M-23

昭和47年11月4日

水面の波の初期値問題の解析的検討

1. 積分関数の種々の表現

2. 漸近分布 (I) ($t \to 0$)

3. 〃 (II) (積分表示) ($x > 1$)

4. 〃 (III) ($0 < x < 1$)

5. 〃 (IV) ($x \approx 0$)

昭和47年11月4日

水路の初期値問題の解析的検討

1. 核函数の種々の表現
2. 楕円分布(I) ($t \to 0$)
3. 〃 (II) (全積分表示) ($x > 1$)
4. 〃 (III) ($0 < x < 1$)
5. 〃 (IV) ($x \approx 0$)

1. 積分函数の種々の表現

$$\left.\begin{array}{l} G(x,y,t) \text{ と} \\ F(x,y,t) \end{array}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-ky}\begin{pmatrix}\cos kx \\ -\sin kx\end{pmatrix}\frac{\sin\sigma t}{\sigma}\,dk, \qquad (1.1)$$

$$\sigma = \sqrt{gk}$$

今

$$G_f(z,t) = G(x,y,t) + iF(x,y,t), \qquad (1.2)$$

$$z = x + iy = re^{-i\alpha}, \quad \pi > \alpha > 0$$

とおくと

$$G_f(z,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-ikz}\frac{\sin\sigma t}{\sigma}\,dk, \qquad (1.3)$$

t が小さい時は

$$G_f(z,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-)^n g^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^\infty e^{-ikz}k^n\,dk$$

$$= \frac{t}{2\sqrt{\pi i z}}\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(\frac{igt^2}{4z}\right)^n}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{t}{\pi i z}\,{}_1F_1\left(1;\frac{3}{2};\frac{igt^2}{4z}\right) \qquad (1.4)$$

よって

$$G_f \xrightarrow[\frac{igt^2}{4z}\to 0]{} \frac{t}{\pi i z} \qquad (1.5)$$

次に

$$G_f = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left(e^{-ikz+i\sigma t} - e^{-ikz-i\sigma t}\right)\frac{dk}{\sigma}$$

$k = \sigma^2/g$ とおくと　$dk = 2\frac{\sigma\,d\sigma}{g}$

$$= \frac{1}{\pi i g}\int_0^\infty \left[e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2+i\sigma t} - e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2-i\sigma t}\right]d\sigma. \qquad (1.6)$$

然るに

$$\int_0^\infty e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2+i\sigma t}\,d\sigma = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2+i\sigma t}\,d\sigma - \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2+i\sigma t}\,d\sigma$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2 + i\sigma t}\, d\sigma = 2\int_0^\infty e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2}\cos\sigma t\, d\sigma = 2\sqrt{\frac{g}{iz}}\int_0^\infty e^{-u^2}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{iz}}\,t u\right) du$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{g}{iz}}\, u = \sqrt{\frac{g}{r}}\, u\, e^{\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) i}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi g}{iz}}\, e^{\frac{igt^2}{4z}}$$

$$\therefore\ G_g(z,t) = G_{g1}(z,t) + G_{g2}(z,t) \qquad \cdots (1.7)$$

$$G_{g1}(z,t) = \frac{1}{i\sqrt{\pi i g z}}\, e^{\frac{igt^2}{4z}}, \qquad \cdots (1.8)$$

$$G_{g2}(z,t) = \frac{2i}{\pi g}\int_0^\infty e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2 - i\sigma t}\, d\sigma, \qquad \cdots (1.9)$$

$$-\frac{iz}{g}\sigma^2 - i\sigma t = -\frac{iz}{g}\left[\sigma^2 + \frac{gt}{z}\sigma\right] = -\frac{iz}{g}\left(\sigma + \frac{gt}{2z}\right)^2 + \frac{ig}{4z}t^2$$

なるに　$u = \sigma + \frac{gt}{2z}$

$$G_{g2} = \frac{2i}{\pi g}\, e^{\frac{igt^2}{4z}}\int_{\frac{gt}{2z}}^\infty e^{-\frac{iz}{g}u^2}\, du = \frac{it}{\pi z}\, e^{\frac{igt^2}{4z}}\int_1^\infty e^{-\frac{igt^2}{4z}v^2}\, dv$$

$$= \frac{2i}{\pi\sqrt{gz}}\, e^{\frac{igt^2}{4z}}\int_{\frac{t\sqrt{g}}{2\sqrt{z}}}^\infty e^{-iv^2}\, dv \qquad iv^2 = u \quad v = \sqrt{\frac{u}{i}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{i}{gz}}\, e^{\frac{igt^2}{4z}}\int_{\frac{igt^2}{4z}}^\infty e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}, \qquad \cdots (1.10)$$

よって　$\alpha < \frac{\pi}{2}$ ならば

$$G_{g2} \xrightarrow[\left|\frac{gt^2}{4z}\right| \gg 1]{} \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{i}{gz}} \times \frac{4z}{igt^2} = \frac{2}{\pi g t}, \qquad (1.11)$$

$\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$ では　$\mathcal{G}_2 = -2\,\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2^*(x,t)$,　(1.13)

$$\mathcal{G}_2^*(x,t) = +\frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}} g t}\int_0^\infty \frac{e^{-u^2}\,du}{1-\frac{4x^2}{g t^2}u^2} , \qquad (1.14)$$

となる。

(1.7) に代入すると 結局, $\pi \geq \alpha > \frac{\pi}{2}$ では

$$\mathcal{G}(x,t) = -\mathcal{G}_1(x,t) + \mathcal{G}_2^*(x,t) , \qquad (1.15)$$

となる。

$\mathcal{G}_2$ あるいは $\mathcal{G}_2^*$ は単調な函数であるので local wave とよぶ様にすると $\mathcal{G}_1$ は又 free wave とよんでよかろう。

なお (1.4) と同様にして

$$\mathcal{G}_2 = \frac{i}{\pi\sqrt{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\sqrt{g}t)^n}{n!}\int_0^\infty e^{-ikx}k^{\frac{n-1}{2}}\,dk .$$

$$= \frac{i}{\pi\sqrt{gx}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{igt^2}{x}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n\,\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

$$\mathcal{G}_2(x,t) = \frac{i}{\sqrt{\pi i g x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{igt^2}{4x}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} , \qquad (1.16)$$

$$\xrightarrow[t\to 0]{} \frac{i}{\sqrt{\pi i g x}} , \qquad (1.17)$$

2. 楕円分布 (I) $(t \to 0)$

$$J(x,t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, G_g(x-x', t)\, dx' \qquad (2.1)$$

なる積分を考えよう。

$$J_I(x,t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, G_{I}(x-x', t)\, dx' \qquad (2.2)$$

$$J_{II}(x,t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, G_{II}(x-x', t)\, dx' \qquad (2.3)$$

は夫々 Initial elevation, Initial Impulse による水面変位を与える。

(1.3) を (2.1) に代入し、x' について先ず積分すれば

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, e^{ikx'}\, dx' = \frac{J_1(k)}{k} \qquad (2.4)$$

であるから

$$J(x,t) = \int_0^\infty e^{-ikx} J_1(k) \frac{\sin \sigma t}{\sigma k}\, dk, \qquad (2.5)$$

$\sin \sigma t$ を級数展開すると

$$J(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n g^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} I_{n-1}(x) \qquad (2.6)$$

$$I_n(x) = \int_0^\infty e^{-ikx} J_1(k)\, k^n\, dk \qquad (2.7)$$

この積分は

$$I_n(x) = \frac{\Gamma(n+2)}{2(ix)^{n+2}}\, {}_2F_1\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2}; 2; \frac{1}{x^2}\right), \qquad (2.8)$$

となる。

昭和　年　月　日

さて φ_1 の式において $t\to 0$, $\sigma \to t z/g$ とおき換えて

$$e^{-\frac{i g}{4 z}\sigma^2} = \sqrt{\frac{g}{\pi i 4 z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{+\frac{i g}{4 z}u^2 + i\sigma u}\,du \qquad \sqrt{\frac{g}{\pi i z}}\int_0^{\infty} e^{+\frac{i g}{4 z}u^2}\cos(\sigma u)\,du$$

これを (1.9) に代入すると

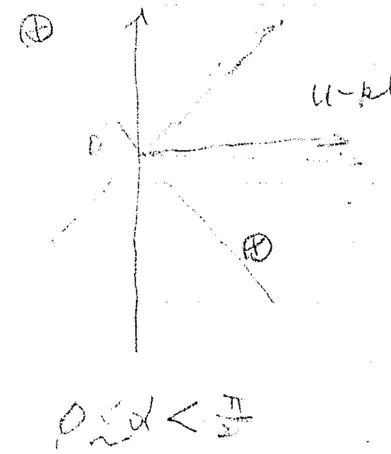
$$\varphi_2 = \frac{i}{\pi g}\sqrt{\frac{g}{\pi z i}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{+\frac{i g}{4 z}u^2}\,du\int_0^{\infty} e^{i\sigma(u-t)}\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi g z i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{+\frac{i g}{4 z}u^2}}{t-u}\,du = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{g z i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{+\frac{i g}{4 z}t^2 v^2}\,dv}{1-v}$$

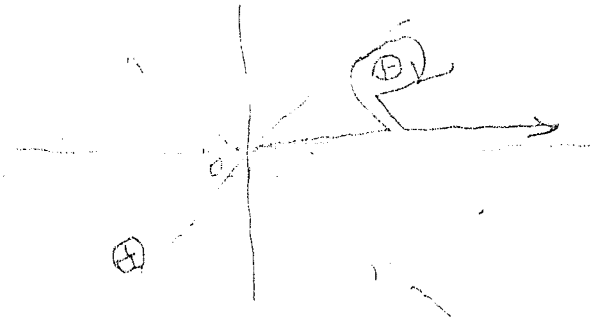
$$= \frac{2}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{g z i}}\int_0^{\infty}\frac{e^{+\frac{i g}{4 z}t^2 v^2}}{1-v^2}\,dv, \qquad v = \frac{2}{t}\sqrt{\frac{i z}{g}}\,u$$

$$= \frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}} g t}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u^2}\,du}{1-\frac{4 i z}{g t^2}u^2}, \qquad (1.12)$$

pole は $u = \pm\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{i z}} = \pm\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}\,e^{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)i}$ にある。



$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$

$\alpha < \frac{\pi}{2}$ で 左図のような関係にあるように積分路をとる事にする。

従って $\alpha > \frac{\pi}{2}$ の時は右図のように path をとらせて良いから

同様に

$$I_{-1}(x) = \int_0^\infty e^{-ikx} J_1(k)\frac{dk}{k} = i\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = \frac{1}{i\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}$$

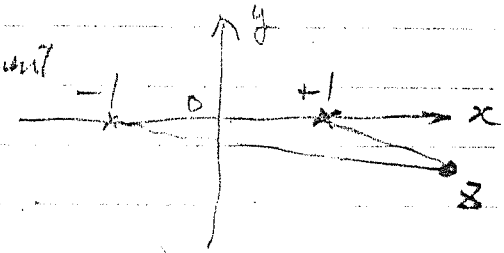
$$I_0(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$I_n(x) = \left(\frac{d}{i\,dx}\right)^n \left\{1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right\}. \qquad (2.9)$$

であるから $x \gg 1$ ならば

$$J(x,t) \longrightarrow t\, I_{-1}(x) - \frac{g\,t^3}{3!} I_0(x) + \cdots, \qquad (2.10)$$

$x<1$ ならば $\sqrt{x^2-1}$ の argument は図のように $(-i)$ となるから



$$I_{-1}(x) = \sqrt{1-x^2} - ix.$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x}{i\sqrt{1-x^2}}$$

$$I_n(x) = \left(i\frac{d}{dx}\right)^n \left\{1+\frac{x}{i\sqrt{1-x^2}}\right\} \qquad (2.11)$$

となる。

3. 楕円分布(II)　(積分表示)

(1.7) によれば (2.1) は、

$$J = J_1 + J_2 \qquad (3.1)$$

$$J_1(x,t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, G_1(x-x',t)\, dx', \qquad (3.2)$$

$$J_2(x,t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, G_2(x-x',t)\, dx', \qquad (3.3)$$

と分けられる。

先づ J_1 は (1.8) によって (なおしばらく $x>1$ としておく)、

$$J_1 = \frac{1}{i\sqrt{\pi i g}} \int_{-1}^{1} e^{\frac{igt^2}{4(x-x')}} \frac{\sqrt{1-x'^2}}{\sqrt{x-x'}}\, dx', \qquad (3.4)$$

又 J_2 は (1.12) を代入すると

$$J_2 = \frac{4}{\pi^2 gt} \times \frac{igt^2}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}\, du}{u^2} \times \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x'^2}\, dx'}{x-x'+\frac{igt^2}{4u^2}}, \qquad (3.5)$$

所で $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x'^2}\,dx'}{\mathrm{ch}\,p - x'} = e^{-p}$ で

但し $\mathrm{ch}\,p = x + \frac{igt^2}{4u^2}$, $\mathrm{sh}\,p = \sqrt{\left(x+1+\frac{igt^2}{4u^2}\right)\left(x-1+\frac{igt^2}{4u^2}\right)}$,

又 $\omega = \frac{gt^2}{4}$ とおく。

$$\therefore\ J_2 = \frac{it}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u^2}\left[x + i\frac{\omega^2}{u^2} - \sqrt{\left\{x+1+i\frac{\omega^2}{u^2}\right\}\left\{x-1+i\frac{\omega^2}{u^2}\right\}}\right] du$$

$$= \frac{it}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}\, du}{i\omega^2 + xu^2 + \sqrt{\{i\omega^2+(x+1)u^2\}\{i\omega^2+(x-1)u^2\}}}$$

$u^2 \to -i\frac{\omega^2}{x-1} = u^2 + i\frac{\omega^2}{1-x}$

$$= \frac{t\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-iv^2}\, dv}{\omega^2 + xv^2 + \sqrt{\{\omega^2+(x+1)v^2\}\{\omega^2+(x-1)v^2\}}}, \qquad (3.6)$$

一方 J_1 については $\frac{gt^2}{4(x-x')} = u^2$ とおくと

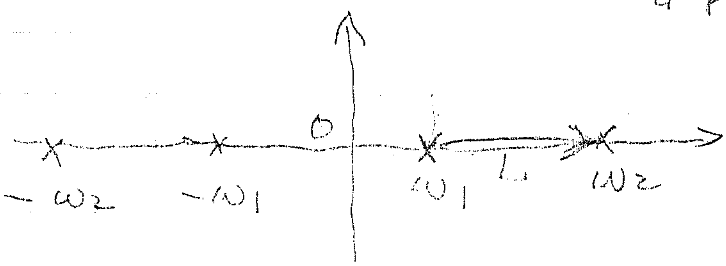
$$x - x' = \frac{\omega^2}{u^2}, \quad dx' = \frac{2\omega^2}{u^3}du, \quad \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}} = \frac{2\omega\, du}{u^2}$$

$$J_1 = \frac{2\omega^2}{i\sqrt{\pi}g}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{e^{iu^2}}{u^2}du\sqrt{\left(x+1-\frac{\omega^2}{u^2}\right)\left(1-x+\frac{\omega^2}{u^2}\right)}, \quad \cancel{(3.17)}$$

$$= \frac{2\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g}\int_{\omega_1}^{\omega_2}e^{iu^2}\frac{du}{u^4}\sqrt{(u^2-\omega_1^2)(\omega_2^2-u^2)}, \quad \text{-- (3.7)}$$

但し $\omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{x+1}}$, $\omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{x-1}}$

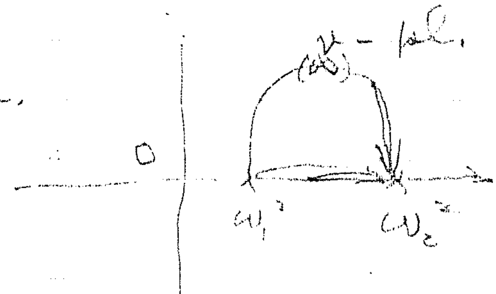
u-pl.



これは又 $u^2 = v$ とおいて

$$J_1 = \frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g}\int_{\omega_1^2}^{\omega_2^2}\frac{e^{iv}dv}{v^2\sqrt{v}}\sqrt{(v-\omega_1^2)(\omega_2^2-v)}, \quad (3.8)$$

v-pl. で積分路を変更すると、



$$J_1 = A_1 + A_2, \quad \text{-- (3.9)}$$

$$A_1 = \frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g}\int_{\omega_1^2}^{i\infty+\omega_1^2}\frac{e^{iv}dv}{v^2\sqrt{v}}\sqrt{(\quad)(\quad)},$$

$$A_1 = \frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi g}}\, e^{i\omega_1^2}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du\, \frac{\sqrt{\omega_2^2-\omega_1^2-iu}}{\sqrt{(\omega_1^2+iu)^5}}, \quad \cdots (3.9)$$

$$A_2 = +\frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{\pi}\, g_0}\, e^{i\omega_2^2}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\frac{\sqrt{\omega_2^2-\omega_1^2+iu}}{\sqrt{(\omega_2^2+iu)^5}}\, du, \quad (3.10)$$

この形から　$\omega_1, \omega_2 \gg 1$　の時には

$$A_1 \longrightarrow \frac{t\sqrt{x^2-1}}{4i^2}\, e^{i\omega_1^2} \times \sqrt{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1} \times \frac{1}{\omega_1^4}$$

$$= \frac{t\sqrt{x+1}}{2\sqrt{2}\, i}\, e^{\frac{igt^2}{4(x+1)}}\, \frac{16(x+1)^2}{g^2t^4}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{g^2t^3}(x+1)^{\frac{5}{2}}\, e^{\frac{igt^2}{4(x+1)}}, \quad (3.11)$$

同様に

$$A_2 \longrightarrow \frac{4\sqrt{2}}{g^2t^3}(x-1)^{\frac{5}{2}}\, e^{\frac{igt^2}{4(x-1)}}, \quad (3.12)$$

なお　$x \gg 1$　の時は直接　(3.4) において

$$J_1 \longrightarrow \frac{e^{\frac{igt^2}{4x}}}{i\sqrt{\pi g x}}\int_{-1}^{1} e^{i\frac{gt^2}{4x^2}x'}\sqrt{1-x'^2}\, dx' = \frac{\sqrt{\pi}}{i\sqrt{gx}}\,\frac{J_1\left(\frac{gt^2}{4x^2}\right)}{\left(\frac{gt^2}{4x^2}\right)}\, e^{\frac{igt^2}{4x}}$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}\, x^{\frac{3}{2}}}{i\sqrt{i}\, g^{\frac{3}{2}}t^2}\, J_1\left(\frac{gt^2}{4x^2}\right) e^{\frac{igt^2}{4x}}, \quad \cdots (3.13)$$

$\omega \gg 1$ ならば (3.6) から

$$J_2 \longrightarrow \frac{t}{2\sqrt{\pi}\,\omega^2}\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{t}{4\omega^2} = \frac{1}{gt} \qquad (3.14)$$

さて 最後に (3.6) について考えてみよう。
その前に

$$1-\mu h-\sqrt{1-2\mu h+h^2} = 1-\mu h-\frac{1-2\mu h+h^2}{\sqrt{1-2\mu h+h^2}}$$

$$= -\sum_{n=2}^{\infty} h^n\{P_n(\mu)-2\mu P_{n-1}(\mu)+P_{n-2}(\mu)\}$$

$$= (\mu^2-1)h^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n\,P'_{n+1}(\mu)}{(n+2)(n+1)} = h^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{(2n+3)}\{P_{n+2}(\mu)-P_n(\mu)\} \qquad (3.15)$$

(3.6) の第1式において　$u=\sqrt{i\,\omega_1\omega_2}\,v$ とおくと.

$$J_2 = \frac{\sqrt{i}\,t}{\sqrt{\pi\,\omega_1\omega_2}}\int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}dv}{v^2}\left[x+\frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2}-\sqrt{\left(x+1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2}\right)}\right]$$

但し $\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}=\sqrt{x^2-1}$,　$\omega_1\omega_2=\frac{gt^2}{4\sqrt{x^2-1}}$,　$\mu=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$= \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi g}}(x^2-1)^{\frac{3}{4}}\int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}}{v^2}dv\left[\mu+\frac{1}{v^2}-\sqrt{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{1}{v^2}\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{1}{v^2}\right)}\right]$$

$$\left(1+\frac{1}{v^4}+\frac{2x}{v^2\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi g}}(x^2-1)^{\frac{3}{4}}\int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}dv}{v^4}\left[1+\mu v^2-\sqrt{1+2\mu v^2+v^4}\right], \qquad (3.16)$$

上の展開を使うと.

$$J_2 = \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi g}}(x^2-1)^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P'_{n+1}(\mu)}{(n+1)(n+2)}\times\int_0^\infty e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}v^{2n}dv.$$

昭和　　年　　月　　日

$$\therefore\ J_2 = \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}\, g\, (\lambda^2-1)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{n+1}'(\mu)}{(n+1)(n+2)} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(i\omega_1\omega_2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}(gt)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{n+1}'(\mu)}{(n+1)(n+2)} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(i\omega_1\omega_2)^{n}}, \quad \cdots (3.17)$$

これは漸近展開であって　　　$P_2'(\mu) = 3\mu$

$$J_2 \longrightarrow \frac{1}{gt} + \frac{3\mu}{6gt\, i\omega_1\omega_2} - \frac{\overset{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}}\left(\frac{15}{2}\mu^2 - \frac{3}{2}\right)}{gt\,(3\times4)\cdot\omega_1^2\omega_2^2} + \cdots \quad \cdots (3.18)$$

これは(3.14)と較べられる。

昭和　　年　　月　　日

4. 楕円分布(III) $(0<x<1)$

$0<x<1$ の時は 1節に示したように argument をとりなおして 前節の積分表示から解析接続すればよい。

まず J_1 については

$$J_1=\frac{1}{i\sqrt{\pi i g}}\left[\int_1^x \frac{e^{\frac{igt^2}{4(x-x')}}}{\sqrt{x-x'}}\sqrt{1-x'^2}\,dx'+i\int_x^1 e^{\frac{igt^2}{4(x'-x)}}\frac{\sqrt{1-x'^2}}{\sqrt{x'-x}}\,dx'\right],$$

$$=A_1+A_2 \qquad \cdots(4.1)$$

$$A_1=\frac{1}{i\sqrt{\pi i g}}\int_1^x\frac{e^{\frac{igt^2}{4(x-x')}}}{\sqrt{x-x'}}\sqrt{1-x'^2}\,dx'=\frac{2\omega}{i\sqrt{\pi i g}}\int_{\omega_1}^{\infty}\frac{e^{iu^2}}{u^2}\sqrt{\left(x+1-\frac{\omega^2}{u^2}\right)\left(1-x+\frac{\omega^2}{u^2}\right)}\,du$$

$$=\frac{2\omega\sqrt{1-x^2}}{i\sqrt{\pi i g}}\int_{\omega_1}^{\infty}\frac{e^{iu^2}}{u^4}\sqrt{(u^2-\omega_1^2)(u^2+\tilde{\omega}_2^2)}\,du,$$

$$\tilde{\omega}_2=\frac{gt^2}{4(1-x)}$$

$$=\frac{t\sqrt{1-x^2}\,e^{i\omega_1^2}}{2i\sqrt{\pi i}}\int_0^{\infty}e^{iv^2}\frac{v^2\sqrt{\omega_1^2+\tilde{\omega}_2^2+v^2}}{(\omega_1^2+v^2)^{\frac{5}{2}}}\,dv, \qquad \cdots(4.2)$$

$$A_2=\frac{1}{\sqrt{\pi i g}}\int_x^1 e^{\frac{igt^2}{4(x'-x)}}\frac{\sqrt{1-x'^2}}{\sqrt{x'-x}}\,dx'=\frac{e^{-i\tilde{\omega}_2^2}\,t}{2\sqrt{\pi i}}\int_0^{\infty}e^{-iv^2}\frac{\sqrt{1-x'^2}\,v\,dv}{(v^2+\tilde{\omega}_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{\omega^2}{v^2+\tilde{\omega}_2^2}=x'-x$, $\quad \frac{gt^2}{4(x'-x)}=v^2+\frac{gt^2}{4(1-x)}$, $\quad \frac{\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{x'-x}}=\sqrt{v^2+\tilde{\omega}_2^2}$

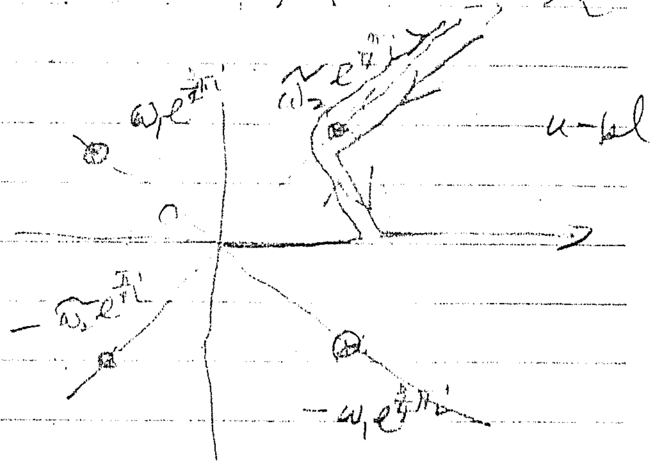
$$\frac{\sqrt{g}\,t}{\sqrt{v^2+\tilde{\omega}_2^2}}=2\sqrt{x'-x},\qquad \frac{dx'}{\sqrt{x'-x}}=\frac{-\sqrt{g}\,t\,v\,dv}{2(v^2+\tilde{\omega}_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sqrt{1-x'^2}=\sqrt{\left(1-x-\frac{\omega^2}{v^2+\tilde{\omega}_2^2}\right)\left(1+x+\frac{\omega^2}{v^2+\tilde{\omega}_2^2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{(v^2+\tilde{\omega}_2^2)}\sqrt{v^2(v^2+\omega_1^2+\tilde{\omega}_2^2)}=$$

$$A_2 = \frac{t\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{\pi}\, i}\, e^{-i\hat{\omega}_2^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iv^2}\, v^2\, dv\, \sqrt{v^2 + \omega_1^2 + \hat{\omega}_2^2}}{(v^2+\hat{\omega}_2^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \cdots (4.3)$$

これにはJ_2は上を図側になって(3.6)中/式について考えれば　$x<1$となると
図のようにpathをとるべきであるから



$$J_2 = J_2^{*} + B \quad , \cdots (4.4)$$

$$J_2^{*} = \frac{it}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2}\, du \left[x + i\frac{\omega^2}{u^2} + i\sqrt{\left(x+1+\frac{i\omega^2}{u^2}\right)\left(1-x-i\frac{\omega^2}{u^2}\right)} \right]^{-1}$$

$$= \frac{it}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}\, du}{i\omega^2 + xu^2 + i\sqrt{\{(1+x)u^2+i\omega^2\}\{(1-x)u^2-i\omega^2\}}} \quad , (4.5)^{*}$$

$$B = \frac{-2t\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{i}\,\hat{\omega}_2}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^4}\, du \sqrt{(u^2+i\omega_1^2)(u^2-i\hat{\omega}_2^2)}$$

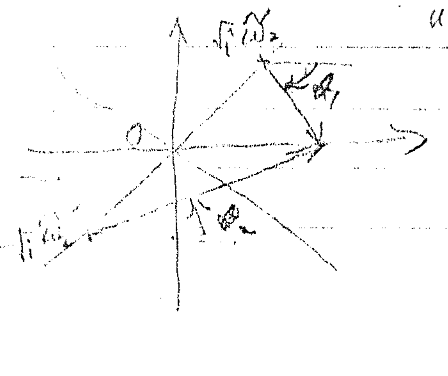
$u^2 = i\hat{\omega}_2^2 + iv^2$.

$$= \frac{-t\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\pi}\, i}\, e^{i\hat{\omega}_2^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iv^2}\, dv\, v^2 \sqrt{(\omega_1^2+\hat{\omega}_2^2)+v^2}}{(v^2+\hat{\omega}_2^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \cdots (4.5)$$

$$= -2A_2 \quad , \cdots\cdots (4.5)$$

$$\therefore \quad J = A_1 - A_2 + J_2^{*} \quad , \cdots (4.6)$$

*



$$\arg.\left[\sqrt{u^2 - i\hat{\omega}_2^2}\right] = -(\theta_1+\theta_2)$$

$\theta_1 + \theta_2 \longrightarrow 0$ for $u \to \infty$

$\left.\begin{array}{l} \theta_1 \longrightarrow -\frac{3}{4}\pi \\ \theta_2 \longrightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}\right\}$ for $u \to 0$.

5. 楕円分布 (IV)　　($x=0$)

$t \geq 1$, $x \leq 1$, $x=0$等の場合はすべて積分表示によって計算出来、それらの値は $t>0$ で有限である。

$x=0$の時は厳密ある表現ができる。

(2.5) によれば $x \to 0$ の時

$$J(0,t) = \int_0^\infty J_1(k) \frac{\sin\omega t}{\omega k} dk \qquad \cdots (5.1)$$

$$\frac{J_1(k)}{k} = \frac{1}{2}(J_0 + J_2)$$

$$k = \frac{u^2}{2}, \quad dk = u\,du, \quad w = \sqrt{\frac{g}{2}}\,t$$

$$J(0,t) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\infty \left\{ J_0\left(\frac{u^2}{2}\right) + J_2\left(\frac{u^2}{2}\right) \right\} \sin(wu)\,du,$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2g}} \int_0^\infty \left\{ J_0\left(\frac{u^2}{2}\right) + J_2\left(\frac{u^2}{2}\right) \right\} \left\{ e^{iwu} - e^{-iwu} \right\} du,$$

$$= C_0(z) + C_2(z) \qquad \cdots (5.2)$$

そこで

$$\int_0^\infty e^{-tz} J_{\nu/2}\left(\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} D_{-\nu-1}(\sqrt{i}\,z) D_{-\nu-1}\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right), \quad (5.3)$$

であるから

$$C_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \mathrm{Im}\left[D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{i}\,w}{i}\right) D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{w}{i\sqrt{i}}\right) \right] \qquad \cdots (5.4)$$

$$C_2(z) = \frac{3}{4\sqrt{2g}} \mathrm{Im}\left[D_{-\frac{5}{2}}\left(\frac{w}{\sqrt{i}}\right) D_{-\frac{5}{2}}\left(\frac{w}{i\sqrt{i}}\right) \right], \quad (5.5)$$

昭和　年　月　日

ここで

$$D_\nu(z) \xrightarrow[z\to 0]{} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, 2^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} + z\,\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})}\, 2^{\frac{(\nu-1)}{2}}, \qquad (5.6)$$

$$\left.\begin{aligned} &D_\nu(z) \xrightarrow[\substack{|z|\gg 1 \\ |\arg z| < \frac{3}{4}\pi}]{} e^{-\frac{z^2}{4}} z^\nu \\ &D_\nu(z) \xrightarrow[\substack{|z|\gg 1 \\ -\frac{\pi}{4} > \arg z > -\frac{5}{4}\pi}]{} z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} \frac{e^{-\nu\pi i + \frac{z^2}{4}}}{z^{\nu+1}} \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

$$\mathcal{I}\left[D_\nu\left(\frac{w}{\sqrt{i}}\right) D_\nu\left(\frac{w}{i\sqrt{i}}\right)\right] \xrightarrow[w\to 0]{} -w\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{1}{2})\, 2^\nu}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})\Gamma(-\frac{\nu}{2})}, \qquad (5.8)$$

$$\mathcal{I}\left[D_\nu\left(\frac{w}{\sqrt{i}}\right) D_\nu\left(\frac{w}{i\sqrt{i}}\right)\right] \xrightarrow[w\gg 1]{} I_m\left[(-w^2)^\nu - \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\nu}{2}\pi i + \frac{3}{4}\pi i}}{\Gamma(-\nu)\, w}\, e^{i\frac{w^2}{2}}\right], \qquad (5.9)$$

昭和47年11月4日

水浸の初期値問題の解析的検討

1. 核函数の種々の表現

2. 楕円分布(I) $(t \to 0)$

3. 〃 (II) (積分表示) $(x > 1)$

4. 〃 (III) $(0 < x < 1)$

5. 〃 (IV) $(x \simeq 0)$

昭和　　年　　月　　日

1. 積函数の種々の表現

$$\left.\begin{matrix} G(x,y,t)\text{を} \\ \bar{F}(x,y,t) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-ky}\begin{pmatrix}\cos kx \\ -\sin kx\end{pmatrix}\frac{\sin\sigma t}{\sigma}\,dk, \qquad (1.1)$$

$\sigma = \sqrt{gk}$

今 $\quad G_g(z,t) = G(x,y,t) + i\bar{F}(x,y,t) \qquad (1.2)$

$$z = x+iy, = re^{i\alpha}, \quad \pi > \alpha > 0$$

とおくと

$$G_g(z,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-ikz}\frac{\sin\sigma t}{\sigma}\,dk, \qquad (1.3)$$

t が小さい時は

$$G_g(z,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-)^n g^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^\infty e^{-ikz}k^n\,dk$$

$$= \frac{t}{2\sqrt{\pi iz}}\sum_{n=0}^\infty \frac{\left(\frac{igt^2}{4z}\right)^n}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{t}{\pi iz}\,{}_1F_1\left(1;\frac{3}{2};\frac{igt^2}{4z}\right), \qquad (1.4)$$

よって

$$G_g \xrightarrow[\frac{gt^2}{z}\to 0]{} \frac{t}{\pi iz} \qquad (1.5)$$

次に

$$G_g = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left(e^{-ikz+i\sigma t} - e^{-ikz-i\sigma t}\right)\frac{dk}{\sigma}$$

$k = \sigma^2/g$ とおくと $\quad dk = \frac{2\sigma\,d\sigma}{g}$

$$= \frac{1}{\pi ig}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2+i\sigma t} - e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2-i\sigma t}\right]d\sigma, \qquad (1.6)$$

所が

$$\int_0^\infty e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2-i\sigma t}\,d\sigma = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2+i\sigma t}\,d\sigma - \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2+i\sigma t}\,d\sigma$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2 - i\sigma t}\, d\sigma = 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2}\cos\sigma t\, d\sigma = 2\sqrt{\frac{g}{iz}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{iz}}\,t\,u\right) du$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{g}{iz}}\,u = \sqrt{\frac{g}{r}}\,u\, e^{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)i}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi g}{iz}}\, e^{\frac{i g t^2}{4z}}$$

$$\therefore\ \mathcal{G}(z,t) = \mathcal{G}_1(z,t) + \mathcal{G}_2(z,t) \qquad (1\cdot 7)$$

$$\mathcal{G}_1(z,t) = \frac{1}{i\sqrt{\pi i g z}}\, e^{\frac{i g t^2}{4z}}, \qquad (1\cdot 8)$$

$$\mathcal{G}_2(z,t) = \frac{2i}{\pi g}\int_0^{\infty} e^{-\frac{iz}{g}\sigma^2 - i\sigma t}\, d\sigma, \qquad (1\cdot 9)$$

$$-\frac{iz}{g}\sigma^2 - i\sigma t = \frac{-iz}{g}\left[\sigma^2 + \frac{gt}{z}\sigma\right] = \frac{-iz}{g}\left(\sigma + \frac{gt}{2z}\right)^2 + \frac{ig}{4z}t^2$$

すると

$$\mathcal{G}_2 = \frac{2i}{\pi g}\, e^{\frac{igt^2}{4z}}\int_{\frac{gt}{2z}}^{\infty} e^{-\frac{iz}{g}u^2}\, du = \frac{it}{\pi z}\, e^{\frac{igt^2}{4z}}\int_1^{\infty} e^{-\frac{igt^2}{4z}v^2}\, dv$$

$$= \frac{2i}{\pi\sqrt{gz}}\, e^{\frac{ig}{4z}t^2}\int_{\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{z}}}^{\infty} e^{-iv^2}\, dv$$

$$iv^2 = u \qquad v = \sqrt{\frac{u}{i}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{i}{gz}}\, e^{\frac{igt^2}{4z}}\int_{i\frac{gt^2}{4z}}^{\infty} e^{-u}\frac{du}{\sqrt{u}}, \qquad (1\cdot 10)$$

よって　$\alpha < \frac{\pi}{2}$ ならば

$$\mathcal{G}_2 \xrightarrow[\left|\frac{gt^2}{4z}\right| \gg 1]{} \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{i}{gz}\times\frac{4z}{igt^2}} = \frac{2}{\pi g t}, \qquad (1\cdot 11)$$

昭和　　年　　月　　日

さて $\mathcal{G}_1$ の第3行において $t \to \sigma,\ g \to -4z^2/g$ とおきかえて

$$e^{-\frac{ig}{8z}\sigma^2} = \sqrt{\frac{8g}{\pi i 4z^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{+\frac{ig}{4z}u^2 + i\sigma u}\,du = \sqrt{\frac{g}{\pi i z}}\int_0^{\infty} e^{+\frac{ig}{4z}u^2}\cos(\sigma u)\,du$$

これを (1.9) に代入すると

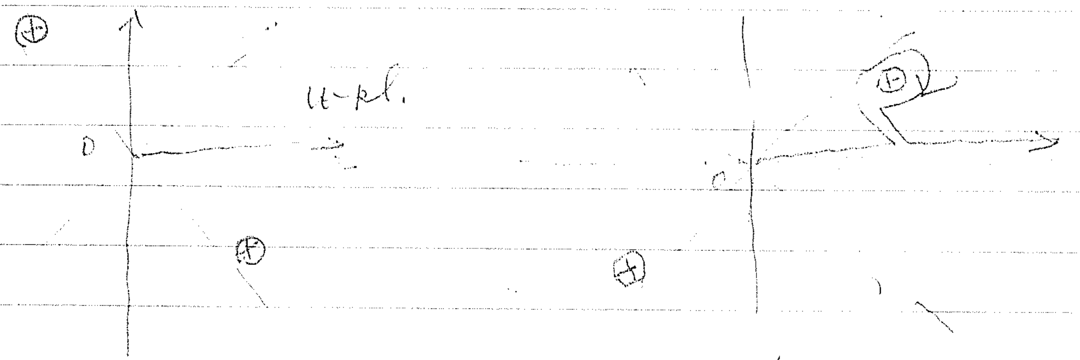
$$\mathcal{G}_2 = \frac{i}{\pi g}\sqrt{\frac{g}{\pi z i}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{+\frac{ig}{4z}u^2}du\int_0^{\infty} e^{i\sigma(u-t)}\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi g z i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{+\frac{ig}{4z}u^2}}{t-u}\,du = \frac{1}{\pi^{3/2}\sqrt{gzi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{+\frac{ig}{4z}t^2v^2}\,dv}{1-v}$$

$$= \frac{2}{\pi^{3/2}\sqrt{gzi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{+\frac{ig}{4z}t^2v^2}}{1-v^2}\,dv, \qquad v = \frac{2}{t}\sqrt{\frac{iz}{g}}\,u$$

$$= \frac{4}{\pi^{3/2}gt}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u^2}\,du}{1-\frac{4iz}{gt^2}u^2}, \qquad (1.12)$$

pole は $u = \pm\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{iz}} = \pm\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}\,e^{\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)i}$ にある。



$0 \lesssim \alpha < \frac{\pi}{2}$　　　　$\frac{\pi}{2} < \alpha \lesssim \pi$

$\alpha < \frac{\pi}{2}$ で 左図のような関係にあるように積分路をとる事にする。
従って $\alpha > \frac{\pi}{2}$ の時は右図のように path をとるべきであるから

昭和　　年　　月　　日

$\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$ では　　$\mathcal{G}_2 = -2\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2^*(z,t)$　,　(1.13)

$$\mathcal{G}_2^*(z,t) = \frac{4}{\pi z g t}\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{1-\frac{4z^2}{g^2t^4}u^2}\qquad (1.14)$$

となる。

(1.7)に代入すると結局、$\pi \geqq \alpha > \frac{\pi}{2}$ では

$$\mathcal{G}(z,t) = -\mathcal{G}_1(z,t) + \mathcal{G}_2^*(z,t)\,,\qquad (1.15)$$

となる。

$\mathcal{G}_2$ すなわち $\mathcal{G}_2^*$ は単調な函数であるので local wave とよぶ事にすると $\mathcal{G}_1$ は又 free wave とよんでよかろう。

なお (1.4)と同様にして

$$\mathcal{G}_2 = \frac{i}{\pi\sqrt{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\sqrt{g}t)^n}{n!}\int_0^\infty e^{-ikz}k^{\frac{n-1}{2}}dk$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{gz}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{igt^2}{z}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$$\mathcal{G}_2(z,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi i g z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{igt^2}{4z}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,,\qquad (1.16)$$

$$\xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{\sqrt{\pi i g z}}\,,\qquad (1.17)$$

昭和　　年　　月　　日

2. 楕円分布 (I)　　$(t \to 0)$

$$J(x,t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, G_g(x-x',t)\,dx' \qquad (2.1)$$

なる積分を考えよう。

$$J_t(x,t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, G_{g_t}(x-x',t)\,dx' \qquad (2.2)$$

$$J_{tt}(x,t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, G_{g_{tt}}(x-x',t)\,dx' \qquad (2.3)$$

は夫々 Initial elevation, Initial Impulse による表面形状を与える。

(1.3) を (2.1) に代入し、x' について先ず積分すれば

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, e^{ikx'}\,dx' = \frac{J_1(k)}{k}, \qquad (2.4)$$

であるから

$$J(x,t) = \int_0^\infty e^{-ikx} J_1(k) \frac{\sin \sigma t}{\sigma k}\,dk, \qquad (2.5)$$

$\sin \sigma t$ を級数展開すると

$$J(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n g^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} I_{n-1}(x), \qquad (2.6)$$

$$I_n(x) = \int_0^\infty e^{-ikx} J_1(k)\, k^n\,dk, \qquad (2.7)$$

この積分は

$$I_n(x) = \frac{\Gamma(n+2)}{2(ix)^{n+2}}\, {}_2F_1\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2}; 2; \frac{1}{x^2}\right), \qquad (2.8)$$

となる。

同様に

$$I_{-1}(x) = \int_0^\infty e^{-ikx} J_1(k)\frac{dk}{k} = i\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = \frac{1}{i\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}$$

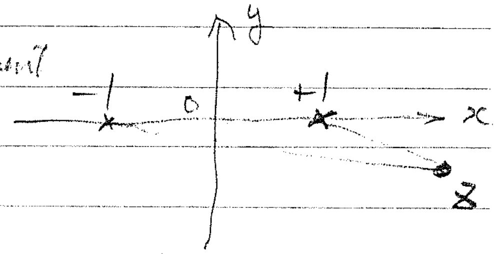
$$I_0(x) = 1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$I_n(x) = \left(i\frac{d}{dx}\right)^n\left\{1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right\}, \qquad (2.9)$$

であるから $x \gg 1$ ならば

$$J(x,t) \longrightarrow t\, I_{-1}(x) - \frac{g t^3}{3!} I_0(x) + \cdots, \qquad (2.10)$$

$x<1$ ならば $\sqrt{x^2-1}$ の argument は図のように $(-i)$ となるから



$$I_{-1}(x) = \sqrt{1-x^2} - ix.$$

$$I_0(x) = 1+\frac{x}{i\sqrt{1-x^2}}$$

$$I_n(x) = \left(i\frac{d}{dx}\right)^n\left\{1+\frac{x}{i\sqrt{1-x^2}}\right\} \qquad \cdots (2.11)$$

となる。

3. 楕円分布(II)　(積分表示)

(1.7)によれば(2.1)は

$$J = J_1 + J_2, \qquad (3.1)$$

$$J_1(x,t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, G_{g_1}(x-x',t)\, dx', \qquad (3.2)$$

$$J_2(x,t) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x'^2}\, G_{g_2}(x-x',t)\, dx', \qquad (3.3)$$

と分けられる。

先づ J_1は(1.8)によって(なおしばらく $x>1$ としておく)

$$J_1 = \frac{1}{i\sqrt{\pi i g}} \int_{-1}^{1} e^{\frac{igt^2}{4(x-x')}} \frac{\sqrt{1-x'^2}}{\sqrt{x-x'}}\, dx', \qquad (3.4)$$

又 J_2は(1.12)を代入すると

$$J_2 = \frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}} g t} \times \frac{igt^2}{4} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{u^2} \times \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x'^2}\, dx'}{x-x'+\frac{igt^2}{4u^2}}, \qquad (3.5)$$

所で $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x'^2}\,dx'}{\mathrm{ch}\,p - x'} = e^{-p}$

但し $\mathrm{ch}\,p = x + \frac{igt^2}{4u^2}$, $\mathrm{sh}\,p = \sqrt{\left(x+1+\frac{igt^2}{4u^2}\right)\left(x-1+\frac{igt^2}{4u^2}\right)}$,

又 $\omega^2 = \frac{gt^2}{4}$ とおく。

$$\therefore\ J_2 = \frac{it}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} \left[x + i\frac{\omega^2}{u^2} - \sqrt{\left\{x+1+i\frac{\omega^2}{u^2}\right\}\left\{x-1+i\frac{\omega^2}{u^2}\right\}} \right] du$$

$$= \frac{it}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}\, du}{i\omega^2 + xu^2 + \sqrt{\{i\omega^2+(x+1)u^2\}\{i\omega^2+(x-1)u^2\}}},$$

$$= \frac{t\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iv^2}\, dv}{\omega^2 + xv^2 + \sqrt{\{\omega^2+(x+1)v^2\}\{\omega^2+(x-1)v^2\}}}, \qquad (3.6)$$

昭和　　年　　月　　日

一方 J_1 については $\frac{gr'^2}{4(x-x')} = u^2$ とおくと

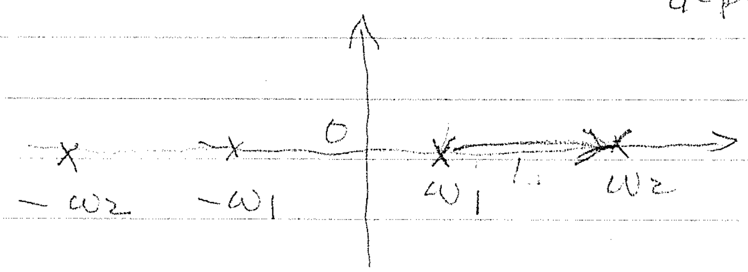
$$x - x' = \frac{\omega^2}{u^2}, \quad dx' = \frac{2\omega^2}{u^3}du, \quad \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}} = \frac{2\omega\, du}{u^2}$$

$$J_1 = \frac{2\omega}{i\sqrt{\pi}g}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{e^{iu^2}}{u^2}du\sqrt{\left(x+1-\frac{\omega^2}{u^2}\right)\left(1-x+\frac{\omega^2}{u^2}\right)}, \quad \cdots\ 7)$$

$$= \frac{2\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g}\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{iu^2}\frac{du}{u^4}\sqrt{(u^2-\omega_1^2)(\omega_2^2-u^2)}, \quad - - \ (3.7)$$

但し $\omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{x+1}}, \quad \omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{x-1}}$

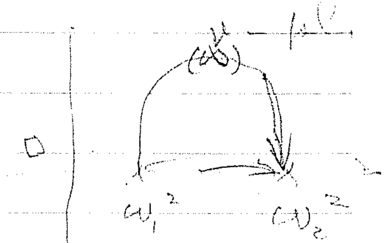
u-pl.



これは又 $u^2 = v$ とおいて

$$J_1 = \frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g}\int_{\omega_1^2}^{\omega_2^2} \frac{e^{iv}dv}{v^2\sqrt{v}}\sqrt{(v-\omega_1^2)(\omega_2^2-v)}, \quad (3.8)$$

v-pl. で積分路を変更すると



$$J_1 = A_1 + A_2, \quad (3.9)$$

$$A_1 = \frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g}\int_{\omega_1^2}^{i\infty+\omega_1^2} \frac{e^{iv}dv}{v^2\sqrt{v}}\sqrt{(\quad)(\quad)},$$

昭和　　年　　月　　日

$$A_1 = \frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{i\sqrt{\pi}g_0} e^{i\omega_1^2} \int_0^\infty \frac{e^{-u}\sqrt{u}\,du\,\sqrt{\omega_2^2-\omega_1^2-iu}}{\sqrt{(\omega_1^2+iu)^5}}, \quad (3.9)$$

$$A_2 = +\frac{\omega\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{\pi}g_0} e^{i\omega_2^2} \int_0^\infty \frac{e^{-u}\sqrt{u}\sqrt{\omega_2^2-\omega_1^2+iu}}{\sqrt{(\omega_2^2+iu)^5}}\,du, \quad (3.10)$$

この形から　$\omega_1, \omega_2 \gg 1$　の時には

$$A_1 \longrightarrow \frac{t\sqrt{x^2-1}}{4i} e^{i\omega_1^2} \sqrt{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2-1} \times \frac{1}{\omega_1^4}$$

$$= \frac{t\sqrt{x+1}}{2\sqrt{2}i} e^{\frac{igt^2}{4(x+1)}} \frac{16(x+1)^2}{g^2t^4}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{g^2t^3}(x+1)^{\frac{5}{2}} \quad (3.11)$$

同様に

$$A_2 \longrightarrow \frac{4\sqrt{2}}{g^2t^3}(x-1)^{\frac{5}{2}} e^{\frac{igt^2}{4(x-1)}}, \quad (3.12)$$

なお　$x \gg 1$ の時は直接 (3.4) において

$$J_1 \longrightarrow \frac{e^{\frac{igt^2}{4x}}}{i\sqrt{\pi}\,gx} \int_{-1}^{1} e^{i\frac{gt^2}{4x^2}x'} \sqrt{1-x'^2}\,dx' = \frac{\sqrt{\pi}}{i\sqrt{i}\,gx} \frac{J_1\left(\frac{gt^2}{4x^2}\right)}{\left(\frac{gt^2}{4x^2}\right)} e^{\frac{igt^2}{4x}}$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}\,x^{\frac{3}{5}}}{i\sqrt{i}\,g^{\frac{3}{2}}t^2} J_1\left(\frac{gt^2}{4x^2}\right) e^{i\frac{g}{4x}t^2}, \quad (3.13)$$

$\omega \gg 1$ ならば (3.6) から

$$J_2 \longrightarrow \frac{t}{2\sqrt{\pi}\,\omega^2}\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{t}{4\omega^2} = \frac{1}{gt} \qquad (3.14)$$

さて最後に (3.6) について考えてみよう。

その前に

$$1-\mu h-\sqrt{1-2\mu h+h^2} = 1-\mu h-\frac{1-2\mu h+h^2}{\sqrt{1-2\mu h+h^2}}$$

$$= -\sum_{n=2}^\infty h^n\{P_n(\mu)-2\mu P_{n-1}(\mu)+P_{n-2}(\mu)\} \qquad (3.15)$$

$$= (\mu^2-1)h^2\sum_{n=0}^\infty \frac{h^n P'_{n+1}(\mu)}{(n+2)(n+1)} = h^2\sum_{n=0}^\infty \frac{h^n}{(2n+3)}\{P_{n+2}(\mu)-P_n(\mu)\}$$

(3.6) の第1式において $u=\sqrt{i}\,\omega_1\omega_2 v$ とおくと。

$$J_2 = \frac{\sqrt{i}\,t}{\sqrt{\pi}\,\omega_1\omega_2}\int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}dv}{v^2}\left[x+\frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2}-\sqrt{\left(x+1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{v^2}\right)}\right]$$

但し $\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}=\sqrt{x^2-1}$, $\omega_1\omega_2=\frac{gt^2}{4\sqrt{x^2-1}}$, $\mu=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$= \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi g}}(x^2-1)^{\frac{3}{4}}\int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}}{v^2}dv\left[\mu+\frac{1}{v^2}-\sqrt{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{1}{v^2}\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{1}{v^2}\right)}\right]$$

$$\left(1+\frac{1}{v^4}+\frac{2x}{v^2\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi g}}(x^2-1)^{\frac{3}{4}}\int_0^\infty \frac{e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}dv}{v^4}\left[1+\mu v^2-\sqrt{1+2\mu v^2+v^4}\right], \qquad (3.16)$$

上の展開を使うと

$$J_2 = \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi g}}(x^2-1)^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^\infty \frac{P'_{n+1}(\mu)}{(n+1)(n+2)}\times\int_0^\infty e^{-i\omega_1\omega_2 v^2}v^{2n}dv.$$

$$\therefore\ J_2 = \frac{2\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}\, g\, (X^2-1)^{t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P'_{n+1}(\mu)}{(n+1)(n+2)} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(i\omega_1\omega_2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}(gt)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P'_{n+1}(\mu)}{(n+1)(n+2)} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(i\omega_1\omega_2)^{n}}, \quad \cdots (3.17)$$

これは漸近展開であって．　$P_2'(\mu) = 3\mu$

$$J_2 \longrightarrow \frac{1}{gt} + \frac{3\mu}{6gt\, i\omega_1\omega_2} - \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{15}{2}\mu^2 - \frac{3}{2}\right)}{gt\,(3\times 4)\cdot\omega_1^2\omega_2^2} + \cdots$$

$$\cdots (3.18)$$

これは(3.14)と較べられる。

4. 楕円分布(III) $(0<x<1)$

$0<x<1$ の時は 1節に示したように argument をとり直して 前節の積分表示から解析接続すればよい。

まず J_1 については

$$J_1 = \frac{1}{i\sqrt{\pi i g}}\left[\int_{-1}^{x} \frac{e^{\frac{igt^2}{4(x-x')}}}{\sqrt{x-x'}}\sqrt{1-x'^2}\,dx' + i\int_{x}^{1} \frac{e^{\frac{igt^2}{4(x'-x)}}\sqrt{1-x'^2}}{\sqrt{x'-x}}\,dx'\right],$$

$$= A_1 + A_2, \qquad (4.1)$$

$$A_1 = \frac{1}{i\sqrt{\pi i g}}\int_{-1}^{x}\frac{e^{\frac{igt^2}{4(x-x')}}}{\sqrt{x-x'}}\sqrt{1-x'^2}\,dx' = \frac{2\omega}{i\sqrt{\pi i g}}\int_{\omega_1}^{\infty}\frac{e^{iu^2}}{u^2}\sqrt{\left(x+1-\frac{\omega^2}{u^2}\right)\left(1-x+\frac{\omega^2}{u^2}\right)}\,du$$

$$= \frac{2\omega\sqrt{1-x^2}}{i\sqrt{\pi i g}}\int_{\omega_1}^{\infty}\frac{e^{iu^2}}{u^4}\sqrt{(u^2-\omega_1^2)(u^2+\bar{\omega}_2^2)}\,du,$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{gt^2}{4(1-x)}$$

$$= \frac{t\sqrt{1-x^2}\,e^{i\omega_1^2}}{2i\sqrt{\pi i}}\int_0^{\infty}\frac{e^{iv^2}\,v^2\sqrt{\omega_1^2+\bar{\omega}_2^2+v^2}}{(\omega_1^2+v^2)^{\frac{5}{2}}}\,dv, \qquad (4.2)$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi i g}}\int_x^1 e^{\frac{igt^2}{4(x'-x)}}\frac{\sqrt{1-x'^2}}{\sqrt{x'-x}}\,dx' = \frac{e^{-i\bar{\omega}_2^2}\,t}{2\sqrt{\pi i}}\int_0^{\infty} e^{-iv^2}\frac{\sqrt{1-x'^2}\,v\,dv}{(v^2+\bar{\omega}_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\omega^2}{v^2+\bar{\omega}_2^2} = x'-x, \qquad \frac{gt^2}{4(x'-x)} = v^2 + \frac{gt^2}{4(1-x)}, \qquad \frac{\sqrt{g}t}{2\sqrt{x'-x}} = \sqrt{v^2+\bar{\omega}_2^2}$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{v^2+\bar{\omega}_2^2}} = 2\sqrt{x'-x}, \qquad \frac{dx'}{\sqrt{x'-x}} = \frac{-\sqrt{g}t\,v\,dv}{2(v^2+\bar{\omega}_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sqrt{1-x'^2} = \sqrt{\left(1-x-\frac{\omega^2}{v^2+\bar{\omega}_2^2}\right)\left(1+x+\frac{\omega^2}{v^2+\bar{\omega}_2^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(v^2+\bar{\omega}_2^2)}\sqrt{v^2(v^2+\omega_1^2+\bar{\omega}_2^2)} =$$

昭和　　年　　月　　日

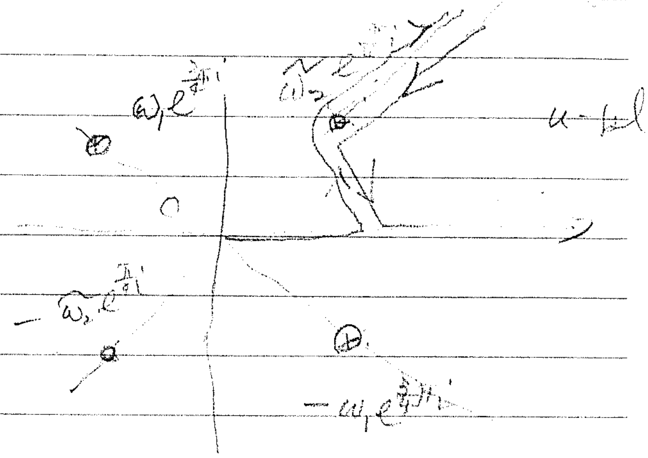
$$A_2 = \frac{t\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{\pi}\, i}\, e^{-i\tilde{\omega}_2^2} \int_0^\infty \frac{e^{-iv^2}\, v^2\, dv\, \sqrt{v^2+\tilde{\omega}_1^2+\tilde{\omega}_2^2}}{(v^2+\tilde{\omega}_2^2)^{\frac{5}{2}}}, \qquad (4.3)$$

次に J_2 は上の[illegible] (3.6) の[illegible]について考え

れば $x<1$ となると

図のように path をとれば

でいあるから



$$J_2 = J_2^* + B, \qquad (4.4)$$

$$J_2^* = \frac{it}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u^2}\, du \left[x + i\frac{\omega^2}{u^2} \pm i\sqrt{\left(x+1+\frac{i\omega^2}{u^2}\right)\left(1-x-i\frac{\omega^2}{u^2}\right)} \right]^{-1}$$

$$= \frac{it}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}\, du}{i\omega^2 + xu^2 \mp i\sqrt{\{(1+x)u^2+i\omega^2\}\{(1-x)u^2-i\omega^2\}}}, \qquad (4.5)^*$$

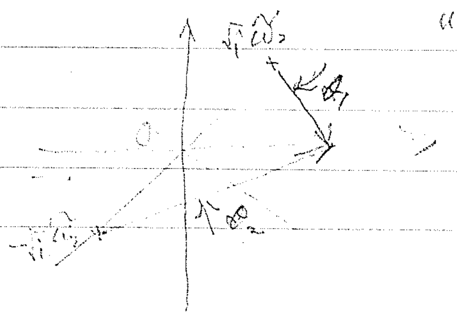
$$B = \frac{-2t\sqrt{1-x}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{i}\tilde{\omega}_2}^\infty \frac{e^{-u^2}}{u^4}\, du\, \sqrt{(u^2+i\tilde{\omega}_1^2)(u^2-i\tilde{\omega}_2^2)} \qquad u^2 = i\tilde{\omega}_2^2 + iv^2$$

$$= \frac{-i\, t\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\pi}\, i}\, e^{-i\tilde{\omega}_2^2} \int_0^\infty \frac{e^{-iv^2}\, dv\, v^2 \sqrt{(\tilde{\omega}_1^2+\tilde{\omega}_2^2)+v^2}}{(v^2+\tilde{\omega}_2^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$= -2A_2, \qquad (4.5)$$

$$\therefore\ J = A_1 - A_2 + J_2^*, \qquad (4.6)$$

*



$$\arg.\left[\sqrt{u^2 - i\tilde{\omega}_2^2}\right] = (\theta_1 + \theta_2)$$

$\theta_1 + \theta_2 \longrightarrow 0$ for $u \to \infty$

$\left.\begin{array}{l} \theta_1 \longrightarrow -\frac{\pi}{4} \\ \theta_2 \longrightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}\right\}$ for $u \to 0$

昭和　　年　　月　　日

5. 楕円分布 (IV)　　$(x=0)$

$x \geq 1$, $x \leq 1$ の時の場合はそれぞれの積分表示によって計算出来，それらの値は $t>0$ で有限である。

$x=0$ の時は閉じた表示ができる。

(2.5) によれば $x \to 0$ の時

$$J(0,t) = \int_0^\infty J_1(k) \frac{\sin \sigma t}{\sigma k}\, dk \quad \cdots (5.1)$$

$$\frac{J_1(k)}{k} = \frac{1}{2}(J_0 + J_2).$$

$$k = \frac{u^2}{2}, \quad dk = u\,du, \quad w = \sqrt{\frac{g}{2}}\, t$$

$$J(0,t) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\infty \left\{ J_0\left(\frac{u^2}{2}\right) + J_2\left(\frac{u^2}{2}\right) \right\} \sin(wu)\, du,$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{2g}} \int_0^\infty \left\{ J_0\left(\frac{u^2}{2}\right) + J_2\left(\frac{u^2}{2}\right) \right\} \left\{ e^{iwu} - e^{-iwu} \right\} du$$

$$= C_0(z) + C_2(z) \quad \cdots (5.2)$$

ここで

$$\int_0^\infty e^{-tz} J_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} D_{-\nu-1}(\sqrt{i}\, z) D_{-\nu-1}\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right) \quad (5.3)$$

であるから

$$C_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} I_m \left[D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{i}\, w}{i}\right) D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{w}{i\sqrt{i}}\right) \right] \quad \cdots (5.4)$$

$$C_2(z) = \frac{3}{4\sqrt{2g}} I_m \left[D_{-\frac{5}{2}}\left(\frac{w}{\sqrt{i}}\right) D_{-\frac{5}{2}}\left(\frac{w}{i\sqrt{i}}\right) \right], \quad (5.5)$$

[illegible]

$$D_\nu(z) \xrightarrow{z\to 0} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, 2^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} + z\, \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})}\, 2^{\frac{\nu-1}{2}} , \qquad (5.6)$$

$$D_\nu(z) \xrightarrow[|\arg z| < \frac{3}{4}\pi]{|z| \gg 1} e^{-\frac{z^2}{4}} z^\nu \qquad (5.7)$$

$$D_\nu(z) \xrightarrow[-\frac{\pi}{4} > \arg z > -\frac{5}{4}\pi]{|z| \gg 1} z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)\, z^{\nu+1}} e^{-\nu\pi i + \frac{z^2}{4}}$$

$$\mathcal{I}\left[D_\nu\left(\frac{w}{\sqrt{i}}\right) D_\nu\left(\frac{w}{i\sqrt{i}}\right) \right]_{w\to 0} \to - w \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{1}{2})\, 2^\nu}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})\Gamma(-\frac{\nu}{2})} , \qquad (5.8)$$

$$\mathcal{I}\left[D_\nu\left(\frac{w}{\sqrt{i}}\right) D_\nu\left(\frac{w}{i\sqrt{i}}\right) \right] \xrightarrow{w \gg 1} \mathcal{I}_m \left[(-w^2)^\nu - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)\, w} e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i + \frac{3}{4}\pi i} e^{\frac{i w^2}{2}} \right]$$

$$(5.9)$$