Kx)\right\},\qquad (5)$$

よって

$$S(x,0)=\frac{1}{\pi}g(Kx)=-\frac{1}{\pi}\left\{\cos Kx\,C_i(Kx)+\sin Kx\,si(Kx)\right\}$$
$$T(x,0)=-\frac{1}{\pi}f(Kx)=\frac{1}{\pi}\left\{\cos Kx\,si(Kx)-\sin Kx\,C_i(Kx)\right\}\qquad (6)$$

$$\therefore \quad S_c(x,0) = \frac{1}{\pi} g(kx) - \sin kx \qquad T_c(x,0) = \cos kx - \frac{1}{\pi} f(kx) \qquad (7)$$

ここに

$$Ci(z) = -\int_z^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = C + \log z - \int_0^z \frac{1-\cos t}{t}\,dt = C + \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n\cdot(2n)!},$$

C : Euler's Constant

$$Si(z) = -\int_z^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\pi}{2} + \int_0^z \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}, \qquad (8)$$

よって

$$S + iT \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{\pi}\left[C + \log kx + \frac{\pi}{2} i\right] + \cdot \qquad (9)$$

$x \gg 1$ ならば

$$S + iT = \frac{-1}{\pi} e^{ikx} \int_\infty^{kx} e^{-iu} \frac{du}{u}$$

$$\xrightarrow[x\gg 1]{} \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(kx)^2} - \frac{3!}{(kx)^4} + \cdots - i\left\{\frac{1}{kx} - \frac{2!}{(kx)^3} + \cdots\right\}\right], \qquad (10)$$

附録 II 核函数の展開

$$S_c(x,0) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_0^\infty \frac{\cos kx\, dk}{k-K} \equiv S_c(x) \quad \cdots \quad (1)$$

を Legendre 函数 P_n に展開しよう。

$$\int_{-1}^{1} e^{ikx} P_n(x)\, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\, i^n J_{n+\frac{1}{2}}(k) \quad , \quad \cdots (2)$$

であるから

$$\int_{-1}^{1} P_n(x') S_c(x-x')\, dx' = C_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{k-K}\left[e^{ikx}(-i)^n J_{n+\frac{1}{2}}(k) + e^{-ikx} i^n J_{n+\frac{1}{2}}(k)\right]\sqrt{\frac{2\pi}{k}}$$

$$= \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k)}{k-K}\frac{dk}{\sqrt{k}}\left\{e^{ikx} + (-1)^n e^{-ikx}\right\}, \quad (3)$$

さらに

$$C_{n,m} = \int_{-1}^{1} C_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k)}{k-K}\frac{dk}{k}\left\{ i^m J_{m+\frac{1}{2}} + (-1)^n (-i)^m J_{m+\frac{1}{2}}\right\},$$

$$= (i)^{m-n}\int_0^\infty \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k)}{k-K}\frac{dk}{k}\cdot J_{m+\frac{1}{2}}\left\{1+(-1)^{m+n}\right\}$$

$$= i^{m-n}\left\{1+(-1)^{m+n}\right\}\int_0^\infty \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k)\, J_{m+\frac{1}{2}}(k)}{k-K}\frac{dk}{k}, \quad (4)$$

一方

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{for } n=m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases} \quad (5)$$

であるから

$$\left.\begin{aligned} C_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(x) \\ A_m &= \frac{2m+1}{2} C_{n,m} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$S_c(x-x') = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \cancel{B_n(x)} P_n(x') \times \left(\frac{2n+1}{2}\right), \quad (7)$$

$$\cancel{B_n(x')} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right) C_{n,m} P_n(x') P_m(x'),$$

(4) から明らかに n, m が共に odd 若くは even でなければ 0 になる。

$$C_{2n,2m+1} = 0 \qquad (8)$$

$$C_{2n,2m} = 2(-)^{m-n}\int_0^\infty \frac{J_{2n+\frac{1}{2}}(k)J_{2m+\frac{1}{2}}(k)}{k-K}\frac{dk}{k}$$

$$C_{2n+1,2m+1} = 2(-1)^{m-n}\int_0^\infty \frac{J_{2n+\frac{3}{2}}(k)J_{2m+\frac{3}{2}}(k)}{k-K}\frac{dk}{k} \qquad (9)$$

ここで新らしく

$$I_{n,m} = I_{m,n} = \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(k)J_{n+\frac{1}{2}}(k)dk}{k-K}, \qquad (10)$$

なる積分を定義すると

$$C_{2n,2m} = (-)^{m-n}\int_0^\infty \frac{J_{2n+\frac{1}{2}}}{k-K}dk\left(J_{2m-\frac{1}{2}} + J_{2m+\frac{3}{2}}\right)$$

$$= (-)^{m-n}\left[I_{2n,2m-1} + I_{2n,2m+1}\right]$$

$$= (-)^{m-n}\left[I_{2n-1,2m} + I_{2n+1,2m}\right],$$

$$C_{2n+1,2m+1} = (-)^{m-n}\left[I_{2n+1,2m} + I_{2n+1,2m+2}\right]$$

$$= (-)^{m-n}\left[I_{2n,2m+1} + I_{2n+2,2m+1}\right], \qquad (11)$$

$I_{n,m}$ は $J_{n+\frac{1}{2}}$ の recurrence formula をもちって次の recurrence relation を有する。

$$I_{n,m} + I_{n,m+2} = \frac{2m+3}{K}\left(I_{n,m+1} - \varepsilon_{n,m+1}\right), \qquad (12)$$

$$\varepsilon_{n,m} = \int_0^\infty \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k)J_{m+\frac{1}{2}}(k)}{k}dk = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\left(\frac{m-n}{2}\pi\right)}{(m+\frac{1}{2})^2-(n+\frac{1}{2})^2}, \qquad (13)$$

よって

$$\varepsilon_{n,m} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+n+1} & \text{for } n=m \\ 0 & \text{for } (m-n);\ \text{even} \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{(-)^{\frac{m-n-1}{2}}}{(m-n)(m+n+1)} & \text{for } m-n\ ;\ \text{odd} \end{cases} \qquad (14)$$

特に

$$I_{\frac{1}{2}}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\cos k, \quad J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{k\pi}}\sin k.$$

$$J_{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\left(-\cos k + \frac{\sin k}{k}\right) \qquad (15)$$

を代入して最初の3つを取出すと、前節で定義した f, g 函数によって次のように表わせる。

$$I_{-1,0} = \frac{1}{K}\left(-\frac{1}{2} + \cos 2K\right) - \frac{1}{\pi K} f(2K),$$

$$I_{0,0} = \frac{1}{K}\sin 2K - \frac{1}{\pi K}\left\{\log 2K + g(2K)\right\},$$

$$I_{-1,1} = -I_{0,0} + \frac{1}{K} I_{0,-1} + \frac{2}{K}\sin 2K - \frac{2}{\pi K}\left[1 + g(2K)\right], \qquad (16)$$

これから $I_{n,m}$ がすべて計算出来るから (11.) によって

$$C_{2n,2m} = (-)^{m-n}\frac{4m+1}{K}\left\{I_{2n,2m} - \varepsilon_{2n,2m}\right\},$$

$$C_{2n+1,2m+1} = (-)^{m-n}\times\frac{4m+3}{K}\left\{I_{2n+1,2m+1} - \varepsilon_{2n+1,2m+1}\right\} \qquad (17)$$

によって $C_{n,m}$ が求められる。

補遺 解法について(II)

McCamy の方法を整理して見よう。

そのために
$$\phi(x,y)=\int_{-1}^{1}p(x')S'(x-x';y)\,dx', \quad \cdots (6.1)$$
とおき その共軛函数を ψ とおこう。
$$\phi_y(x,y)=\psi_x(x,y), \quad \psi_y(x,y)=-\phi_x(x,y), \quad \cdots (6.2)$$
そうすると
$$\psi(x,y)=\int_{-1}^{1}p(x')T(x-x';y)\,dx', \quad \cdots (6.3)$$
とかけ
$$T(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{ky}\sin kx}{k-K+\mu i}\,dk, \quad (6.4)$$
となる。

明らかに
$$S_y(x,y)=T_x(x,y), \quad S_x(x,y)=-T_y(x,y), \quad (6.5)$$
である。

さて
$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-K\right)T(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{ky}\sin kx\,dk=\frac{x}{\pi(x^2+y^2)}, \quad (6.6)$$
故
$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-K\right)\psi(x,y)=q(x,y), \quad \cdots (6.7)$$
但し
$$q(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}p(x')\frac{(x-x')}{(x-x')^2+y^2}\,dx', \quad \cdots (6.8)$$
$$p(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}p(x')\frac{(-y)}{(x-x')^2+y^2}\,dx' \xrightarrow[y\to 0]{} p(x), \quad (6.9)$$
とすると
$$\frac{\partial}{\partial x}p(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}q(x,y), \quad \cdots (6.10)$$
である。

これらの関係と(6.7)から、(ψは未知函数である)
$$\left(K^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x,y)-\frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1}p(x')\log\sqrt{(x-x')^2+y^2}\,dx'\right], \quad (6.11)$$
を得る。

よって $\int_0^x \left(K^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,0)\,dx + p(0) - \frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1} p(x')\log|x'|\,dx'$

$$= p(x) - \frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1} p(x')\log|x-x'|\,dx', \quad \cdots (6.12)$$

一方 $\psi_x = \phi_y$ であるから.

$$\psi_x(x,0) = \phi_y(x,0) = \eta(x) = f(x) \quad , \;---\; (6.13)$$

とおけば

$$\left.\begin{aligned}\psi(x,0) &= \int_0^x f(x)\,dx + \psi(0,0)\\ \int_0^x \psi(x,0)\,dx &= \int_0^x dx\int_0^x f(x)\,dx + x\,\psi(0,0)\end{aligned}\right\} \quad (6.14)$$

であるから (6.12) の左辺は.

$$(6.12)\text{の左辺} = F(x) + R_0(p) + x\,R_1(p), \quad --(6.15)$$

とおけて

$$F(x) = K^2\int_0^x dx\int_0^x f(x)\,dx + f(x), \; - \quad (6.16)$$

$$R_0(p) = -\psi_x(0,0) + p(0) - K\int_{-1}^{1} p\log|x'|\,dx'$$

$$= -K\left[\phi(0,0) + \int_{-1}^{1} p\log|x'|\,dx'\right], \quad (6.17)$$

$$\because\; p_0 - \psi_x = p_0 - \phi_y = -K\phi$$

$$R_1(p) = \psi(0,0) \quad , \;\cdots\cdots \quad (6.18)$$

或いは $$R_0(p) = -\frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1} p(x')\left[\log|x'| + \int_0^\infty \frac{\cos kx'}{k-K+\mu i}\,dk\right]dx', \quad (6.17')$$

$$R_1(p) = -\frac{K^2}{\pi}\int_{-1}^{1} p(x')\,dx'\int_0^\infty \frac{\sin kx'}{k-K+\mu i}\,dk, \quad (6.18')$$

一方 境界条件 としては

$$\left.\begin{aligned} f_0(x) &= 1\\ f_1(x) &= x\\ f_d(x) &= e^{ikx}\end{aligned}\right\} \quad ---\; (6.19)$$

を考えておけばよいから

$$F_0(x) = 1 + \frac{K^2}{2}x^2,$$
$$F_1(x) = x + \frac{K^2}{6}x^3, \quad \cdots\cdots (6.20)$$
$$F_d(x) = 1 + iKx,$$

であるから解くべき方程式は

$$p(x) - \frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1} p(x') \lg|x-x'|\,dx' = h_n(x), \quad \cdots (6.21)$$

$$h_0 = 1,\ h_1 = x,\ h_2 = \frac{x^2}{2},\ h_3 = \frac{x^3}{6}, \quad (6.22)$$

である。

$h_n(x)$に対する解を$p_n(x)$とおくと(6.12), (6.15)を代入して diffraction に対しては

$$p_d(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x), \quad \cdots (6.23)$$
$$a_0 = \frac{1}{1 - R_0(p_0)}, \quad a_1 = \frac{iK}{1 - R_1(p_1)}, \quad \cancel{(6.24)}$$

heaving に対しては

$$p_h(x) = a_0 p_0(x) + a_2 p_2(x),$$
$$a_0 = \frac{1 + K^2 R_0(p_2)}{1 - R_0(p_0)}, \quad a_2 = K^2, \quad (6.24)$$

pitching に対して

$$p_p(x) = a_1 p_1(x) + a_3 p_3(x),$$
$$a_1 = \frac{1 + K^2 R_1(p_3)}{1 - R_1(p_1)}, \quad a_3 = K^2, \quad (6.25)$$

と書き表わせる。

新らしく

$$\left.\begin{aligned} 1 - R_0(p_0) &= R_{00} - iKH_0(K) \\ 1 + K^2R_0(p_2) &= R_{02} + iK^3H_2(K) \\ 1 - R_1(p_1) &= R_{11} - iKH_1(K) \\ 1 + K^2R_1(p_3) &= R_{13} + iK^3H_3(K) \end{aligned}\right\} \quad \cdots (6.26)$$

$$H_j(K) = \int_{-1}^{1} p_j(x) \begin{pmatrix} \cos Kx \\ \text{or} \\ \sin Kx \end{pmatrix} dx, \quad \cdots (6.27)$$

$$\left.\begin{aligned} R_{00} &= 1 + \frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1} p_p(x')\left[\lg|x'| + P.V.\int_0^\infty \frac{\cos kx'}{k-K}dk\right]dx', \\ R_{02} &= 1 - \frac{K^3}{\pi}\int_{-1}^{1} p_2(x')\left[\qquad \text{〃} \qquad\right]dx', \\ R_{11} &= 1 + \frac{K}{\pi}\int_{-1}^{1} p_1(x')\left[P.V.\int_0^\infty \frac{\sin kx'}{k-K}\right]dx', \\ R_{13} &= 1 - \frac{K^3}{\pi}\int_{-1}^{1} p_3(x')\left[\qquad \text{〃} \qquad\right]dx', \end{aligned}\right\} (6.28)$$

と定義すれば R_{ij}, H_j はすべて real となる。
これらの記号を用いて解を書き下すと、
diffraction に対して、

$$\left.\begin{aligned} p_d(x) &= \frac{p_0(x)}{R_{00} - iKH_0(K)} + \frac{iKp_1(x)}{R_{11} - iKH_1(K)}, \\ H_d(K) &= \int_{-1}^{1} p_d(x)e^{iKx}dx = \frac{H_0(K)}{R_{00} - iKH_0} - \frac{KH_1(K)}{R_{11} - iKH_1}, \end{aligned}\right\} (6.29)$$

heaving に対して

$$\left.\begin{aligned} p_h(x) &= \frac{R_{02} + iK^3H_2}{R_{00} - iKH_0}\,p_0(x) + K^2p_2(x), \\ H_h(K) &= \int_{-1}^{1} p_h \cos Kx\,dx = \frac{R_{02}H_0 + K^2R_{00}H_2}{R_{00} - iKH_0}, \end{aligned}\right\} (6.30)$$

pitching に対して.

$$p_\theta(x) = \frac{R_{13}+iK^3H_3}{R_{11}-iKH_1}\, p_1(x) + K^2 p_3(x),$$

$$H_\theta(K) = \int_{-1}^{1} p_\theta(x)\sin Kx\, dx = \frac{R_{13}H_1 + K^2 R_{11} H_3}{R_{11}-iKH_1}, \quad \cdots (6.31)$$