M-30-1C-0

昭和48年10月14日

水面に近い水平板の附加質量

i) 鏡像　　C-1

ii) 水面で $\phi=0$ の場合 $(K=\omega^2/g\to\infty)$　　C-3

iii) 水面で $\phi_y=0$ 〃 $(K=0)$　　C-5

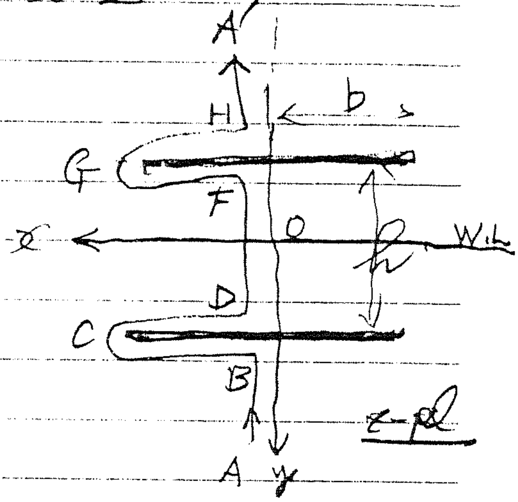
iv) 水面に浮ぶ平板 $(K=0)$　　C-10

v) 没水平板 $(K=0)$　　C-11

vi) 没水平板 $(K\neq 0\ll 1)$　　C-13

昭和　　年　　月　　日

水面に近い水平々板の附加質量



i) 写像*

z-pl. の左半面を w-pl. の上半面に写すには

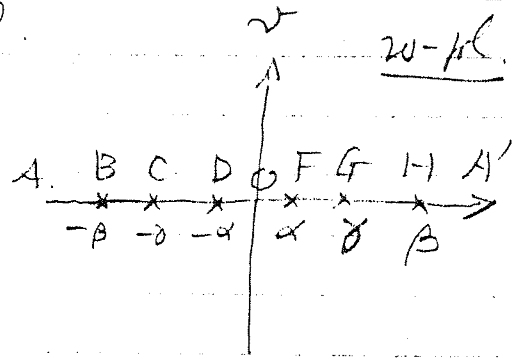
$$\frac{dz}{dw} = -i\,\frac{w^2-\gamma^2}{\sqrt{(w^2-\alpha^2)(w^2-\beta^2)}}, \quad (1)$$

ここで　$\alpha = \beta k$, 　(2)

とおき 楕円関数(引数k)** によって

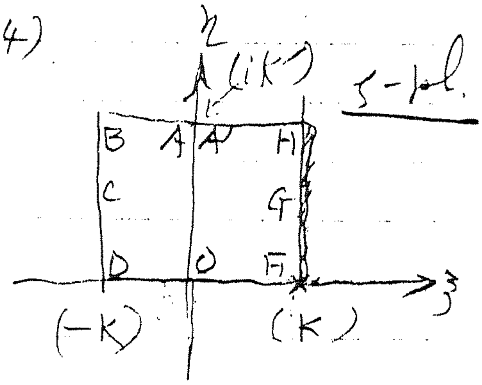
$$w = \alpha\,\mathrm{sn}\,\zeta, \quad (3)$$

とおくと w-pl. の上半面は ζ-pl. の矩形に写る。



G点は ζ-pl. で $(K+i\eta_0)$ であるから

$$\gamma = \alpha\,\mathrm{sn}(K+i\eta_0) = \frac{\alpha}{\mathrm{dn}'\eta_0}, \quad (4)$$



肩符(')は以下 引数 $k'=\sqrt{1-k^2}$ に対する関数を示すものとする。

さて(1)式を積分すると

$$z = -i\beta\left[E(\zeta) - \left(1-\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\zeta\right] + \mathrm{Const.} \quad (5)$$

となるが各点の対応性から

---

* Durand; Aerodynamic Theory, vol. 2, p. 209

** 友近晋, "楕円函数論", 河出書房

昭和　　年　　月　　日

$$\beta^2/\gamma^2 = K'/E', \quad \cdots\cdots (6)$$

$$h = \pi\beta/K', \quad \cdots\cdots (7)$$

$$b = \beta\left[\frac{\gamma^2}{\beta^2}\eta_0 - E(\eta_0) + \sqrt{\left(\frac{\gamma^2}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}-1\right)}\right], \quad (8)$$

h/k が小さい所を考えているので $\alpha/\beta = k$ が小さい所だけ考えれば良い。

その時、

$$E'=1, \quad K' \doteqdot \log\left(\frac{4}{k}\right), \quad \cdots\cdots (9)$$

よって(6)から

$$\beta^2/\gamma^2 = \log\left(\frac{4}{k}\right), \quad \cdots\cdots (10)$$

又(4)から

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\mathrm{dn}'\eta_0} \doteqdot \cosh\eta_0 \doteqdot \frac{1}{2}e^{\eta_0}$$

なる

$$\eta_0 \doteqdot \log\frac{2\gamma}{\alpha} = \log\left(\frac{2\gamma}{k\beta}\right) = \log\left\{\frac{2}{k\sqrt{\log(4/k)}}\right\}, \quad (11)$$

さらに

$$E(\eta) \doteqdot 1, \quad \sqrt{\left(\frac{\gamma^2}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}-1\right)} \doteqdot 1-\frac{\gamma^2}{2\beta^2}$$

であるから

$$h = \beta\pi/\log\left(\frac{4}{k}\right), \quad \cdots (12)$$

$$b = \frac{\beta}{\log(4/k)}\left[\log\left\{\frac{2}{k\sqrt{\log(4/k)}}\right\} - \frac{1}{2}\right], \quad (13)$$

なお

$$\left.\begin{aligned} &\frac{b}{\beta} \xrightarrow[k\to 0]{} 1 \\ &\frac{h}{2b} \xrightarrow[k\to 0]{\prime\prime} \frac{\pi}{2}\Big/\left[\log\frac{2}{k\sqrt{\log(4/k)}} - \frac{1}{2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\log\frac{2}{k} - \frac{1}{2}\log\log\frac{4}{k} - \frac{1}{2}$$

である。

昭和　年　月　日

ii) $y=0$ で $\phi=0$ つまり $K=\omega^2/g \to \infty$ の場合

これは前出の複葉翼の Induced Drag の式と全く同じになって、w-pl. は複素速度ポテンシャル面となる。

$$\left.\begin{aligned} \Phi+i\Psi &= F \equiv w, \\ \Psi &= 0 \quad \text{on} \quad \overline{ABCDOFGH}, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

下半面の平板の附加質量を m とすると

$$\left.\begin{aligned} m &= -2\rho\int_{BCD} \phi\, \phi_\nu\, ds, \\ \phi_\nu &= -y_\nu \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

となる。

ここに

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \Phi - y, \\ \phi &\xrightarrow[y\to\infty]{} 0 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

とする。

(16)を変形して

$$\int \phi\, y_\nu\, ds = \int(\phi+y)\, y_\nu\, ds - \int y\, y_\nu\, ds = \int \Phi\, y_\nu\, ds.$$

$$\because \int y\, y_\nu\, ds = 0$$

であるから

$$\frac{m}{\rho} = 2\int \Phi\, y_\nu\, ds = 2\int_{BCD} \Phi\, \frac{dx}{dw}\, dw, \quad (18)$$

(1)を代入すると

$$\frac{m}{\rho} = 2\int_\alpha^\beta \frac{(w^2-\gamma^2)\, w\, dw}{\sqrt{(w^2-\alpha^2)(\beta^2-w^2)}} = \frac{\pi}{2}(\beta^2+\alpha^2-2\gamma^2), \quad (19)$$

$$C_m = \frac{m}{\frac{\rho}{2}\pi b^2} = \frac{1}{b^2}\left(\beta^2 + \alpha^2 - 2\gamma^2\right)$$

$$\xrightarrow[k\to 0]{} \left(\frac{\beta}{b}\right)^2\left(1 - \frac{2}{\lg(4/k)}\right) \xrightarrow[k\to 0]{} 1, \quad \cdots (20)$$

を得る。

k	$\lg(4/k)$	$h/2b$	β/b	C_m	
.001	8.29	.260	1.37	1.43	
.0001	10.60	.191	1.29	1.35	
1×10^{-5}	13.90	.150			
$4e^{-20/b}$	20	.09075	1.155	1.20	$\frac{1}{2}+d_f^2$ 1.193

iii) $y=0$ で $\phi_y=0$, $K=\omega^2/g \to 0$ の場合.

$$f(z)=\phi+i\psi \; , \quad \cdots \quad (21)$$

とおくと境界条件は

$$\mathcal{I}\left\{\frac{df}{dz}\right\} = -\phi_y = \begin{cases} -1 & \text{on } y=\frac{h}{2},\ |x|<b \\ 0 & \text{on } y=0 \\ +1 & \text{on } y=-h/2,\ |x|<b \end{cases} \quad (22)$$

そのようなポテンシャルは平板より（逆向きの）doublet で表わされるから無限遠方では

$$f(z) = -i\int_{-b}^{b} \frac{\mu(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta-ih/2} + i\int_{-b}^{b}\frac{\mu(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta+ih/2} , \quad (23)$$

$$= +h\int_{-b}^{b}\frac{\mu(\zeta)\,d\zeta}{(z-\zeta)^2+h^2/4} \longrightarrow \frac{A}{z^2} , \quad (24)$$

$(A:\text{real.})$

となる。

この時附加質量係数は (16) より

$$C_m = \frac{m}{\frac{\pi}{2}\rho b^2} = \frac{-1}{\pi b^2}\oint \phi\,\phi_\nu\, ds \quad \cdots \quad (25)$$

積分は２つの平板をまわる path にとるものとする.

ところで (22) を $\phi_\nu = \frac{2y\,y_\nu}{h} = \frac{2}{h}(y\,y_\nu - x\,x_\nu)$; (26)

と書く事が出来又

$$\oint \phi\,\phi_\nu\, ds = \frac{1}{h}\oint\left[\phi\frac{\partial}{\partial\nu}(y^2-x^2) - (y^2-x^2)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right]ds$$

$$\because \oint (y^2-x^2)\,\phi_\nu\, ds = 0$$

であるから

$$C_m = \frac{-1}{\pi b^2 h}\oint\left[\phi\frac{\partial}{\partial\nu}(y^2-x^2) - (y^2-x^2)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right]ds , \quad (27)$$

昭和　　年　　月　　日

(24)を代入し、
(　)積分を半径無限大の円上で実行すると

$$C_m = \frac{4A}{\pi b^2 h}\int_0^{2\pi}(\cos^2 2\theta)\,d\theta = \frac{4A}{b^2 h}, \qquad (28)$$

さて、ポテンシャルを求める為に

$$F(z) = \frac{z^2}{h} + f(z), \qquad (29)$$

なる関数を考えよう。

$$\mathcal{I}\left\{\frac{dF}{dz}\right\} = \mathcal{I}\left\{\frac{2z}{h} + \frac{df}{dz}\right\} = \frac{2y}{h} - \phi_y, \qquad (30)$$

であるから(22)により

$$\mathcal{I}\left\{\frac{dF}{dz}\right\} = 0 \quad \text{on plate} \qquad (31)$$

又対称性から

$$\mathcal{I}\{F\} = 0 \quad \text{on } \overline{A, B, C, D, O, F, G, H, A'} \quad (32)$$

となる。
従って今

$$F(z) = C\,w^2(z), \quad c \text{ real}, \qquad (33)$$

とおくと明らかに(32)を満足する。
$z \to \infty$ では(29)と(24)によって

$$F(z) \longrightarrow \frac{z^2}{h} + \frac{A}{z^2} + \cdots \qquad (34)$$

となっている。
そこで(3)と(5)によって(33)から F の $z \to \infty$ の展開を求めて見よう。

また

$$w^2 = \alpha^2 sn^2\zeta = \alpha^2 sn^2(iK'+u) = \frac{\alpha^2}{k^2 sn^2 u} = \frac{\beta^2}{sn^2 u}$$

$$= \frac{\beta^2}{u^2\left\{1 - \frac{1+k^2}{6}u^2 + (1+14k^2+k^4)\frac{u^4}{5!}\right\}^2}$$

$$1 - \frac{1+k^2}{3}u^2 + \left(\frac{1+14k^2+k^4}{60} + \frac{(1+k^2)^2}{36}\right)u^4$$

$$= \frac{\beta^2}{u^2}\left[1 + \frac{1+k^2}{3}u^2 + au^4 + \frac{(1+k^2)^2}{9}u^4\right]$$

$$w^2 = \frac{\beta^2}{u^2}\left[1 + \frac{1+k^2}{3}u^2 + \left\{\frac{1}{12}(1+k^2)^2 - \frac{1+14k^2+k^4}{60}\right\}u^4 + \cdots\right]$$

$$= \frac{\beta^2}{u^2} + a\beta^2 + b\beta^2u^2 + \cdots \quad , (35)$$

$$a = \frac{1+k^2}{3}, \quad b = \frac{1}{60}\left\{4 - 4k^2 + 4k^4\right\} = \frac{1-k^2+k^4}{15}$$

次に (5) から

$$z = -i\beta\left[E(iK'+u) - \left(1-\frac{E'}{K'}\right)(iK'+u)\right]$$

$$= -i\beta\left[E(u) + cn\,u\,ds\,u - u\left(1-\frac{E'}{K'}\right)\right] \quad , (36)$$

$$E(u) - u\left(1-\frac{E'}{K'}\right) \doteqdot \frac{E'}{K'}u - \frac{k^2}{3}u^3 ,$$

$$\frac{cn\,u\,dn\,u}{sn\,u} \doteqdot \frac{\left(1-\frac{u^2}{2}+\frac{1+4k^2}{4!}u^4\right)\left(1-\frac{k^2}{2}u^2+k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!}\right)}{u\left(1-\frac{1+k^2}{6}u^2+(1+14k^2+k^4)\frac{u^4}{5!}\right)}$$

$$\doteqdot \frac{1}{u}\left(1 - au^2 - cu^4\right) \quad , \cdots (37)$$

$$a = \frac{1+k^2}{3}, \quad C = \frac{1}{45}\left(1-16k^2+k^4\right),$$

$$\therefore \frac{iz}{\beta} = \frac{1}{u}\left[1 + \left(a - \frac{E'}{K'}\right)u^2 - \left(c+\frac{k^2}{3}\right)u^4\right] \quad , \cdots (38)$$

昭和　　年　　月　　日

$$\therefore\quad u = \frac{\beta}{iz}\left[1 + \left(a-\frac{E'}{K'}\right)\frac{\beta^2}{z^2}\left\{1+\left(a-\frac{E'}{K'}\right)\frac{\beta^2}{z^2}\right\}^2 - \left(c+\frac{k^2}{3}\right)\frac{\beta^4}{z^4}\right]$$

$$= \frac{\beta}{iz}\left[1 + \underbrace{\left(a-\frac{E'}{K'}\right)}_{e}\frac{\beta^2}{z^2} + \underbrace{\left\{2\left(a-\frac{E'}{K'}\right)^2 - \left(c+\frac{k^2}{3}\right)\right\}}_{d}\frac{\beta^4}{z^4}\right], \quad (39)$$

$$u^2 \fallingdotseq -\frac{\beta^2}{z^2}\left(1 + e\frac{\beta^2}{z^2} + d\frac{\beta^4}{z^4}\right)^2 = -\frac{\beta^2}{z^2}\left[1 + \frac{2e}{z^2}\beta^2 + (2d+e^2)\frac{\beta^4}{z^4}\right]$$

$$\frac{1}{u^2} \fallingdotseq \frac{-z^2}{\beta^2}\left[1 - \frac{2e}{z^2}\beta^2 - (2d+e^2)\frac{\beta^4}{z^4} + \frac{\beta^4}{z^4}(4e^2)\right]$$

$$= -\frac{z^2}{\beta^2}\left[1 - \frac{2e}{z^2}\beta^2 + (3e^2-2d)\frac{\beta^4}{z^4}\right].$$

$\therefore$ (35) は

$$w^2 = -z^2 + 2e\beta^2 - (3e^2-2d)\frac{\beta^4}{z^2} + a\beta^2 - \frac{b\beta^4}{z^2}$$

$$= -z^2 + (2e+a)\beta^2 - (3e^2-2d+b)\frac{\beta^4}{z^2} + \cdots \quad (40)$$

$H(z)$ が (34) の展開を持つためには (33) の C は、

$$C = -\frac{1}{h}, \quad \cdots \quad (41)$$

よって (34) の A は

$$A = \frac{\beta^4}{h}(3e^2+b-2d)$$

$$= \frac{\beta^4}{h}\left[3\left(\frac{1+k^2}{3}-\frac{E'}{K'}\right)^2 + \frac{1-k^2+k^4}{15} - 2\left\{2\left(\frac{1+k^2}{3}-\frac{E'}{K'}\right)^2 - \left(\frac{1-k^2+k^4}{45}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{\beta^4}{h}\left[-\left(\frac{1+k^2}{3}-\frac{E'}{K'}\right)^2 + \frac{1-k^2+k^4}{9}\right], \quad \cdots \quad (42)$$

$\therefore$ (28) より

$$C_m = \frac{4\beta^4}{b^2h^2}\left[+\frac{2}{3}\frac{E'}{K'}(1+k^2) - \frac{k^2}{3}\right],$$

$-1 \; k^2 \; k'$

(6), (7) によって

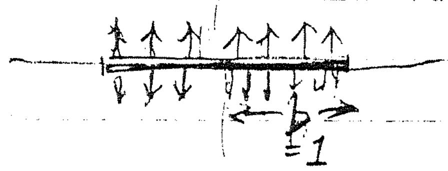
$$C_m = \frac{8E'\beta^4}{3b^2K'k^2}\left[1 + k^2 - \frac{k^2}{2}\frac{K'}{E'}\right]$$

$$= \frac{8E'\beta^3}{3\pi b^2 k}\left[1 + k^2\left(1 - \frac{K'}{2E'}\right)\right]$$

$$\fallingdotseq \frac{4}{3\pi}\left(\frac{2b}{h}\right)\times\left(\frac{\beta}{b}\right)^3, \quad \cdots\cdots (43)$$

を得る。

iv) $K\ell\omega^2/g \to 0$ の時 水面に浮かぶ平板の場合は次の通りである。



$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} \log(x-x')\,dx' \;, \quad (46)$$

$$\phi(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}\log|x-x'|\,dx'$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x'\log(x-x')\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{x'\,dx'}{x-x'}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\log(1-x^2) - 2 - x\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(1-x)\log(1-x) + (1+x)\log(1+x) - 2\right], \quad (47)$$

又 $$\int_0^2 y\log y\,dy = \frac{y^2}{2}\log y\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 y\,dy = 2\log 2 - \frac{4}{4}$$

従って、

$$\int_{-1}^{1}\phi\,dx = \frac{1}{\pi}\left[4\log 2 - 2 - 4\right] = \frac{2}{\pi}\left[2\log 2 - 3\right], \quad (48)$$

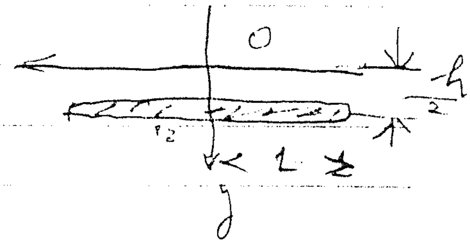
となりこの場合有限で

$$(C_m) = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}b^2}\int_{-1}^{1}\phi\,dx = \frac{4}{\pi^2}\left[\overset{1.6137}{\overline{3-2\log 2}}\right] = .654 \;, \quad --(49)$$

しかし一般にはこの場合 C_m は無限大と考えられる。
(無限遠で対数的に大きくなるので)

v) 浅水平板 ($\omega^2/g \to 0$)

速度ポテンシャルは (23), (24) であたえられる。



(24) で $h \to 0$ とすると

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \int_{-1}^{1} \frac{\sigma(\xi)\,d\xi}{(z-\xi)^2}, \\ \sigma(\xi) &= h\mu(\xi), \end{aligned}\right\} \quad \cdots (50)$$

と書ける。

境界条件は $\left.\phi_y\right|_{y=\pm 0} = \pm 1$, $\cdots (51)$

となるから

$$\frac{df}{dz} = \left(\frac{d}{dz}\right)^2 \int_{-1}^{1} \frac{\sigma(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

故

$$-\left.\phi_y\right|_{\pm} = \pi \frac{d^2}{dx^2}\sigma(x), \quad \cdots (52)$$

(51) によって

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\sigma(x) &= \frac{\mp 1}{\pi}, \\ \sigma &= \frac{1}{\pi}\left(\mp\frac{x^2}{2} + C\right), \end{aligned}\right\} \quad \cdots (53)$$

Cは任意定数である。

しかし板の端で有限である事は好ましくないので $C = \pm\frac{1}{2}$ とおくと

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\pm 1}{2\pi}(1-x^2), \\ \text{従って}\quad \mu &= \frac{\pm 1}{2\pi h}(1-x^2), \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

を得る。

(54) から明らかに

$$A = \int_{-1}^{1} \sigma\,dx = \frac{2}{3\pi}, \quad (55)$$

よつて (28) より

$$C_m = \frac{8}{3\pi}\left(\frac{b}{h}\right) = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{2b}{h}\right), \quad (56)$$

となり (43) の極限に一致する。

この時 ポテンシャルは

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\log(z-\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\log(z^2-1), \quad (57)$$

となつて (46) 式の水面平板のポテンシャル (第1項) に 右辺第2項の板の両端に sink を加えたものになる。

この sink の意味は明らかで、即ち板と水面の間にある水の出入りに基づくものである。

vi) 浅水弯形 ($\omega^2/g \neq 0$)
前項と同じ手法で考えよう。

$$\phi(x,y) = \int_{-1}^{1} \mu(x')\,dx' \frac{\partial}{\partial y'} S(x,y;x',y'=\tfrac{1}{2}h) \qquad \cdots\cdots (60)$$

$$S(x,y;x',y') = \frac{1}{2\pi} \log\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}\cos k(x-x')}{k-K+\mu i}\,dk,$$

$$r_1 = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} S = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{y-y'}{r_1^2} - \frac{y+y'}{r_2^2}\right\} + \frac{K}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}\cos k(x-x')}{k-K+\mu i}\,dk, \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} S = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{(x-x')^2-(y-y')^2}{r_1^4} - \frac{(x-x')^2-(y+y')^2}{r_2^4}\right\} + \frac{K}{\pi}\frac{(y+y')}{r_2^2}$$
$$+ \frac{K^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}\cos k(x-x')}{k-K+\mu i}\,dk,$$

$$\doteqdot \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\log\frac{r_2}{r_1}\right\} + \frac{K}{\pi}\left(\frac{y+y'}{r_2^2}\right) + \frac{K^2}{\pi}\int_0^\infty (\quad \text{''} \quad)\,dk,$$

$$\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{1}{2}\log\left\{\frac{1+\frac{(y+y')^2}{(x-x')^2}}{1+\frac{(y-y')^2}{(x-x')^2}}\right\} \doteqdot \frac{1}{2}\left\{\frac{(y+y')^2-(y-y')^2}{(x-x')^2}\right\} = \frac{yy'}{(x-x')^2},$$

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1} \frac{\mu(x')y\,dx'}{(x-x')^2} = \pi\mu(x),$$

$$\lim_{y+y'\to 0}\int_{-1}^{1} \frac{\mu(x')(y+y')\,dx'}{(x-x')^2} = \pi\mu(x),$$

$$\therefore\ \phi_y(x,0) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma(x) + \frac{K}{h}\sigma(x) + \frac{K^2}{\pi h}\int_{-1}^{1}\sigma(x')\,dx'\int_0^\infty \frac{\cos k(x-x')}{k-K}\,dk \qquad (62)$$

但し $\sigma(x) = h\mu(x) \qquad \cdots\cdots (63)$

附加质量は(16)で与えられるから(60)によって、

$$\frac{m}{\rho} = -\oint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -\int_{-1}^{1} \mu(x)\, dx$$

$$C_m = \frac{m}{\frac{\pi}{2}\rho b^2} = -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \mu(x)\, dx = \frac{2}{\pi k}\int_{-1}^{1} \sigma(x)\, dx, \quad \cdots (64)$$

for heave

で与えられる。

さて(62)の微積分方程式は K/k の値によって次の場合が考えられる。

a) $K \to 0$, $K/k \to 0$.

この場合は

$$\phi_y(x,0) = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\sigma(x), \quad \cdots (65)$$

で前項の場合である。

従って $K=0$ では前項の場合に一致する。

b) $K \to 0$, $K/k = O(1)$

この時は(62)右辺の第3項を省略すると heaving に対しては第1近似は

$$1 = \frac{1}{4}\frac{d^2\sigma}{dx^2} + \frac{K}{k}\sigma(x), \quad \cdots (66)$$

となるから

$$\sigma(x) = \frac{k}{K} + C\cos\left(2\sqrt{\tfrac{K}{k}}\,x\right), \quad C:\text{定数}, \quad (67)$$

となり、(a)とは大分形が変って来、K/k が大きい時は複雑になると予想される。

c) 最後に $K \to 0$, $K/k \gg 1$ とすると右辺第1項を無視して、

$$\phi_y(x,0) = \frac{K}{k}\sigma(x) + \frac{K^2}{\pi k}\int_{-1}^{1}\sigma(x')\,dx'\int_{0}^{\infty}\frac{\cos k(x-x')}{k-K+i\mu}\,dk, \quad (68)$$

となつて これは水面に浮んだ平板と同じになり，$\sigma(x)$ は圧力分布となる。
heaving に対する才1近似は

$$\sigma(x) = \frac{k}{K} , \qquad (69)$$

であつて，才2近似は

$$\sigma(x) = C\frac{k}{K} , \qquad (70)$$

とおき(68)に代入して両辺を x で積分すると，

$$2 = 2C + \frac{4KC}{\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{k-K+\mu i}\left(\frac{\sin k}{k}\right)^2 ,$$

あるいは

$$\frac{1}{C} = 1 + \frac{K}{2}\left[C_{0,0} - \pi i\, 4\frac{\sin^2 K}{K^2}\right] , \qquad (71)$$

$$C_{0,0} = \mathrm{P.V.}\ \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin k}{k}\right)^2}{k-K}\, dk , \qquad (72)$$

$$C_{0,0} \underset{K\to 0}{\doteqdot} \frac{1}{K}\left[\frac{2}{\pi}K\log\left(\frac{1}{2\gamma K}\right) + \frac{3}{\pi}K - \frac{2}{3}K^2\right] , \qquad (73)$$

$$\therefore\ \frac{1}{C} \underset{K\to 0}{\doteqdot} 1 + \frac{1}{\pi}K\log\left(\frac{1}{2\gamma K}\right) + \frac{3}{2\pi}K - i2K , \qquad (74)$$

よつて

$$\left(= \frac{2}{\pi K}C \times \frac{2}{\pi}\times 2 = \frac{4}{\pi K}C\right)$$

$$C_m = \frac{4}{\pi K}\Big/\left[1 + \frac{K}{2}C_{0,0} - 2i\frac{\sin^2 K}{K}\right] ,$$

$$\doteqdot \frac{4}{\pi K}\Big/\left[1 + \frac{1}{\pi}K\log\left(\frac{1}{2\gamma K}\right) + \frac{3}{2\pi}K - 2iK\right] , \qquad (75)$$

となり $K \to 0$ で C_m は $O(1/K)$ で大きくなる。
一方水面につい~~た~~平板では(16)の積分は平板の下面だけについて行われるべきであるから

$$\frac{m}{\rho} = \int_{-1}^{1}\phi\, dx \qquad (76)$$

$$\overline{C_m} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi\,dx = \frac{2}{\pi}C\left[C_{0,0} - i4\frac{\sin^2 K}{K}\right],$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[C_{0,0} - 4i\frac{\sin^2 K}{K}\right] \Big/ \left[1 + \frac{K}{2}C_{0,0} - 2i\frac{\sin^2 K}{K}\right], \quad (77)$$

$$\underset{K\to 0}{\doteqdot} \frac{2}{\pi}\,\frac{\left[\frac{2}{\pi}\log\left(\frac{1}{2\gamma K}\right) + \frac{3}{\pi} - \frac{2}{3}i - 4i\cancel{K}\right]}{\left[1 + \frac{K}{\pi}\log\left(\frac{1}{2\gamma K}\right) + \frac{3}{2\pi}K - 2iK\right]}, \quad (78)$$

又(75)との関係は

$$\overline{C_m} = \frac{4}{\pi K}C\left(\frac{1}{C} - 1\right) = \frac{4}{\pi K} - \frac{4C}{\pi K} = \frac{4}{\pi K} + C_m,$$

or

$$\underset{K\to 0}{C_m = } -\frac{4}{\pi K} + \overline{C_m}, \quad (79)$$

$\overline{C_m}$ はよく知られているように(78)から $K\to 0$ で対数的に大きくなる。

(79)の式の $-4/\pi K$ は静水圧の変化分に対応するもので浮体では復原力である。

(75)から

$$C_m \xrightarrow[K\to 0]{} -\frac{4}{\pi K} \quad (80)$$

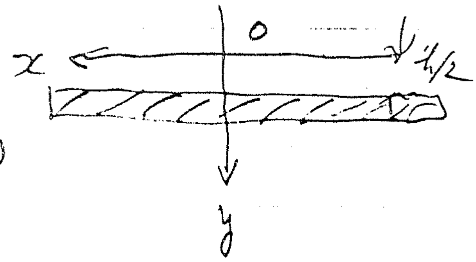
であるから没水体では復元力に相当するものが付加質量として浮体の働らく事になっている。

(勿論附加質量と復原力では位相は180°違う)

従って C_m は $|\frac{2}{\pi}K > n$ の時は大きい負値をとる。

この辺の事情を理解する為に水面と板にはさまれた部分の水の運動を考えよう。

板が左右に無限に長いとすると水面条件は、



$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,0)+K\phi(x,0)=0, \quad \cdots(81)$$

板の上端では

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,0)=1,$$

であるが、この2条件を満足し水の中で正則なϕはすぐ求まって

$$\phi(x,y)=y-\frac{1}{K}, \quad \cdots(82)$$

である。

そうすると水の中で

$$\left.\begin{aligned}\phi_y(x,y)&=1\\ \phi_x(x,y)&=0\end{aligned}\right\} \quad \cdots(83)$$

となるから この水の層は板と一緒に上下に動いているだけである。つまり容器に入っている水と全く同じになっている。

板面に働く圧力pは、(振幅を1として)

$$p=-\rho\omega^2\phi(x,\tfrac{h}{2})=\rho g\left[1-\frac{Kh}{2}\right], \quad \cdots(84)$$

となって右辺第1項は静水圧、第2項は水の層の慣性力である。

従って$Kh\to 0$となる時は この静水圧による部分が負の値となって大きい貢献をする事になる。

これが(80)式に一致する事は明らかであろう。