M-24

48年2月10日
No. 水害第2試験

浮遊式消波装置のFeasibility Study

別所正利

1. はじめに
2. 理論
3. 種々の場合
4. 結び

参考文献

附録

昭和47年11月14日

1. はじめに

水の波を消す原理として考えられるものは

A) 波のエネルギーを他のエネルギーに転換して波を小さくする

B) 波を反射,散乱させて所望の場所に不必要な波が来ないようにする。

の2つであろう。

Aの代表的なものはビーチ式消波装置であってこの場合は反射波を小さくすると言う意味の波消しである。又波のエネルギーは渦にそして最後に熱エネルギーに転換される。

この場合波のエネルギーは水の中に戻されているがこれはしかし系外に引き出して仕事をさせてもよい筈である。

これは波力利用(発電等)のアイデアであるが,このように考えて見ると,これは逆に見れば波消し装置と見なす事も出来る事になり,もし波のエネルギーをすべて利用出来たとするともはやそこから出て行く波はなくなるからそれは完全な消波装置にもなっているわけであって,波消し装置の研究は一方では波力利用の研究でもある。

実際J.H. Milgramは水槽端にフラップ式造波機をおき,それを制御して逆に波を消す事に成功し,~~この際動力が得られる事を示し~~,又T.Y. Wuは水中翼が振動する時波のエネルギーを吸收しうる條件を理論的にもとめた。

Bの代表的なものは防波堤であろう。波のエネルギーは殆どそのまま反射される。この方式の場合の問題点は波の反射による反力が大洋波を考える場合非常に大きい点である。

この原理に基づく消波装置は現在の所これ以外あまり例がないように思われるが,可能性の大きい分野のように見える。

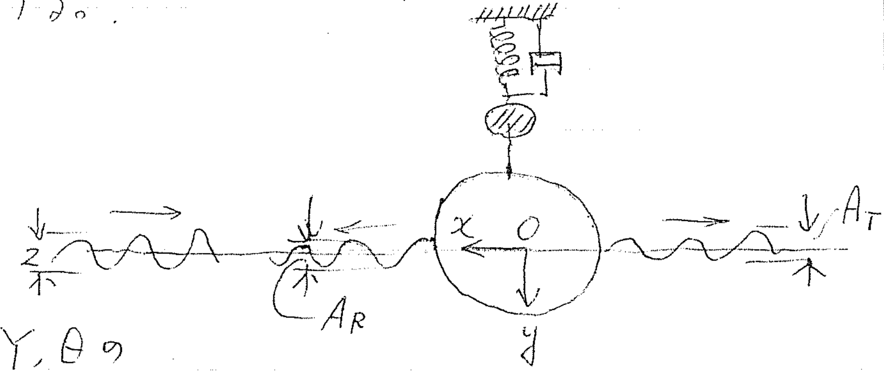
ここではこれ以上とりあげない事とし、もっぱら浮遊式のものをAの原理の面から考える事にしよう。

この方式はアイデアとしてはBの原理から発生したと考えられるけれど波が透過せず又反射波もなくなるとすればそれは理想的な波消し装置となるであろう。

もし上述のような機能が発揮出来るとすればそれはもはや波消しというよりは波吸収装置と言う方が適当であろう。

以下簡単の為に2次元問題とし單一波長の正弦波についてのみ考察する事にする。

2. 理論



左図のように波高が2の入射波の中で物体が原点を中心として振幅X, Y, Θの單弦運動をしているとしよう。

反射波の振幅をA_R、透過波のをA_TとするとA(20)式より

$$A_T + A_R = \frac{H_2^+(K)}{H_2^+(K)} + 2iKYH_2^+(K)$$

$$A_T - A_R = \frac{H_1^+}{H_1^+} + 2iK\{XH_1^+(K) + \Theta H_3^+(K)\} \qquad (2.1)$$

一方振巾は運動方程式から(物体は左右対称とする)

$$KY = H_2^+(K)/C_2',$$

$$KX = D_1/\Delta, \quad K\Theta = D_3/\Delta, \qquad \cdots (2.2)$$

で与えられるものである。

しかし

$$KY = \frac{i}{2H_2^+} \quad \text{or} \quad C_2' = -2i|H_2^+|^2, \qquad \cdots (2.3)$$

とする事が出来れば

$$A_T + A_R = 0, \qquad \cdots (2.4)$$

となる。

(2.3)のようにするには図のような力学系を系外に作り

$$\nabla + f_{22c} + \delta_2 = (B+S_2)/K, \qquad \mu_2 = 1 \qquad \cdots\cdots (2.5)$$

(附録参照)

とすればよい。

この時 Y, θ は同位相に動いているとすると

$$A_R - A_T = \frac{H_2^+}{H_2^-}\,\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}, \qquad \cdots\cdots (2.6)$$

となっている。

(2.5)において $\mu_2 = 1$ であるから系外に物体がなす仕事は heaving による damping に等しい事になりそれはこの場合

$$W = \frac{1}{2}N_2|Y|^2 = \frac{\rho}{2}\omega^2|Y|^2|H_2^+|^2 = \frac{\rho g^2}{8\omega} = \frac{E_W}{2}, \qquad (2.7)$$

但し $E_W = \frac{\rho g}{4}V_W = \frac{\rho g^2}{4\omega}$, $V_W = g/\omega$

で E_W は単位振巾の入射波の単位巾 単位時間当りのエネルギーである。

つまり入射波の半分のエネルギーは系外に吸収された事になるから、残っているのは半分で波高は(2.4)から $A_R = -A_T$ であるから

$$|A_T| = |A_R| = 1/2 \qquad , \cdots (2.8)$$

とならなければならないが実際(2.6)からそうなっている事がわかる。

rolling を考える必要がなければ swaying についても全く同様であって後の半分のエネルギーを回収出来る事になる。

一般には附録のように $Re\{C_1C_3' - (C_{13})^2\} = 0$, $\beta_1 = 1$, (2.9)

の時 $A_R = A_T$, (2.10)

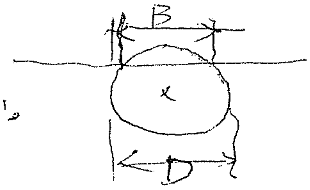
となるから Y が(2.3)を満たすならば $A_R = A_T = 0$, (2.11)

となって所望の条件が得られる。

なお $A_R = 0$ となると漂流力も 0 になる[4]ので都合が良いであろう。

3、種々の場合

i) 部分没水円柱



原点を中心にとれば rolling は考えなくともよい。

y一方向の条件(2.5)は次のようになる

$$K = \frac{\sigma^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{B+S_2}{\nabla(1+k_2)+\delta_2} \quad , \quad \cdots\cdots (3.1)$$

これは系の固有周期である。

$S_2, \delta_2 \approx 0$, $k_2 \doteqdot 1$ とすると、

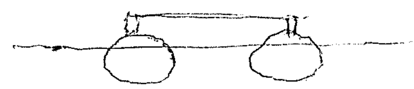
$$\frac{\lambda}{2\pi} \doteqdot \frac{2\nabla}{B} \doteqdot \frac{\pi}{4\alpha}D \quad , (B=\alpha D) \quad , \quad \cdots\cdots (3.2)$$

であるから $\lambda=100$ m とすると $D \doteqdot \frac{2}{\pi^2}\alpha\lambda = 20\alpha$ m の程度となる。

αを小さくすればDも小さくなるがその場合は非線型な減衰が出て来るであろう(没水面の変化による)から注意しなければならない。

又 $S_2=\delta_2=0$ の時はこの周波数は所謂波無し周波数に略々等しいからやはり注意しなければならない。

x一方向には復原力がないので附加しなければ成らない。その値は静的復原力(上下方向の)と同程度の大きさでなければならない事は明らかであろう。



そのような装置は繋留装置を工夫して可能であるように思われるが、それが出来なければ図のように上下方向の仕掛を2段,3段と装備する事が考えられるがこれを図のように一体化するならばこれは roll 方向と考えた事に等しくなるからこの場合は roll の周期を理論に合うように調整すればよい。

なお波のパワーは単位半高について

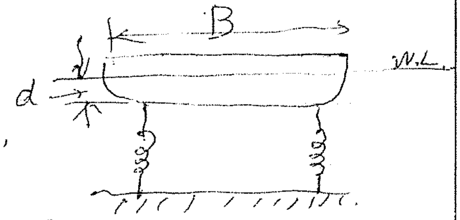
$$E_w = \rho g^2/4\omega = \frac{\rho g}{4}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

であるから $\lambda=100$ m, 波高 2 m とすると

$$E_w/75 \doteqdot 30 \ \mathrm{H.P/m}$$

の程度である。

ii) 筏



sway-motion による波が rolling によるものより充分小さいならば rolling のみ考えれば よく

$$K = \frac{\nabla m + s_3}{\nabla(1+k_3)\kappa^2 + \delta_3} \quad , \quad - - - \quad (3.3)$$

となるが 今, $\delta_3 \fallingdotseq 0$, $k_3 \fallingdotseq 1$ とすると

$$\nabla m = \frac{B^3}{12}, \quad \nabla\kappa^2 \fallingdotseq \nabla\frac{B^3}{12}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \fallingdotseq \frac{1}{d} \quad , \quad - - - \quad (3.4)$$

となって d が大きくなりすぎるから、復原力を少なくする必要がある。
そのためには半没体として水線面積を小さくするかもしくはバネ系を装着する事である。

一方 x-方向に関しても前項で見たように半没体としなければ浮体の大きさは非常に大きいものになってしまうので図のような筏はあまり現実的ではなく、前項の最後に指摘したように半没体を何個かならべたような筏~~方~~が現実的であるように思われる。

又そのような筏を剛につくるのは大変であろうから剛性による撓みをも考慮した理論を考える必要があろう。

iii) 筏 (続)

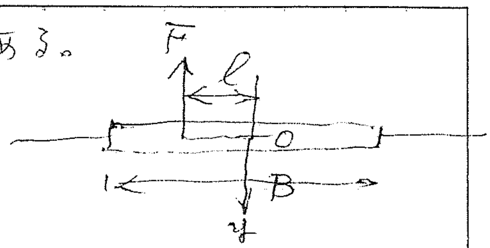
そのような訳で筏で波消しを実現するのは難かしいが、仮にそれが出来たとしても上下動と rolling の両方に対して別々の適当な減衰を加えるのは大変であるから、これを一つに出来ないだろうか。

これを正面から考えるのは大変であるが、次の定理を利用して逆に考えて行くと簡単にとける。

「波の問題では時間軸を逆にした運動が一般に存在する」

今の場合ある点に力学系を附け加えて(力を加えて)波を消す事が出来るならば逆にその点に力を加えて片方に拡げ波

が出て行くような運動があると言う事である。



そのような点を探して見よう。

図の l 点に F なる力をかけるとすると運動方程式は

$$\left.\begin{array}{l} K C_2 Y = F \\ K C_3 \theta = lF \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} C_2 = \nabla + f_{22} - B/K \\ C_3 = \nabla \varkappa^2 + f_{33} - \nabla m/K \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (3.5)$$

夫々正負の方向に出て行く波の振巾は

$$\left.\begin{array}{l} A^+ = iK\{Y H_2^+ + \theta H_3^+\}, \\ A^- = iK\{Y H_2^- + \theta H_3^-\} = iK\{Y H_2^+ - \theta H_3^+\}, \end{array}\right\} \quad (3.6)$$

よって今 $A^- = 0$ になる為には

$$Y H_2^+ = \theta H_3^+, \quad \text{for } A^- = 0, \quad \cdots (3.7)$$

でなければならない。

一方 (3.5) から
$$l C_2 Y = C_3 \theta, \quad \cdots\cdots (3.8)$$

でなければならないから (3.7) は

$$l C_2 H_3^+ = C_3 H_2^+$$

or
$$l = \frac{C_3 H_2^+}{C_2 H_3^+}, \quad \cdots\cdots (3.9)$$

又正方向に出て行く波の振幅が 1 である為には (3.7) と (3.6) から

$$Y = 1/2iK H_2^+, \quad \theta = 1/2iK H_3^+, \quad \cdots\cdots (3.10)$$

よって (3.5) から
$$F = C_2/2i\cancel{K} H_2^+ = C_3/2i\cancel{K} l H_3^+, \quad (3.11)$$

のように F も決まる。

このような l が real でありうるであろうか。(real でなければ定点ではなく正負に振動する事になるから)

$K \to 0$ とすると
$$H_3^+(K)/H_2^+(K) \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{-iK\nabla \overline{OM}}{B - K(1+f_{22})\nabla},$$

であるから (3.9) より
$$l \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{i}{\overline{OM}}\left(\varkappa^2 + \frac{f_{22}}{\nabla} - m/K\right), \quad \cdots (3.12)$$

よって l は rolling の同調点で real になり得，その時

$$l \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{|H_3^+|^2}{\nabla OM} \longrightarrow K^2\nabla OM = \frac{K^2B^3}{12}, \quad \cdots (3.13)$$

となって l は非常に小さい事がわかる。

今度は逆に l 点に $-\overline{F}^*$ なる力が働いて入射波があるとすると運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} KC_2Y + \overline{F}^* &= H_2^+ \\ KC_3\theta + l\overline{F}^* &= H_3^+ \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (3.14)$$

波が消える為には $Y = i/2K\overline{H_2^+}$，$\theta = i/2K\overline{H_3^+}$，

でなければならないから上式に代入して，

$$\left.\begin{aligned} &\overline{F}^* = \overline{C_2}/2i\overline{H_2^+}, \quad l\overline{F}^* = \overline{C_3}/2i\overline{H_3^+}, \\ &\text{よって} \quad l = \overline{C_3H_2^+}/\overline{C_2H_3^+}, \end{aligned}\right\} \quad \cdots (3.15)$$

この後の式は l は real とするから (3.9) の l に等しく，又

$$\overline{F}^* = -\overline{F}, \quad \cdots\cdots \quad (3.16)$$

となっている事がわかる。

又 l 点の変位は $(Y+l\theta)$ であるから，

$$\frac{\overline{F}^*}{Y+l\theta} = \frac{-\overline{C_2}}{1+l\overline{H_2^+}/\overline{H_3^+}} = \frac{-\overline{C_2C_3}}{\overline{C_3}+l^2\overline{C_2}} \equiv C, \quad \cdots (3.17)$$

となって $\overline{F}^*$ は l 点の変位に比例する事がわかり，上式から所要の大きさが計算出来る。

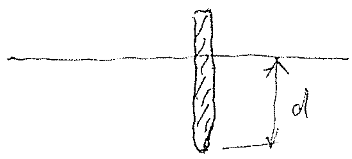
$K\to 0$ の時は (3.13) によって l が与えられ，その時

$$C \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{B - K(1+k_2)\nabla - iK|H_2^+|^2}{1 + iK\{B-K(1+k_2)\nabla\}} \longrightarrow -\overline{C_2}, \quad (3.18)$$

となって，これは上下動のみで波を消す場合の条件に略々等しい。

一方 l が real である為の条件は rolling の同調点であったから，結局前節で見たような困難は同じであるが，l 点において力を加えて波を消す事は原理的には可能であると思われる。

iv) 垂直平板



今度は上下動によって殆ど波が起きない場合であるが、この時は A(17) により

$H_4^+ = -H_4^-$ であるから A(20) 第1式は

$$A_R + A_T = 1, \quad \cdots\cdots (3.19)$$

となる。

従って波を全部消す事は出来ず、理想的に行っても半分である。又 $A_R=0$ ならば $A_T=1$, $A_T=0$ ならば $A_R=0$ であるが、この点は次項で考えよう。

rolling の同調点で $\sigma_1, \sigma_{13}, \delta_1, \delta_3 \doteqdot 0$ とすると

$$\nabla x^2(1+k_3) = \frac{\nabla m}{K} + \frac{f_{13c}^2}{\nabla + f_{11c}}, \quad \cdots (3.20)$$

であるから更に $k_3=1$, $f_{13c}^2/(\nabla+f_{11c}) \doteqdot \frac{\nabla}{2}\times\frac{d^2}{4}$, $\nabla x^2 \doteqdot \nabla\frac{d^2}{12}$ とおくと

$$K \doteqdot m\Big/\left(\frac{d^2}{6}-\frac{d^2}{8}\right) = 24m/d^2, \quad \cdots (3.21)$$

となるから $\lambda=100m$, $d=10m$ とすると $m \equiv \overline{GM} \doteqdot \frac{1}{4}$ (m) の程度となる。

又外力の系の着力点の位置は A(43) により l_w であるから

$$l_w \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{k_1 l_1}{1+k_1} \doteqdot \frac{d}{4} \quad \left(k_1 \doteqdot 1,\ l_1 \doteqdot \frac{d}{2}\right), \quad \cdots (3.22)$$

となる。

このように rolling の条件を満足させる事は容易に見えるが上下方向には波が起きないとすると波は半分しか消せない訳である。

又渦減衰のようなものも大きいと考えられるので実験的によく検討する必要がある。

つまり渦減衰が造波減衰より大きいならば波を消すには逆に仕事を供給してやらねばならない事になり、又それが丁度等しくなれば外部に系をつくる必要はない。

なおこの時は反射波は残るので漂流力が働く故それをとめる必要があるがその繋留点は上の考察から l_w がよい事になる。

V) 垂直平板（続）

(3.19) により $A_R=0$ ならば $A_T=1$，$A_T=0$ ならば $A_R=1$ であるが，そのような場合の実現性について考えて見よう。

A (18) により
$$A_R=\frac{H_{1s}^+}{H_1^+}+iKH_1^+(X+l_w\theta)$$

と A (34) より
$$K(X+l_w\theta)=\frac{\Delta_s}{(1+\beta)\Delta H_1^+}, \quad \Delta=\Delta_c-i\Delta_s,$$

よって
$$A_R=i\frac{H_{1s}^+}{H_1^+}+\frac{i\,\Delta_s H_1^+}{(1+\beta)\Delta\,\overline{H_1^+}}, \quad \cdots\cdots (3.23)$$

従って
$$\frac{\Delta_s}{\Delta}=-(1+\beta)\frac{H_{1s}^+}{H_1^+}, \quad \text{for } A_R=0,\ A_T=1, \quad (3.24)$$
$$\frac{\Delta_s}{\Delta}=i(1+\beta)H_{1c}^+/H_1^+, \quad \text{for } A_R=1,\ A_T=0, \quad (3.25)$$

ここで ~~とおき~~
$$\Delta=\Delta_c-i\Delta_s=|\Delta|e^{i(\pi+\delta)}, \quad \pi>\delta>0, \quad (3.26)$$
$$\left.\begin{aligned} &H_1^+=H_{1c}+iH_{1s}^+=|H_1^+|e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{2})}, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2} \\ &H_{1c}^+=-i|H_1^+|\cos\alpha, \quad H_{1s}^+=+i|H_1^+|\sin\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (3.27)$$

なお
$$\alpha=\tan^{-1}\left\{\frac{\pi I_1(Kd)}{K_1(Kd)}\right\}, \quad (3.28)^{3)}$$

なる関係がある

このようにおくと (3.24), (3.25) は
$$(1+\beta)\sin\delta\, e^{-i\delta}=\begin{cases}-\sin\alpha\, e^{i\alpha} & \text{for } A_R=0 \\ -i\cos\alpha\, e^{i\alpha} & \text{for } A_T=0\end{cases} \quad \cdots\cdots$$

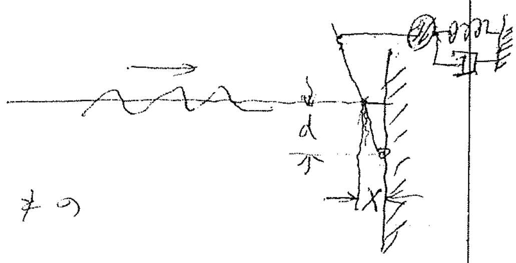
となり，結局，これを満足するには
$$\delta=\pi-\alpha, \quad \beta=0, \quad \text{for } A_R=0, \quad \cdots (3.29)$$
$$\delta=\frac{\pi}{2}-\alpha;\quad \beta=0, \quad \text{for } A_T=0, \quad \cdots (3.30)$$

でなければならない。

$\beta=0$ でなければならない事は A_R or A_T のどちらかが 1 つまり入射波のエネルギーが完全に反射又は透過する事から明らかであろう。

いずれにしても δ を上のように調節る事は可能であろう。

vi) 造波機型式(フラップ式)



J.H. Milgram によって研究された例であるが、ここでは水深は充分深いとし又受動的な図のような機械系を附加させるものとして考えよう。

今迄の例りと異なるのは波は壁によって完全に反射される点である。　$H_\infty^+ = 1$ 。 ………… (3.31)

又振幅 X のフラップ式造波装置の起す波については Havelock により $A(10)$ の形で

$$\left.\begin{aligned} H^+(k) &= -2\int_0^d (d-y)e^{-ky}dy \\ &= -\frac{2d}{k} + \frac{2}{k^2}(1-e^{-kd}) \xrightarrow[k\to 0]{} -d^2, \\ &\qquad \xrightarrow[k\to\infty]{} -\frac{2d}{k}, \end{aligned}\right\} \quad (3.32)$$

従って反射波は……

$$A_R = 1 + ikXH^+(k) \quad , \cdots\cdots (3.33)$$

と表わされ $A_R=0$ とする為には、

$$\left.\begin{aligned} X = -\frac{1}{ikH^+} &\xrightarrow[k\to 0]{} \frac{1}{ikd^2} \\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2id} \end{aligned}\right\} \cdots (3.34)$$

一方フラップに働く動水圧は反射波も含めると入射波のみの倍となるから

$$p = 2\rho g e^{-ky}$$

よってフラップのなす仕事は

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^d p(y)\dot{X}(d-y)dy \quad , \cdots\cdots (3.35)$$

所で　$\int_0^d p(y)(d-y)dy = -\rho g H^+(k),$ 　(3.36)

$\dot{X} = i\omega X = -\omega/kH^+$ であるから

$$W = \frac{\rho g^2}{2\omega} = 2E_w \quad , \cdots\cdots (3.37)$$

しかし フラップがつくる波の振幅は (3.33)により単位振幅であるから その為に必要なパワーはEwで 後の半分のパワーは系外に供給した事になる。

従って 図のような系をつくって波と同調させ、~~波~~波のパワーを吸収する事が出来る。

4. 結び

以上の考察から浮遊式消波装置はその動揺周期を入射波のそれに同調させ、さらに適当な減衰を附加すれば効率よく波を消す事が出来る事がわかり、又その時漂流力も小さくなる事がわかった。

そして又その時減衰の替りに発電機を使う事にすれば波からエネルギー機械的を取り出す事が出来、その量は波が消えた時に最大である事は明らかであるから波力の利用と波消しは両立する概念である。

しかし実用的には種々の波長に対してよく効くものを考えねばならず、又偏減衰等も一般に形状がスマートな形ではないと考えられるので その形状に応じて実験的に検討する必要があろう。

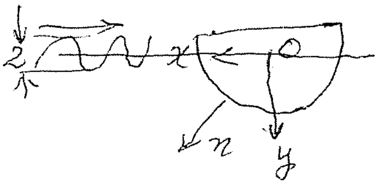
以上

参考文献

1) J. H. Milgram ; J.F.M. vol.43 (1970) pp.845-859
2) T. Y. Wu ; J.S.R., March 1972.
3) J. Kotik ; J.S.R., October 1963.
4) 別所正利, 防大理工学研究報告 3巻1号 昭和40年5月
5) 〃 , 〃 同3号 41年1月

A. 附録

必要な理論式は大体文献(4)(5)に従うが、あいまいな点もあるので以下にまとめて記す。



座標軸等は図のようにとる。

速度ポテンシャルを $\Phi(x,y,t)$, 圧力を $P(x,y,t)$, ~~とすると~~ 水面変位を $H(x,t)$ とし、それらを

$$
\left.
\begin{aligned}
\Phi(x,y,t) &= Re\left[\varphi(x,y)e^{i\omega t}\right], \\
P(x,y,t) &= Re\{p(x,y)e^{i\omega t}\}, \\
H(x,t) &= Re\{\eta(x)e^{i\omega t}\},
\end{aligned}
\right\} \quad \cdots (1)
$$

とおくと

$$p(x,y) = \rho i\omega\varphi(x,y), \quad \cdots (2)$$

$$\eta(x) = \frac{\omega}{ig}\varphi(x,0), \quad \cdots (3)$$

水面条件は

$$K\varphi(x,0) + \varphi_y(x,0) = 0, \quad K = \omega^2/g = 2\pi/\lambda, \quad (4)$$

である。

入射波は

$$\eta_0(x,t) = Re\{e^{iKx+i\omega t}\}, \quad \cdots (5)$$

とするとそのポテンシャル等は

$$
\left.
\begin{aligned}
\Phi_0(x,y,t) &= Re\{\varphi_0(x,y)e^{i\omega t}\}, \\
\varphi_0(x,y) &= \frac{ig}{\omega}\phi_0(x,y), \\
\phi_0(x,y) &= e^{-Ky+iKx},
\end{aligned}
\right\} \quad (6)
$$

とかける。

線型性を仮定すると全ポテンシャルは、

$$\varphi(x,y) = i\omega\sum_{j=0}^{4} X_j\phi_j(x,y), \quad \cdots (7)$$

ここに $X_1\equiv X$, $X_2\equiv Y$, $X_3\equiv\theta$, $X_0=X_4=1/K$ は夫々の振幅とする

境界条件は

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial n}\varphi_j = -i\omega X_j\frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad \frac{\partial}{\partial n}\phi_j = -\frac{\partial}{\partial n}x_j, \quad j=1,2,3,\cancel{4}, \\
&\frac{\partial}{\partial n}\varphi_4 = -\frac{\partial}{\partial n}\varphi_0, \quad \frac{\partial}{\partial n}\phi_4 = -\frac{\partial}{\partial n}\phi_0,
\end{aligned}
\right\} \quad (8)
$$

但し $x_1\equiv x$, $x_2\equiv y$, $\frac{\partial}{\partial n}x_3 = y\frac{\partial x}{\partial n} - x\frac{\partial y}{\partial n}$,

$|x|\gg 1$ では $\phi(x,y) \xrightarrow[|x|\gg 1]{} iH^{\pm}(K)e^{-Ky\mp iKx}$, ・・・(9)

但し上側符号は $x>0$ の時，下側のは $x<0$ の時とする。

又 $$H^{\pm}(K)=\int_c\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{-Ky\pm iKx}ds ,\quad \cdots\cdots (10)$$

ポテンシャルをその実虚部にわけて

$$\phi=\phi_c+i\phi_s ,\quad \cdots\cdots (11)$$

とかくと，それに応じて

$$H^{\pm}_{c,s}=\int_C\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_{c,s}-\phi_{c,s}\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{-Ky\pm iKx}ds ,\quad (12)$$

とかく事が出来るが，この H_c, H_s は~~数~~実 ~~か共に虚~~ であるとは限らない。

物体が左右対称ならば上下動では

$$H^{+}_{2}(K)=H^{-}_{2}(K) \quad \cdots\cdots (13)$$

で H^{+}_{2c}, H^{+}_{2s} は共に実数値をとる。

左右，回転動では

$$H^{+}_{j}(K)=-H^{-}_{j}(K) ,\ j=1,3, \quad \cdots\cdots (14)$$

で H^{+}_{jc}, H^{+}_{js} は共に虚である。

散乱波については

$$\left.\begin{aligned} H^{+}_{4}(K)&=H^{+}_{4c}+iH^{+}_{4s} \\ H^{-}_{4}&=\overline{H^{+}_{4c}}+i\overline{H^{+}_{4s}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (15)$$

となる。

又 $$H^{\pm}_{3}(K)=l_w H^{\pm}_{1}(K) ,\quad l_w : \text{real} ,\quad (16)$$

なる関係があり，散乱波については

$$H^{\pm}_{4}(K)=\frac{H^{+}_{2s}}{H^{+}_{2}}\pm\frac{H^{+}_{1s}}{H^{+}_{1}} ,\quad \cdots\cdots (17)$$

なる簡単な関係があり，波については H^{+}_{1} と H^{+}_{2} がわかれば すべてわかる事になる。

外に出て行く波の振幅は、(1), (9) によって、

$$\sum_j \zeta_j(x) = \frac{\omega}{ig}\sum_j \varphi_j = \frac{\omega^2}{g}\sum_j X_j \phi_j \to ik\sum X_j H_j^{\pm}(K)e^{\mp ikx},$$

であるから反射波の振幅は

$$A_R = iK\sum_{j=1}^{4} X_j H_j^+(K) , \quad \cdots\cdots(18)$$

入射波も含めた透過波のそれは

$$A_T = 1 + iK\sum_{j=1}^{4} X_j H_j^-(K) , \quad \cdots(19)$$

そうすると (13), (14), (15) を代入して

$$A_R + A_T = 1 + i(H_4^+ + H_4^-) + 2iKYH_2^+ ,$$

$$A_R - A_T = -1 + i(H_4^+ - H_4^-) + 2iK\{XH_1^+ + \theta H_3^+\} ,$$

所で

$$\left.\begin{aligned} 1 + i\{H_4^+ + H_4^-\} &= H_2^+/\overline{H_2^+} \\ 1 + i\{H_4^- - H_4^+\} &= -H_1^+/\overline{H_1^+} \end{aligned}\right\}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned} A_T + A_R &= \frac{H_2^+}{\overline{H_2^+}} + 2iKYH_2^+ , \\ A_R - A_T &= \frac{H_1^+}{\overline{H_1^+}} + 2iK\{XH_1^+ + \theta H_3^+\} , \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

を得る。

これに i 番目の運動による j 方向の力又はモーメントは $Re\{F_{ij}e^{i\omega t}\}$ とすると

$$F_{ij} = -\int_C p_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\rho i\omega \int_C \varphi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \rho\omega^2 X_i \int \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds$$

$$= \rho\omega^2 X_i f_{i,j} , \quad \cdots\cdots(21)$$

ここに

$$f_{ij} = \int_C \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \int \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds = f_{j,i} , \quad (22)$$

と称する。

但し、 $i, j = 1, 2, 3$

波の力は $Re\{E_j e^{i\omega t}\}$ とおくと

$$E_j = -\int (p_0 + p_d)\frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\rho g H_j^+(K) \qquad (23)$$

となる。

運動方程式は系外の力を F_j $(j=1,2,3)$ とすると

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 MX &= F_{11} + F_{31} + E_1 + F_1, \\ -\omega^2 I\theta + Wm\theta &= F_{13} + F_{33} + E_3 + F_3, \\ -\omega^2 MY + \rho g BY &= F_{22} + E_2 + F_2. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

M は質量，I は質量慣性モーメント，$W = gM$，$m = \overline{GM}$，B は水線幅とする。

(21)を代入し，$M = \rho\nabla$，$I = \rho\nabla\kappa^2$ とすると、上式は

$$\left.\begin{aligned} -K(\nabla + f_{11})X - Kf_{13}\theta &= -H_1^+(K) + F_1/\rho g, \\ \{-K(\nabla\kappa^2 + f_{33}) + \nabla m\}\theta - Kf_{31}X &= -H_3^+ + F_3/\rho g, \\ \{-K(\nabla + f_{22}) + B\}Y &= -H_2^+ + F_2/\rho g, \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

となる。

今 F_j が

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho g}F_1 &= (K\delta_1 - s_1 - i\frac{\mu_1}{K})X + (K\delta_{13} - s_{13} - i\mu_{13})\theta, \\ \frac{1}{\rho g}F_3 &= (K\delta_3 - s_3 - i\frac{\mu_3}{K})\theta + (K\delta_{31} - s_{31} - i\frac{\mu_{31}}{K})X, \\ \frac{1}{\rho g}F_2 &= (K\delta_2 - s_2 - i\frac{\mu_2}{K})Y, \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

~~の~~ように与えられる，つまり外部にこのような力学系を考えると(26)から

$$\left.\begin{aligned} C_1'X + C_{13}'\theta &= H_1^+/K, \\ C_3'\theta + C_{31}'X &= H_3^+/K; \end{aligned}\right\} \cdots (28)$$

$$C_2'Y = H_2^+/K, \qquad \cdots (29)$$

$$C_1' = \nabla + f_{11c} + \delta_1 - s_1/K - i(\mu_1 + |H_1^+|^2),$$
$$C_3' = \nabla\kappa^2 + f_{33c} + \delta_3 - s_3/K - \frac{\nabla m}{K} - i\{\mu_3 + |H_3^+|^2\},$$

$$\left.\begin{aligned} C_2' &= \nabla + f_{22c} + \delta_2 - (B+S_2)/K - i(\mu_2 + |H_2^+|^2) \\ C_{13}' &= f_{13c} + \delta_{13} - \frac{S_{13}}{K} - i\{\beta_{13} + H_1^+\overline{H_3^+}\}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

f_{ijc} は f_{ij} の real part を意味する なお $\mathcal{I}\{f_{ij}\} = -H_i\overline{H_j}$ である。

ここで $\mu_j = \beta_j|H_j^+|^2$, $\mu_{1,3} = \beta_{13}H_1^+\overline{H_3^+} = \mu_{31}$, ‥ (31)

をおいておこう。

そうすると先ず(29)の解は $KY = H_2^+(K)/C_2'$, ‥ (32)

で特に同調時には

$$KY = \frac{i}{(1+\beta_2)\overline{H_2^+}}, \text{ for } \nabla + f_{22c} + \delta_2 = \frac{B+S_2}{K}, \quad (33)$$

次にもし θ を考える必要がなければ X について上式と同形になるが一般には

$$KX = D_1/\Delta, \quad K\theta = D_3/\Delta, \quad \cdots (34)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= C_1'C_3' - (C_{13}')^2, \\ D_1 &= C_3'H_1^+ - C_{13}'H_3^+, \quad D_3 = C_1'H_3^+ - C_{13}'H_1^+ \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

ここで更に $\beta_1 = \beta_3 = \beta_{13}$, ‥‥‥ (36)

とおくと D_1, D_3 は実になって

$$X/\theta = D_1/D_3 = l, \quad \cdots\cdots (37)$$

なる l は実になる。(rolling 中心)

さて同調時には

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}\{C_1'C_3' - (C_{13}')^2\} = 0 \\ &\text{のとき}\quad \mathrm{Im}\{C_1'C_3' - (C_{13}')^2\} = -(1+\beta)|H_1^+|^2\{C_1'l_w^2 + C_3' - 2l_wC_{13}'\}, \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

となるので

$$\left.\begin{aligned} K\theta &= \frac{i}{1+\beta_1}\frac{(l_wC_1' - C_{13}')}{\overline{H_1^+}}\Big/(l_w^2C_1' + C_3' - 2l_wC_{13}'), \\ KX &= \frac{i\,(C_3' - l_wC_{13}')}{(1+\beta_1)\overline{H_1^+}}\Big/(\quad 〃 \quad) \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

よって $KXH_1^+ + K\theta H_3^+ = iH_1^+/(1+\beta)\overline{H_1^+}$, ‥ (40)

左右動とrollingは元来独立でないから系外の力を独立にする必要はなく ある1点に作用させればよいと考えられる。

それを $\bar{F}_3 = l\bar{F}_1$ とおくと (27), (36) から

$$\left.\begin{aligned} l\delta_1 &= \delta_{13}, & l\delta_{13} &= \delta_3, & \delta_3 &= l^2\delta_1 \\ l s_1 &= s_{13}, & l s_{13} &= s_3, & s_3 &= l^2 s_1 \\ l\mu_1 &= \mu_{13}, & l\mu_{13} &= \mu_3, & \mu_3 &= l^2\mu_1 \end{aligned}\right\} \cdots \quad (41)$$

でなければならず、この前後の式から

$$\beta_3 |H_3^+|^2 = \beta_1 l^2 |H_1^+|^2 \quad \cdots (42)$$

であるから 結局

$$l = l_w, \quad \cdots \quad (43)$$

でなければならない。

従って力は

$$\frac{\bar{F}_1}{\rho g} = (K\delta_1 - s_1 - i\mu_1)(X + l_w\theta), \quad (44)$$

$$\bar{F}_3 = l_w \bar{F}_1$$

となる。

以上。