

昭和47年11月4日

## 水戸の京の川他内道。解不月前檢封

1. 検査法。種。管理
2. 検査法 (I) ( $t \rightarrow 0$ )
3. " (II) (分数表示) ( $x \geq 1$ )
4. " (III) ( $0 < x < 1$ )
5. " (IV) ( $x \approx 0$ )

昭和47年11月4日

# 水波の初期値問題の解の解析的検討

1. 移速数、種々の表現

2. 移速分布 (I) ( $t \rightarrow 0$ )

3. " (II) (積分表示) ( $x > 1$ )

4. " (III) ( $0 < x < 1$ )

5. " (IV) ( $x < 0$ )

1. 複素関数の積分表現

$$\left. \begin{aligned} G(x, y, t) \\ F(x, y, t) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ky} \begin{pmatrix} \cos kx \\ -\sin kx \end{pmatrix} \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma} dk, \quad (1.1)$$

$\sigma = \sqrt{gk}$

よって  $C_f(z, t) = G(x, y, t) + iF(x, y, t), \quad (1.2)$

$$z = x + iy, \quad = r e^{-i\alpha}, \quad \pi > \alpha > 0$$

$r < y < \infty$

$$C_f(z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iky} \frac{e^{-\sigma t}}{\sigma} dk, \quad (1.3)$$

と  $0 < y < \infty$  の場合

$$C_f(z, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-iky} k^{2n} dk$$

$$= \frac{t}{2\sqrt{\pi} y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y^2}{4t}\right)^n}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} = \frac{t}{\pi y^3} \Gamma\left(1, \frac{3}{2}; \frac{y^2}{4t}\right) \quad (1.4)$$

よって

$$C_f \xrightarrow{\frac{y^2}{4t} \rightarrow 0} \frac{t}{\pi y^3} \quad (1.5)$$

よって

$$C_f = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left( e^{-iky + i\sigma t} - e^{-iky - i\sigma t} \right) \frac{dk}{\sigma}$$

$$k = \frac{\sigma^2}{g} \text{ とおくと } dk = \frac{2\sigma d\sigma}{g}$$

$$= \frac{1}{\pi i g} \int_0^{\infty} \left[ e^{-\frac{i\sigma^2}{g} y + i\sigma t} - e^{-\frac{i\sigma^2}{g} y - i\sigma t} \right] d\sigma. \quad (1.6)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{i\sigma^2}{g} y + i\sigma t} d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\sigma^2}{g} y + i\sigma t} d\sigma - \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{i\sigma^2}{g} y + i\sigma t} d\sigma$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 + i \sigma t} d\sigma = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma^2} \cos \sigma t d\sigma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cos\left(\frac{\sqrt{\pi} t}{\sqrt{2}} u\right) du$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} u \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} u e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{4} g t^2}$$

∴  $\phi_g(z, t) = \phi_{g1}(z, t) + \phi_{g2}(z, t) \quad (1.7)$

$$\phi_{g1}(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} g z} e^{-\frac{1}{4} g t^2} \quad (1.8)$$

$$\phi_{g2}(z, t) = \frac{2i}{\pi g} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 - i \sigma t} d\sigma \quad (1.9)$$

$$-\frac{1}{2} \sigma^2 - i \sigma t = -\frac{1}{2} \left[ \sigma^2 + \frac{2it}{\sigma} \right] = -\frac{1}{2} \left( \sigma + \frac{it}{\sigma} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{t^2}{\sigma^2}$$

したがって

$$\phi_{g2} = \frac{2i}{\pi g} e^{-\frac{1}{4} g t^2} \int_{\frac{it}{2z}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} u^2} du = \frac{it}{\pi z} e^{-\frac{1}{4} g t^2} \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{2} v^2} v^2 dv$$

$$= \frac{2i}{\pi \sqrt{g z}} e^{-\frac{1}{4} g t^2} \int_{\frac{\sqrt{g} t}{2z}}^{\infty} e^{-v^2} dv \quad (v^2 = u^2, v = \frac{u}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{i}{g z}} e^{-\frac{1}{4} g t^2} \int_{\frac{\sqrt{g} t}{2z}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \quad (1.10)$$

よって  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  ならば

$$\phi_{g2} \xrightarrow{\left| \frac{g t}{2z} \right| \gg 1} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{i}{g z} \frac{4z}{g t^2}} = \frac{2}{\pi g t} \quad (1.11)$$

$\pi > z > \frac{\pi}{2}$  に対して  $\psi_{f2} = -2 \psi_{f1} + \psi_{f2}^{(k)}(z, t)$  (1.13)

$$\psi_{f2}^{(k)}(z, t) = \frac{4}{\pi^2 g t} \int_0^{\infty} \frac{e^{-kz}}{1 - \frac{4k^2}{g^2} t^2} dk \quad (1.14)$$

とある。

(1.7) に代入すると結局  $\psi_{f2} > \frac{\pi}{2}$  に対して

$$\psi_{f2}(z, t) = -\psi_{f1}(z, t) + \psi_{f2}^{(k)}(z, t) \quad (1.15)$$

とある。

$\psi_{f2}$  の右辺第 2 項  $\psi_{f2}^{(k)}$  は等速運動を遂行している粒子の local wave として記述できると  $\psi_{f1}$  は又 free wave として記述できる。

よって (1.4) と同様にして

$$\psi_{f2} = \frac{i}{\pi \sqrt{g z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i \sqrt{g z} t)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-kz} \frac{k^{n-1}}{k} dk$$

$$= \frac{i}{\pi \sqrt{g z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{g z t^2}{z}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$$\psi_{f2}(z, t) = \frac{i}{\sqrt{\pi g z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{g z t^2}{z}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad (1.16)$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{i}{\sqrt{\pi g z}} \quad (1.17)$$

2. 積分の分布 (I) ( $t \rightarrow 0$ )

$$J(x,t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} \phi_f(x-x',t) dx' \quad (2.1)$$

この積分を考えよう。

$$J_1(x,t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} \phi_{f1}(x-x',t) dx' \quad (2.2)$$

$$J_{1+t}(x,t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} \phi_{f_{1+t}}(x-x',t) dx' \quad (2.3)$$

1. In Initial elevation, Initial impulse による初期変位を与える。

(1.3) を (2.1) に代入し、 $x'$  について先ず積分すれば

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} e^{ikx'} dx' = \frac{J_1(k)}{k} \quad (2.4)$$

であるから

$$J(x,t) = \int_0^\infty e^{-ikx} \frac{J_1(k)}{k} \frac{ik \sin kt}{k^2} dk \quad (2.5)$$

$ik \sin kt$  を級数展開すれば

$$J(x,t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \frac{1}{k^{2n+1}}}{(2n+1)!} I_{n-1}(x) \quad (2.6)$$

$$I_n(x) = \int_0^\infty e^{-ikx} J_1(k) k^n dk \quad (2.7)$$

この積分は

$$I_n(x) = \frac{\Gamma(n+2)}{2(Lx)^{n+2}} {}_2F_1\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2}; 2; \frac{1}{x^2}\right) \quad (2.8)$$

となる。

さて (9) を積分する。 \$t > 0\$ のとき \$-t \pm i\infty\$ と \$t \pm i\infty\$ の間に

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{t \pm i\infty}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{t \pm i\infty}} du + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{t \pm i\infty}} du$$

これを (10) に代入すると

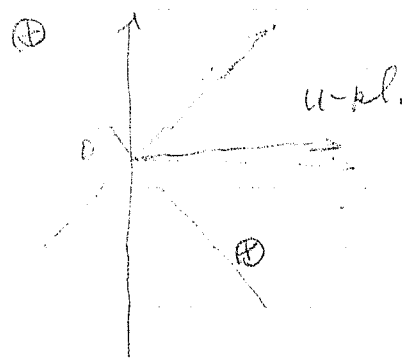
$$(y_2) = \frac{i}{\pi g \sqrt{\pi} \sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{t \pm i\infty}} du \int_0^{\infty} e^{i\omega(u-1)} d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\pi} g \sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{t-u} du = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{g} \sqrt{t}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}v^2}}{1-v} dv$$

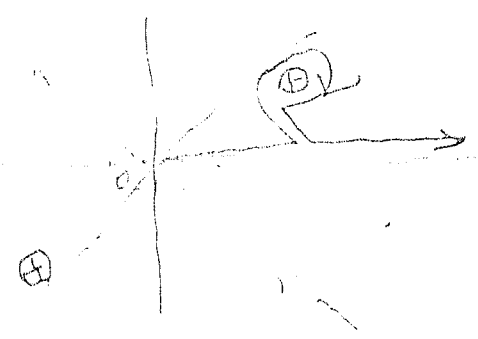
$$= \frac{2}{\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{g} \sqrt{t}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}v^2}}{1-v^2} dv, \quad v = \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}}{t} u$$

$$= \frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}} g t} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{1 - \frac{4u^2}{g^2 t^2}} du \quad (1.12)$$

path (11)  $u = \pm \frac{t}{2} \sqrt{\frac{2}{t}} = \pm \frac{t}{2} \sqrt{\frac{g}{t}} e^{i(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})}$



$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$

$\alpha < \frac{\pi}{2}$  で左図のような関係にあるように積分路をとる事にする。

逆に  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  の時は左図の反対の path をとるべきであるから

より

$$I_{-1}(x) = \int_0^{\infty} e^{-ikx} J_1(k) \frac{dk}{k} = i(\sqrt{x^2-1} - x)$$

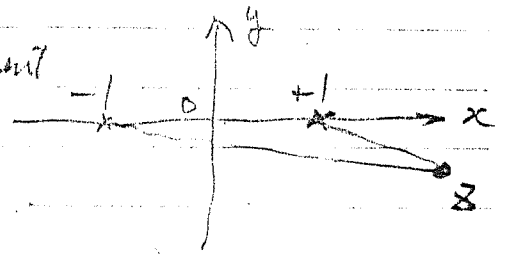
$$I_0(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{i(\sqrt{x^2-1} + x)} \\ & \end{aligned} \right\} (2.9)$$

$$I_n(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^n \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right\}$$

より  $x \gg 1$  ならば

$$J(x, t) \rightarrow t I_{-1}(x) - \frac{t^3}{3!} I_0(x) + \dots \quad (2.10)$$

$x < 1$  ならば  $\sqrt{x^2-1}$  の argument は (2.9) のように  $(-i)$  と変化する



$$I_{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2} - ix$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x}{i\sqrt{1-x^2}}$$

$$I_n(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^n \left\{ 1 + \frac{x}{i\sqrt{1-x^2}} \right\} \quad \dots (2.11)$$

となる。



3. 積分分布(II) (積分表示)

(1.7) による (2.1) は

$$J = J_1 + J_2 \quad (2.1)$$

$$J_1(x,t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} G_1(x-x',t) dx' \quad (3.2)$$

$$J_2(x,t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} G_2(x-x',t) dx' \quad (3.3)$$

と分ける。

まず  $J_1$  は (1.8) による (右辺は " $x < 1$  と  $x > -1$  とある")

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi} i g} \int_{-1}^1 e^{\frac{i g t^2}{2(x-x')}} \frac{\sqrt{1-x'^2}}{\sqrt{x-x'}} dx' \quad (3.4)$$

又  $J_2$  は (1.12) を代入する。

$$J_2 = \frac{4}{\pi^2 g t} \times \frac{i g t^2}{4} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du \times \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x'^2} dx'}{x-x' + \frac{i g t^2}{4 u^2}} \quad (3.5)$$

$$\text{よって } \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x'^2} dx'}{ch p - x'} = e^{-p} \text{ である}$$

$$\text{よって } ch p = x + \frac{i g t^2}{4 u^2}, \quad sh p = \sqrt{\left(x+1 + \frac{i g t^2}{4 u^2}\right) \left(x-1 + \frac{i g t^2}{4 u^2}\right)}$$

$$\text{よって } \omega = \frac{g t^2}{4} \text{ とおくと}$$

$$J_2 = \frac{i t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} \left[ x + i \frac{\omega^2}{u^2} - \sqrt{\left(x+1 + i \frac{\omega^2}{u^2}\right) \left(x-1 + i \frac{\omega^2}{u^2}\right)} \right] du$$

$$= \frac{i t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{i \omega^2 + x u^2 + \sqrt{\{i \omega^2 + (x+1) u^2\} \{i \omega^2 + (x-1) u^2\}}} du$$

$$= \frac{i t \sqrt{i}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i v^2}}{\omega^2 + x v^2 + \sqrt{\{i \omega^2 + (x+1) v^2\} \{i \omega^2 + (x-1) v^2\}}} dv \quad (3.6)$$

→  $J_1$  の場合  $\frac{q^2 x^2}{4(x-x')^2} = u^2$  とおくと

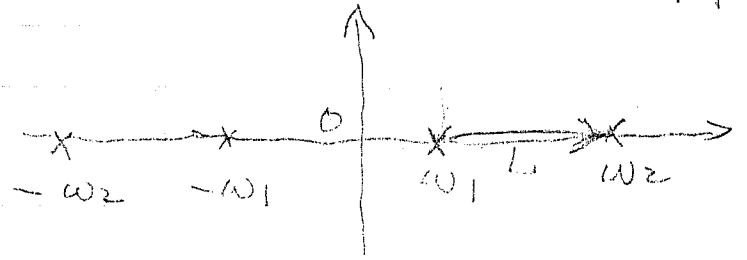
$$x-x' = \frac{\omega^2}{u^2}, \quad dx' = \frac{2\omega^2}{u^3} du, \quad \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}} = \frac{2\omega du}{u^2}$$

$$J_1 = \frac{2\omega^2}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{e^{iu^2}}{u^2} du \sqrt{\left(x+1-\frac{\omega^2}{u^2}\right)\left(1-x+\frac{\omega^2}{u^2}\right)}, \quad (3.7)$$

$$= \frac{2\omega\sqrt{x-1}}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{iu^2} \frac{du}{u^2} \sqrt{(u^2-\omega_1^2)(\omega_2^2-u^2)}, \quad (3.7)$$

ここで  $\omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{x+1}}, \quad \omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{x-1}}$

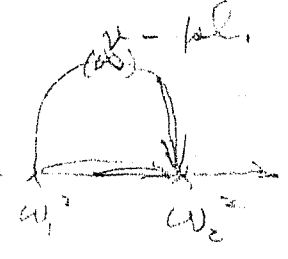
4-4



→  $J_2$  の場合  $u^2 = v$  とおくと

$$J_2 = \frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1^2}^{\omega_2^2} \frac{e^{iv}}{u^2\sqrt{v}} \sqrt{(v-\omega_1^2)(\omega_2^2-v)} dv, \quad (3.8)$$

$v = \omega^2$  の積分路を考慮すると



$$J_2 = A_1 + A_2, \quad (3.9)$$

$$A_1 = \frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1^2}^{\omega_2^2} \frac{e^{iv} dv}{u^2\sqrt{v}} \sqrt{(v-\omega_1^2)(\omega_2^2-v)}$$

$$A_1 = \frac{\omega \sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g} e^{i\omega_1^2 t} \int_0^\infty \frac{e^{-u} \sqrt{u} du \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2 - iu}}{\sqrt{(\omega_1^2 + iu)^3}}, \quad (3.9)$$

$$A_2 = + \frac{\omega \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{\pi}g} e^{i\omega_2^2 t} \int_0^\infty \frac{e^{-u} \sqrt{u} \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2 + iu}}{\sqrt{(\omega_2^2 + iu)^3}} du, \quad (3.10)$$

この場合、 $\omega_1, \omega_2 \gg 1$  のとき

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow \frac{t\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{2}} e^{i\omega_1^2 t} \sqrt{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1} \times \frac{1}{\omega_1^3} \\ &= \frac{t\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{2}} e^{\frac{i g t^2}{4(x+1)}} \frac{16(x+1)^2}{g^2 t^3} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{g^2 t^3} (x+1)^{\frac{5}{2}} e^{\frac{i g t^2}{4(x+1)}}, \quad (3.11) \end{aligned}$$

同様にして

$$A_2 \rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{g^2 t^3} (x-1)^{\frac{5}{2}} e^{\frac{i g t^2}{4(x-1)}}, \quad (3.12)$$

よって  $x \gg 1$  のときは直接 (3.9) にあて

$$\begin{aligned} J_1 &\rightarrow \frac{e^{\frac{i g t^2}{4x}}}{i\sqrt{\pi}g x} \int_1^\infty e^{\frac{i g t^2}{4x^2} x'} \sqrt{x-x'} dx' = \frac{\sqrt{\pi}}{i\sqrt{\pi}g x \left(\frac{g t^2}{4x^2}\right)} e^{\frac{i g t^2}{4x}} \\ &= \frac{4\sqrt{2} x^{\frac{3}{2}}}{i\sqrt{2} g^{\frac{3}{2}} t^3} J_1\left(\frac{g t^2}{4x^2}\right) e^{\frac{i g t^2}{4x}}, \quad (3.13) \end{aligned}$$

$\omega \gg 1$  ならば (3.6) から

$$J_2 \rightarrow -\frac{t}{2\sqrt{\pi}\omega^2} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{t}{4\omega^2} = \frac{1}{2t} \quad (3.14)$$

$\Rightarrow$  最後 (3.6) に  $u = \sqrt{1-2\mu h + h^2}$  とおくと  
 右辺は

$$1 - \mu h - \sqrt{1-2\mu h + h^2} = 1 - \mu h - \frac{1-2\mu h + h^2}{\sqrt{1-2\mu h + h^2}}$$

$$= -\sum_{h=2}^{\infty} h^n \{ P_n(\mu) - 2\mu P_{n-1}(\mu) + P_{n-2}(\mu) \} \quad (3.15)$$

$$= (\mu^2 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(n+2)(n+1)} P'_{n+1}(\mu) = h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(2n+3)} \{ P_{n+2}(\mu) - P_n(\mu) \}$$

(3.6) の積分式において  $u = \sqrt{i\omega_1\omega_2} v$  とおくと

$$J_2 = \frac{\sqrt{i} t}{\sqrt{\pi}\omega_1\omega_2} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}}{v^2} \left[ x + \frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2} - \sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2}\right)} \right]$$

ここで  $\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1\omega_2} = \sqrt{x^2-1}$ ,  $\omega_1\omega_2 = \frac{t^2}{4\sqrt{x^2-1}}$ ,  $\mu = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$= \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}g} (x^2-1)^{\frac{3}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}}{v^2} \left[ \mu + \frac{1}{v^2} - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} + \frac{1}{v^2}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} + \frac{1}{v^2}\right)} \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}g} (x^2-1)^{\frac{3}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}}{v^2} \left[ 1 + \mu v^2 - \sqrt{1 + 2\mu v^2 + v^4} \right] \quad (3.16)$$

上の展開式を代入すると

$$J_2 = \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}g} (x^2-1)^{\frac{3}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P'_{n+1}(\mu)}{(n+1)(n+\frac{3}{2})} - \frac{1}{x} - \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}}{v^{2n}} dv$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+g} (x^2-1)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P'_{n+1}(\mu) \Gamma(n+\frac{1}{2})}{(n+1)(n+2) (i\omega_1\omega_2)^{n+\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{t+g}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P'_{n+1}(\mu)}{(n+1)(n+2)} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(i\omega_1\omega_2)^n} \quad \dots (3.17)
 \end{aligned}$$

∴ 小口 漸近 展開 係数  $\mu > 2$   $P'(\mu) = 3\mu$

$$J_2 \rightarrow \frac{1}{gt} + \frac{3\mu}{6gt (i\omega_1\omega_2)} - \frac{\frac{3}{2} \left( \frac{15}{2}\mu^2 - \frac{3}{2} \right)}{gt (3 \times 4) \cdot \omega_1^2 \omega_2^2} + \dots \quad \dots (3.18)$$

∴ 小口 (3.14) と 一致 した。

4. 積分分解(III) ( $0 < x < 1$ )

$0 < x < 1$  の時は 1節に示すように argument を  
 与えるし、前節の積分表示から解析接続  
 一下はよい。

よす  $J_{1,2}$  については

$$J_1 = \frac{1}{i\sqrt{\pi}g} \left[ \int_1^x \frac{e^{\frac{gt^2}{2(x-x')}}}{\sqrt{x-x'}} \sqrt{1-x'^2} dx' + i \int_x^1 \frac{e^{\frac{gt^2}{2(x-x')}}}{\sqrt{x'-x}} \sqrt{1-x'^2} dx' \right]$$

$$= A_1 + A_2 \quad (4.1)$$

$$A_1 = \frac{1}{i\sqrt{\pi}g} \int_1^x \frac{e^{\frac{gt^2}{2(x-x')}}}{\sqrt{x-x'}} \sqrt{1-x'^2} dx' = \frac{2\omega}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{e^{iu^2}}{u^2 \sqrt{(x+1-\frac{\omega^2}{u^2})(1-x+\frac{\omega^2}{u^2})}} du$$

$$= \frac{2\omega\sqrt{1-x^2}}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{e^{iu^2}}{u^2 \sqrt{(u^2-\omega_1^2)(u^2+\omega_2^2)}} du,$$

$$\omega_2 = \frac{gt^2}{4(1-x)}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{1-x^2} e^{\frac{\omega_1^2}{2}}}{i\sqrt{\pi}g} \int_0^{\infty} \frac{e^{iv^2}}{v^2 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + v^2}} \frac{1}{(\omega_1^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} dv, \quad (4.2)$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}g} \int_x^1 \frac{e^{\frac{gt^2}{2(x-x')}}}{\sqrt{x'-x}} \sqrt{1-x'^2} dx' = \frac{e^{\frac{gt^2}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iv^2}}{\sqrt{1-x'^2} \frac{v dv}{(v^2 + \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\frac{\omega_1^2}{v^2 + \omega_2^2} = x'-x = \frac{gt^2}{4(x'-x)} = v^2 + \frac{gt^2}{4(1-x)}, \quad \frac{v dv}{2\sqrt{x'-x}} = \sqrt{v^2 + \omega_2^2}$$

$$\frac{\sqrt{gt}}{2\sqrt{v^2 + \omega_2^2}} = 2\sqrt{x'-x}, \quad \frac{dx'}{\sqrt{x'-x}} = \frac{-v dv}{2(v^2 + \omega_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

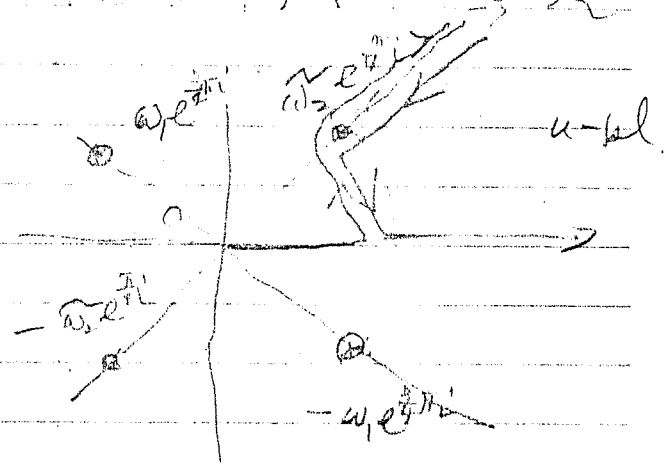
$$\sqrt{1-x'^2} = \sqrt{\left(1-x - \frac{\omega^2}{v^2 + \omega_2^2}\right) \left(1+x + \frac{\omega^2}{v^2 + \omega_2^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(v^2 + \omega_2^2)} \sqrt{v^2(v^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)} =$$

$$A_2 = \frac{+ \sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{\pi} i} e^{-i\omega_2^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v^2} v^2 dv \sqrt{(v^2 + \omega_1^2) + \omega_2^2}}{(v^2 + \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.3)$$

2)  $\omega_2$  は  $\omega_1$  の逆像である。(3.4) 式より  $\omega_2 > \omega_1$  である。  
 $\omega_2 < \omega_1$  である。

1) のように  $\text{path}$  をとる。  
 2) のように



$$J = J_2^* + B, \quad (4.4)$$

$$J_2^* = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du \left[ x + i \frac{\omega^2}{u^2} + i \sqrt{(x + i \frac{\omega^2}{u^2})(1 - x - i \frac{\omega^2}{u^2})} \right]$$

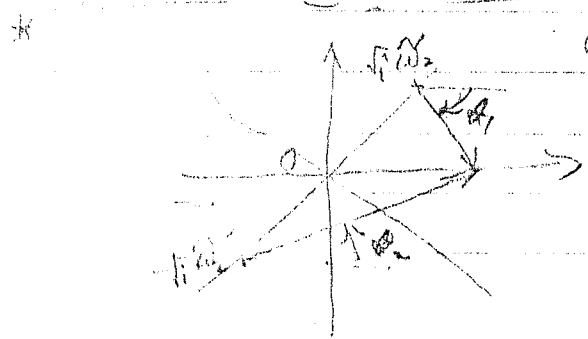
$$= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{i\omega^2 + xu^2 + i \sqrt{(1+x)u^2 + i\omega^2} (1-x)u^2 - i\omega^2} du \quad (4.5)^*$$

$$B = \frac{-2i \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{i\omega_2}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du \sqrt{(u^2 + i\omega_1^2)(u^2 - i\omega_2^2)}$$

$$= \frac{- \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\pi} i} e^{-i\omega_2^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v^2} v^2 dv \sqrt{(v^2 + \omega_1^2) + v^2}}{(v^2 + \omega_2^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.6)$$

$$= -2A_2, \quad (4.7)$$

$$J = A_1 - A_2 + J_2^* \quad (4.6)$$



$$\arg. \sqrt{u^2 - i\omega_2^2} = (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &\rightarrow 0 \text{ for } u \rightarrow \infty \\ \theta_1 &\rightarrow -\frac{3}{4}\pi \\ \theta_2 &\rightarrow \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \text{ for } u \rightarrow 0$$

5. 橋脚分布 (IV) (x=0)

x ≥ 1, x ≤ -1, x=0 等の場合は J\_n の積分表示によつて計算出来, x=0 の値は t > 0 での有限 T がある。

x=0 の特殊な理由があるが理由が不明である。

(2.5) によれば x → 0 の時

$$J(0, t) = \int_0^{\infty} J_1(k) \frac{A_1 A t}{\omega k} dk \quad (5.1)$$

$$\frac{J_1(k)}{k} = \frac{1}{2} (J_0 + J_2)$$

$$k = \frac{u}{2}, dk = u du, \omega = \sqrt{\frac{g}{2}} t$$

$$J(0, t) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\infty} \left\{ J_0\left(\frac{u^2}{2}\right) + J_2\left(\frac{u^2}{2}\right) \right\} \sin(\omega u) du \quad (5.1')$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2g}} \int_0^{\infty} \left\{ J_0\left(\frac{u^2}{2}\right) + J_2\left(\frac{u^2}{2}\right) \right\} \left( e^{i\omega u} - e^{-i\omega u} \right) du \quad (5.1'')$$

$$= C_0\left(\frac{g}{2}\right) + C_2\left(\frac{g}{2}\right) \quad (5.2)$$

2.5.2

$$\int_0^{\infty} e^{-t\omega} \frac{J_0\left(\frac{t\omega^2}{2}\right)}{t\omega} dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} D_{-\nu-1}(\sqrt{t}\omega) D_{-\nu-1}\left(\frac{\omega}{\sqrt{t}}\right) \quad (5.3)$$

2.5.3

$$C_0\left(\frac{g}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \operatorname{Im} \left[ D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{g}}{2}\right) D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{g}{2\sqrt{g}}\right) \right] \quad (5.4)$$

$$C_2\left(\frac{g}{2}\right) = \frac{3}{4\sqrt{2g}} \operatorname{Im} \left[ D_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{g}}{2}\right) D_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{g}{2\sqrt{g}}\right) \right] \quad (5.5)$$



$$D_\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} + z \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)} z^{\nu-1}, \quad (5.6)$$

$$D_\nu(z) \xrightarrow{|z| \gg 1} e^{-\frac{3}{4}z^2} z^\nu, \quad \left. \begin{array}{l} \text{if } \arg z < \frac{3}{4}\pi \\ \text{if } \arg z > -\frac{5}{4}\pi \end{array} \right\} (5.7)$$

$$D_\nu(z) \xrightarrow{|z| \gg 1} z^\nu e^{-\frac{3}{4}z^2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-\frac{1}{4}\pi i + \frac{3}{4}z^2} z^{-\nu-1}, \quad -\frac{\pi}{4} > \arg z > -\frac{5}{4}\pi$$

$$\mathcal{L} \left[ D_\nu \left( \frac{2w}{\sqrt{t}} \right) D_\nu \left( \frac{2w}{i\sqrt{t}} \right) \right] \xrightarrow{2w \gg 0} -w \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{1}{2})z^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)\Gamma(-\frac{1}{2}-\nu)}, \quad (5.8)$$

$$\mathcal{L} \left[ D_\nu \left( \frac{2w}{\sqrt{t}} \right) D_\nu \left( \frac{2w}{i\sqrt{t}} \right) \right] \xrightarrow{2w \gg 1} \int_{\mathcal{H}} (-2w^2)^{\nu} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)2w} e^{\frac{1}{2}\pi i + \frac{3}{4}z^2} e^{\frac{1}{2}z^2}$$

(5.9)

昭和47年11月4日

水素の定常状態問題の解析的検討

1. 波動関数、エネルギー準位

2. 漸近展開 (I) ( $t \rightarrow 0$ )

3. " (II) (積分表示) ( $x \geq 1$ )

4. " (III) ( $0 < x < 1$ )

5. " (IV) ( $x \approx 0$ )

1. 複素関数の積分表示

$$\left. \begin{aligned} G(x, y, t) \\ F(x, y, t) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ky} \begin{pmatrix} \cos ky \\ -\sin ky \end{pmatrix} \frac{\sin kt}{t} dk, \quad (1.1)$$

$a = \sqrt{gk}$

今  $C_g(z, t) = G(x, y, t) + i F(x, y, t)$  (1.2)

$$z = x + iy, \quad = r e^{-i\alpha} \quad , \quad \pi > \alpha > 0$$

より

$$C_g(z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i k z} \frac{\sin kt}{t} dk, \quad (1.3)$$

とあるが、これは

$$C_g(z, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-kz} k^{2n} dk$$

$$= \frac{t}{2\sqrt{\pi} i z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i z t)^{2n}}{\Gamma(n + \frac{3}{2})} = \frac{t}{\pi i z} \Gamma\left(1, \frac{3}{2}, \frac{i z t^2}{4z}\right) \quad (1.4)$$

よって

$$C_g \xrightarrow[\frac{z t^2}{4z} \rightarrow 0]{} \frac{t}{\pi i z} \quad (1.5)$$

よって

$$C_g = \frac{t}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left( e^{-i k z + i k t} - e^{-i k z - i k t} \right) \frac{dk}{k}$$

$$k = \frac{\sigma}{t} \quad dk = \frac{d\sigma}{t}$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \left[ e^{-i z \frac{\sigma^2}{t^2} + i \sigma} - e^{-i z \frac{\sigma^2}{t^2} - i \sigma} \right] d\sigma \quad (1.6)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-i z \frac{\sigma^2}{t^2} + i \sigma} d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i z \frac{\sigma^2}{t^2} + i \sigma} d\sigma - \int_{-\infty}^0 e^{-i z \frac{\sigma^2}{t^2} + i \sigma} d\sigma$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{i^2 \sigma^2}{g} - i \sigma t} d\sigma = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{i^2 \sigma^2}{g} - i \sigma t} d\sigma = \frac{2 \sqrt{g}}{\pi \sqrt{i^2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega - u^2}{i^2}} \cos\left(\frac{2t + u}{i^2}\right) du$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{g}{i^2}} u = \sqrt{\frac{g}{i^2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) i}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{g}}{i^2} u = \sqrt{\frac{g}{i^2}} u$$

$$= \frac{\sqrt{\pi g}}{\sqrt{i^2}} e^{-\frac{i^2 g t^2}{4g}}$$

$\therefore \phi_g(z, t) = \phi_{g1}(z, t) \cdots \phi_{g2}(z, t) \quad (1.7)$

$\phi_{g1}(z, t) = \frac{1}{i \sqrt{g}} e^{-\frac{i^2 g t^2}{4g}} \quad (1.8)$

$\phi_{g2}(z, t) = \frac{2i}{\pi g} \int_0^{\infty} e^{-\frac{i^2 \sigma^2}{g} - i \sigma t} d\sigma \quad (1.9)$

$-\frac{i^2 \sigma^2}{g} - i \sigma t = -\frac{i^2}{g} \left[ \sigma^2 + \frac{g t}{z} \sigma \right] = -\frac{i^2}{g} \left( \sigma + \frac{g t}{2z} \right)^2 + \frac{i^2 g t^2}{4z}$

1.2.12

$$\phi_{g2} = \frac{2i}{\pi g} e^{-\frac{i^2 g t^2}{4g}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{i^2 \sigma^2}{g} - i \sigma t} d\sigma = \frac{2i}{\pi g} e^{-\frac{i^2 g t^2}{4g}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{i^2 \sigma^2}{g} - i \sigma t} d\sigma$$

$$= \frac{2i}{\pi g} e^{-\frac{i^2 g t^2}{4g}} \int_{\frac{g t}{2z}}^{\infty} e^{-i v^2} dv \quad (i v^2 = -u \quad v = \sqrt{\frac{-u}{i}})$$

$$= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{i}{g}} e^{-\frac{i^2 g t^2}{4g}} \int_{\frac{i^2 g t^2}{4z}}^{\infty} e^{-\frac{u}{v}} \frac{du}{v} \quad (1.10)$$

よって  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  ならば

$\phi_{g2} \xrightarrow{\left| \frac{g t^2}{4z} \right| \gg 1} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{i}{g}} \times \frac{4z}{i g t^2} = \frac{2}{\pi g t} \quad (1.11)$

さて  $G_1$  の形を  $z \rightarrow 0$  と  $z \rightarrow -\frac{g}{4z}$  とおき変えて

$$e^{-\frac{ig}{4z} z^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi i 4z}} \int_0^{\infty} e^{+\frac{ig}{4z} u^2 + i0^+ u} du \cdot \sqrt{\frac{g}{\pi i 4z}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{ig}{4z} u^2 + i0^+ u} du$$

と  $G_2$  (1.9) に代入すると

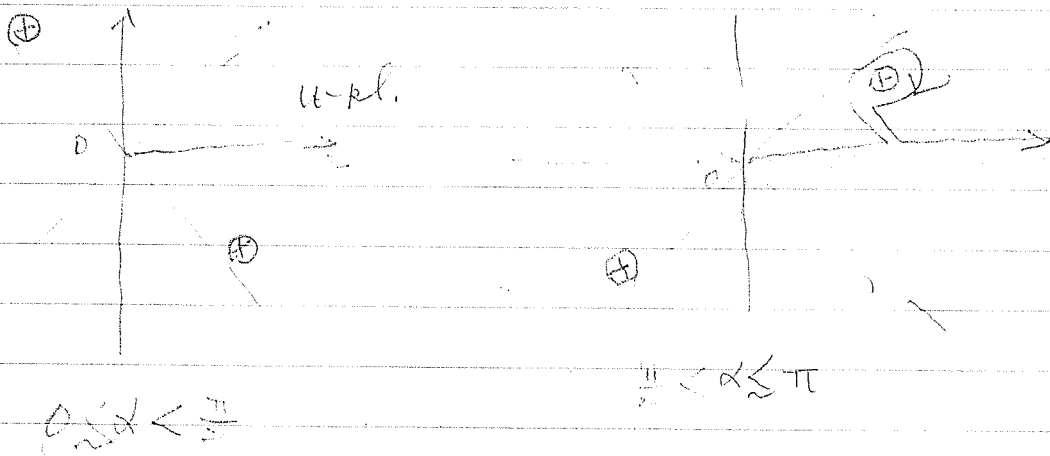
$$G_2 = \frac{i}{\pi g \sqrt{\pi i 4z}} \int_0^{\infty} e^{+\frac{ig}{4z} u^2} du \int_0^{\infty} e^{-\frac{ig}{4z} u^2 + i0^+ u} du$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\pi g z i}} \int_0^{\infty} \frac{e^{+\frac{ig}{4z} u^2}}{1-u} du = \frac{1}{\pi \sqrt{\pi g z i}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{ig}{4z} u^2}}{1-u} du$$

$$= \frac{2}{\pi \sqrt{\pi g z i}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{ig}{4z} u^2}}{1-u^2} du, \quad v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{ig}{4z}} u$$

$$= \frac{4}{\pi \sqrt{\pi g z i}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v^2}}{1 - \frac{v^2}{\frac{ig}{z}}} dv \quad (1.12)$$

path  $\gamma$   $u = \pm \frac{t}{2} \sqrt{\frac{g}{iz}} = \pm \frac{t}{2} \sqrt{\frac{g}{iz}} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) i$  とおくと



$\alpha < \frac{\pi}{2}$  で左図のような関係にあるように積分路をとる事にする。

逆に  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  の時は右図のように path をとるべきであるから

$$\pi \sum_{\alpha > \frac{\pi}{2}} \dots \quad \psi_2 = -2 \psi_1 + \psi_2^* \quad (1.13)$$

$$\psi_2^* = \frac{4}{\pi \sqrt{g} z} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i k z}}{1 - \frac{4i^2 t^2}{g^2}} dk \quad (1.14)$$

となる。

(1.7) の式 A とおくと、 $\pi \sum_{\alpha > \frac{\pi}{2}}$

$$\psi(z, t) = \dots \psi_1(z, t) + \psi_2^*(z, t) \quad (1.15)$$

となる。

$\psi_2$  は  $\psi_1$  の  $\psi_2^*$  の等しい波函数であるが、local wave とおけることは、 $\psi_1$  は free wave とおける。

よって (1.4) と同様にして

$$\psi_2 = \frac{1}{\pi \sqrt{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \sqrt{g} t)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-i k z} k^{\frac{n-1}{2}} dk$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{g} z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\frac{n+1}{2})}{n!} \left( \frac{i g t^2}{z} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

$$\psi_2(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{g} z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{i g t^2}{4z} \right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (1.16)$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{g} z} \quad (1.17)$$

2. 波動方程式 (I) ( $t \rightarrow 0$ )

$$\bar{J}(x, t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} \phi_0(x-x', t) dx' \quad (2.1)$$

この積分を考慮して

$$\bar{J}_1(x, t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} \phi_{11}(x-x', t) dx' \quad (2.2)$$

$$\bar{J}_{11}(x, t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} \phi_{111}(x-x', t) dx' \quad (2.3)$$

は  $J_n$  "Initial elevation, Initial impulse"  
 による振動の振幅を与える。

(1.3) を (2.1) に代入し、 $x'$  について先ず "積分すれば"

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} e^{ikx'} dx' = \frac{J_1(k)}{k} \quad (2.4)$$

であるから

$$\bar{J}(x, t) = \int_0^\infty e^{-ikx} \frac{J_1(k)}{k} \frac{\sin \omega t}{\omega k} dk \quad (2.5)$$

$\sin \omega t$  を 級数展開すると

$$\bar{J}(x, t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-i)^n \omega^{2n+1}}{(2n+1)!} I_{n-1}(x) \quad (2.6)$$

$$I_n(x) = \int_0^\infty e^{-ikx} \frac{J_1(k)}{k} k^n dk \quad (2.7)$$

この積分は

$$I_n(x) = \frac{\Gamma(n+2)}{2(\omega x)^{n+2}} {}_2F_1\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2}; 2; \frac{1}{x^2}\right) \quad (2.8)$$

となる。

同様にして

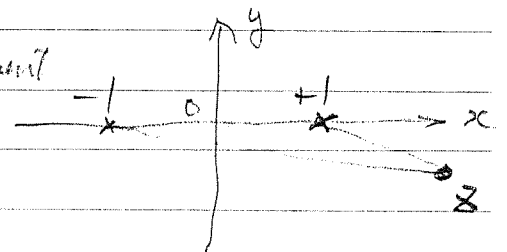
$$I_{-1}(x) = \int_0^{\infty} e^{-ikx} J_1(k) \frac{dk}{k} = i(\sqrt{x^2-1} - x)$$

$$I_0(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{i(\sqrt{x^2-1} + x)} \\ &I_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right\} \end{aligned} \right\} (2.9)$$

2"あるから  $x \gg 1$  ならば"

$$J(x, t) \rightarrow t I_{-1}(x) - \frac{t^3}{3!} I_0(x) + \dots, \quad (2.10)$$

$x < 1$  ならば " $\sqrt{x^2-1}$  の argument は (4) のように  $(-i)$  とするから



$$I_{-1}(x) = \sqrt{1-x^2} - ix.$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x}{i\sqrt{1-x^2}}$$

$$I_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{ 1 + \frac{x}{i\sqrt{1-x^2}} \right\}$$

となる。

(2.11)



## 3. 積同分布(II) (積分表示)

(1.7) による (2.1) は

$$J = J_1 + J_2 \quad (3.1)$$

$$J_1(x, t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} G_1(x-x', t) dx' \quad (3.2)$$

$$J_2(x, t) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x'^2} G_2(x-x', t) dx' \quad (3.3)$$

と分けられる。

先づ  $J_1$  は (1.8) による (なお  $1 > x > -1$  と仮定)

$$J_1 = \frac{1}{i\sqrt{\pi}gt} \int_{-1}^1 e^{\frac{i\theta t^2}{4(x-x')}} \frac{\sqrt{1-x'^2}}{\sqrt{x-x'}} dx' \quad (3.4)$$

又  $J_2$  は (1.12) を代入すると

$$J_2 = \frac{4}{\pi^{3/2}gt} \times \frac{i\theta t^2}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u^2} \times \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x'^2} dx'}{x-x' + \frac{i\theta t^2}{4u^2}} \quad (3.5)$$

$$\text{まず } \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x'^2} dx'}{\text{ch } p - x'} = e^{-p}$$

$$\text{即ち } \text{ch } p = x + \frac{i\theta t^2}{4u^2}, \quad \text{sh } p = \sqrt{\left(x+1 + \frac{i\theta t^2}{4u^2}\right)\left(x-1 + \frac{i\theta t^2}{4u^2}\right)}$$

$$\text{又 } \omega = \frac{\theta t^2}{4} < \theta < 0$$

$$J_2 = \frac{it}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u^2} \left[ x + i\frac{\omega^2}{u^2} - \sqrt{\left(x+1 + i\frac{\omega^2}{u^2}\right)\left(x-1 + i\frac{\omega^2}{u^2}\right)} \right] du$$

$$= \frac{it}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2} du}{i\omega^2 + xu^2 + \sqrt{\left(i\omega^2 + (x+1)u^2\right)\left(i\omega^2 + (x-1)u^2\right)}}$$

$$= \frac{it\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-iv^2} dv}{\omega^2 + xv^2 + \sqrt{\left(\omega^2 + (x+1)v^2\right)\left(\omega^2 + (x-1)v^2\right)}} \quad (3.6)$$

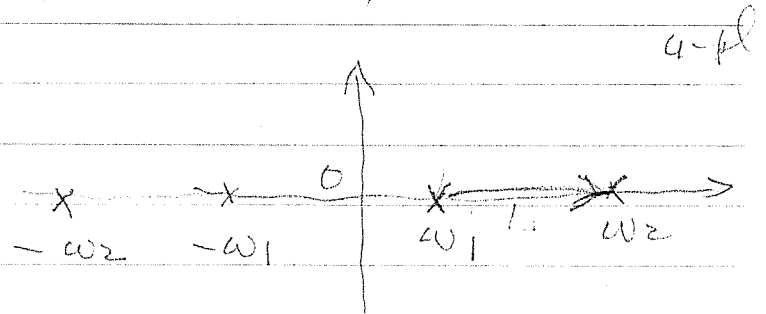
一 第 1, 2 項は  $\frac{q^2}{4(x-x')} = u^2$  とおく

$$x-x' = \frac{\omega^2}{u^2}, \quad dx' = \frac{2\omega^2}{u^3} du, \quad \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}} = \frac{2\omega du}{u^2}$$

$$J_1 = \frac{\omega}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{e^{iu^2}}{u^2} du \sqrt{\left(x+1-\frac{\omega^2}{u^2}\right)\left(1-x+\frac{\omega^2}{u^2}\right)}, \quad (3.16)$$

$$= \frac{2\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{e^{iu^2}}{u^2} \frac{du}{u^2} \sqrt{(u^2-\omega_1^2)(\omega_2^2-u^2)}, \quad (3.17)$$

但し  $\omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{x+1}}, \quad \omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{x-1}}$

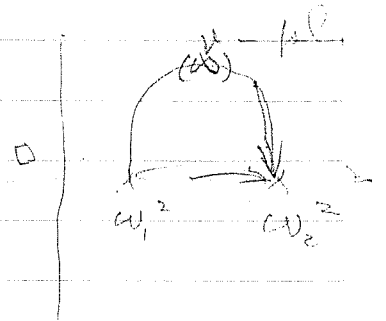


こゝから  $u^2 = v$  とおくと

$$J_1 = \frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1^2}^{\omega_2^2} \frac{e^{iv}}{v^2\sqrt{v}} \sqrt{(v-\omega_1^2)(\omega_2^2-v)} dv, \quad (3.8)$$

$v$ -平,  $v$  積分路を考慮すると

$$J_1 = A_1 + A_2, \quad (3.9)$$



$$A_1 = \frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1^2}^{\omega_2^2} \frac{e^{iv} dv}{v^2\sqrt{v}} \sqrt{(v-\omega_1^2)(\omega_2^2-v)},$$

$$A_1 = \frac{\omega \sqrt{x^2 - 1}}{i\sqrt{\pi}g} e^{i\omega_1^2 t} \int_0^\infty \frac{e^{-u} \sqrt{u} du \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2 - iu}}{\sqrt{(\omega_1^2 + iu)^3}}, \quad (3.9)$$

$$A_2 = + \frac{\omega \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{\pi}g} e^{i\omega_2^2 t} \int_0^\infty \frac{e^{-u} \sqrt{u} \sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2 + iu}}{\sqrt{(\omega_2^2 + iu)^3}} du, \quad (3.10)$$

この形から  $\omega_1, \omega_2 \gg 1$  の時

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow \frac{t\sqrt{x^2-1}}{4i} e^{i\omega_1^2 t} \sqrt{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1} \times \frac{1}{\omega_1^2} \\ &= \frac{t\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{2}i} e^{\frac{iqt^2}{4(x+1)}} \frac{16(x+1)^2}{g^2+4} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{g^2+4} (x+1)^{\frac{5}{2}} e^{\frac{iqt^2}{4(x+1)}}, \quad (3.11) \end{aligned}$$

同様にして

$$A_2 \rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{g^2+4} (x-1)^{\frac{5}{2}} e^{\frac{iqt^2}{4(x-1)}}, \quad (3.12)$$

結局  $x \gg 1$  の時直接 (3.4) にあいて

$$\begin{aligned} J_1 &\rightarrow \frac{e^{\frac{iqt^2}{4x}}}{\sqrt{\pi}gx} \int_{-1}^1 e^{i\frac{qt^2}{4x^2}x'} \sqrt{1-x'^2} dx' = \frac{\sqrt{\pi}}{i\sqrt{g}x \left(\frac{qt^2}{4x^2}\right)} e^{\frac{iqt^2}{4x}} \\ &= \frac{4\sqrt{\pi}x^{\frac{3}{2}}}{i\sqrt{2}g^{\frac{3}{2}}t} J_1\left(\frac{qt^2}{4x^2}\right) e^{\frac{iqt^2}{4x}}, \quad (3.13) \end{aligned}$$

$\omega \gg 1$  ならば (3.6) より

$$J_2 \longrightarrow -\frac{t}{2\sqrt{\pi}\omega} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{t}{4\omega^2} = \frac{1}{g t} \quad (3.14)$$

之を  $\frac{d}{dh}$  後に (3.6) に  $\omega$  を考慮しよう。  
その前に

$$1 - \mu h - \sqrt{1 - 2\mu h + h^2} = 1 - \mu h - \frac{1 - 2\mu h + h^2}{\sqrt{1 - 2\mu h + h^2}}$$

$$= -\sum_{h=2}^{\infty} h^n \{ P_n(\mu) - 2\mu P_{n-1}(\mu) + P_{n-2}(\mu) \} \quad (3.15)$$

$$= (\mu^2 - 1) h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n P'_{n+1}(\mu)}{(n+2)(n+1)} = h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(2n+3)} \{ P_{n+2}(\mu) - P_n(\mu) \}$$

(3.6) の  $\omega$  1 式 において  $u = \sqrt{i\omega_1\omega_2} v$  とおくと

$$J_2 = \frac{\sqrt{i} t}{\sqrt{\pi}\omega_1\omega_2} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}}{v^2} \left[ x + \frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2} - \sqrt{\left(x+1 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2}\right)\left(x-1 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2}\right)} \right]$$

ここで  $\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2} = \sqrt{x^2-1}$  ,  $\omega_1\omega_2 = \frac{g^2}{4\sqrt{x^2-1}}$  ,  $\mu = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$= \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}g} (x^2-1)^{\frac{3}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}}{v^2} \left[ \mu + \frac{1}{v^2} - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x-1} + \frac{1}{v^2}\right)\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x+1} + \frac{1}{v^2}\right)} \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}g} (x^2-1)^{\frac{3}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}}{v^2} \left[ 1 + \mu v^2 - \sqrt{1 + 2\mu v^2 + v^4} \right] dv \quad (3.15)$$

上の展開を使うと

$$J_2 = \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}g} (x^2-1)^{\frac{3}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P'_{n+1}(\mu)}{(n+1)(n+2)} - x \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}}{v^{2n}} dv$$

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned}
 \text{ii } J_2 &= \frac{\pm \sqrt{t}}{\sqrt{\pi g} (x^2-1)^{\frac{1}{4}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P'_{n+1}(\mu) \Gamma(n+\frac{1}{2})}{(n+1)(n+2) (i\omega_1\omega_2)^{n+\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi} (gt)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P'_{n+1}(\mu) \Gamma(n+\frac{1}{2})}{(n+1)(n+2) (i\omega_1\omega_2)^n}, \quad \dots (3.17)
 \end{aligned}$$

これは漸次近似展開である。  $P'_2(\mu) = 3\mu$

$$J_2 \rightarrow \frac{1}{gt} + \frac{3\mu}{6gt i\omega_1\omega_2} - \frac{\frac{3}{2} \left( \frac{15}{2}\mu^2 - \frac{3}{2} \right)}{gt (3 \times 4) \cdot \omega_1^2 \omega_2^2} + \dots \dots (3.18)$$

これは (3.14) と較べられる。

4. 指数分布(III) ( $0 < x < 1$ )

$0 < x < 1$  の場合 1 節に示したように argument を  
 y として 1 節の積分表示から解析接続  
 すればよい。

よって  $J_1$  は次の通り

$$J_1 = \frac{1}{i\sqrt{\pi}g} \left[ \int_{-1}^x \frac{e^{\frac{gt^2}{2(1-x)}}}{\sqrt{x-x'}} \sqrt{x-x'} dx' + i \int_x^1 \frac{e^{\frac{gt^2}{2(1-x')}}}{\sqrt{x-x'}} \sqrt{x-x'} dx' \right]$$

$$= A_1 + A_2 \quad (4.1)$$

$$A_1 = \frac{1}{i\sqrt{\pi}g} \int_{-1}^x \frac{e^{\frac{gt^2}{2(1-x')}}}{\sqrt{x-x'}} \sqrt{x-x'} dx' = \frac{2\omega}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{e^{iuz}}{u^2 \sqrt{(u^2 - \omega_1^2)(u^2 - \omega_2^2)}} du$$

$$= \frac{2\omega\sqrt{1-x^2}}{i\sqrt{\pi}g} \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{e^{iuz}}{u^2 \sqrt{(u^2 - \omega_1^2)(u^2 - \omega_2^2)}} du$$

$$\omega_2 = \frac{gt^2}{4(1-x)}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{2i\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega_1^2} \frac{e^{iuz}}{v^2 \sqrt{(\omega_1^2 - v^2)(\omega_2^2 - v^2)}} dv \quad (4.2)$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}g} \int_x^1 \frac{e^{\frac{gt^2}{2(1-x')}}}{\sqrt{x-x'}} \sqrt{x-x'} dx' = \frac{e^{\frac{gt^2}{2(1-x^2)}}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iuz}}{\sqrt{1-x^2} (v^2 + \omega_2^2)^{3/2}} dv$$

$$\frac{\omega_2^2}{v^2 + \omega_2^2} = x - x' \quad \frac{gt^2}{2(1-x^2)} = u^2 + \frac{gt^2}{4(1-x)} \quad \frac{gt^2}{2\sqrt{\pi}g} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{v^2 + \omega_2^2}{v^2 + \omega_2^2} = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{dv}{\sqrt{v^2 + \omega_2^2}} = \frac{-v^2 + \omega_2^2}{2\sqrt{1-x^2} (v^2 + \omega_2^2)^{3/2}}$$

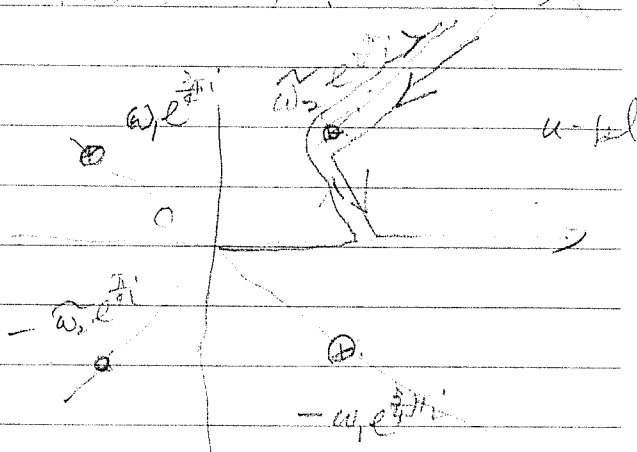
$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}g} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{v^2 + \omega_1^2}\right) \left(1 + x + \frac{\omega_2^2}{v^2 + \omega_2^2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2\sqrt{\pi}g)^2} \sqrt{v^2 (v^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)} =$$

$$A_2 = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{\pi}i} e^{-i\omega_2^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{(u^2 + \omega_2^2)^{\frac{5}{2}}} \sqrt{(u^2 + \omega_1^2) + u^2} \quad (4.3)$$

よって \$J\_2\$ は \$x\$ の関数として (3.6) の \$J\_1\$ と同様考慮  
 する。 \$x = 1\$ と \$x = -1\$

(4.3) の \$J\_2\$ の part を \$J\_2^\*\$ とする  
 ことにする



$$J_2 = J_2^* + B \quad (4.4)$$

$$J_2^* = \frac{1+i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du \left[ x + i \frac{\omega^2}{u^2} + \sqrt{(x+1 + \frac{i\omega^2}{u^2})(1-x - \frac{i\omega^2}{u^2})} \right]$$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{i\omega^2 + xu^2} du = \frac{1+i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{i(\frac{1+x}{\omega^2}u^2 + i\omega^2)} du = \dots \quad (4.5)^*$$

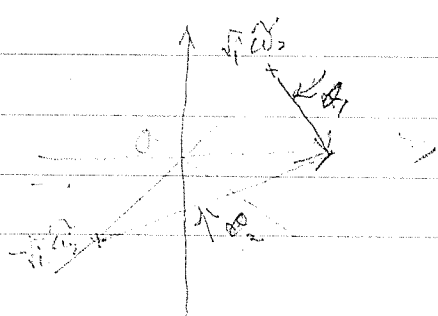
$$B = \frac{-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du \sqrt{(u^2 + \omega_1^2)(u^2 - i\omega_2^2)}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\pi}i} e^{-i\omega_2^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{(u^2 + \omega_2^2)^{\frac{5}{2}}} \sqrt{(u^2 + \omega_1^2) + u^2}$$

$$= -2A_2 \quad (4.5)$$

$$J = A_1 - A_2 + J_2^* \quad (4.6)$$

\*



arg.  $\sqrt{u^2 - i\omega_2^2} = (\theta_1 + \theta_2)$   
 $\theta_1 + \theta_2 \rightarrow 0$  for  $u > \omega_1$   
 $\theta_1 \rightarrow -\frac{3}{4}\pi$   
 $\theta_2 \rightarrow \frac{1}{4}\pi$  for  $u < \omega_1$

(5) 橋脚分布 (IV) (x=0)

x ≥ 1, y ≤ 1, x=0 端の場合にはそれの積分表示による計算結果, それらの値は t > 0 で有限である。

x=0 の時刻 t での変位が t である。

(2.5) によれば x → 0 かつ

$$J(0, t) = \int_0^{\infty} J_1(k) \frac{k \sin kt}{k} dk \quad (5.1)$$

$$\frac{J_1(k)}{k} = \frac{1}{2} (J_0 + J_2)$$

$$k = \frac{u^2}{2}, dk = u du, w = \sqrt{\frac{g}{2}} t$$

$$J(0, t) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\infty} \left\{ J_0\left(\frac{u^2}{2}\right) + J_2\left(\frac{u^2}{2}\right) \right\} \sin(wu) du$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2g}} \int_0^{\infty} \left\{ J_0\left(\frac{u^2}{2}\right) + J_2\left(\frac{u^2}{2}\right) \right\} (e^{i w u} - e^{-i w u}) du$$

$$= C_0(z) + C_2(z) \quad (5.2)$$

したがって  $\int_0^{\infty} e^{-tz} \frac{J_1\left(\frac{t^2 z}{2}\right)}{t^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} D_{-\nu-1}\left(\frac{\sqrt{z}}{2}\right) D_{-\nu-1}\left(\frac{z}{i\sqrt{z}}\right) \quad (5.3)$

よって

$$C_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \mathcal{L}_{11} \left[ D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{z}}{2}\right) D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{i\sqrt{z}}\right) \right] \quad (5.4)$$

$$C_2(z) = \frac{3}{4\sqrt{2g}} \mathcal{L}_{11} \left[ D_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{z}}{2}\right) D_{-\frac{3}{2}}\left(\frac{z}{i\sqrt{z}}\right) \right] \quad (5.5)$$



By (1)

$$D_1(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + z \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})} z^{\frac{(1-1)}{2}} \right] \quad (4.2)$$

$$D_1(z) \xrightarrow{|z| \gg 1} e^{-\frac{z^2}{4}} z^{\frac{1}{2}} \quad (\arg z < \frac{3}{4}\pi) \quad (4.3)$$

$$D_1(z) \xrightarrow{|z| \gg 1} z^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} - \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\pi i + \frac{z^2}{4}}}{\Gamma(-1) z^{\frac{1}{2}+1}} \quad (-\frac{\pi}{4} > \arg z > -\frac{5}{4}\pi) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L} \left[ D_1\left(\frac{2w}{\sqrt{t}}\right) D_1\left(\frac{2w}{i\sqrt{t}}\right) \right] \xrightarrow{w \rightarrow \infty} \frac{w \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2}) z^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(-\frac{1}{2})} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{L} \left[ D_1\left(\frac{2w}{\sqrt{t}}\right) D_1\left(\frac{2w}{i\sqrt{t}}\right) \right] \xrightarrow{w \gg 1} \int_{\mathcal{H}} (-2w^2)^{\nu} \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\pi i + \frac{3\nu}{4}}}{\Gamma(-\nu) w} e^{\frac{1}{2} \frac{2w^2}{t}} \quad (4.6)$$