昭和49年2月13日

2次元平板の動揺問題における逆流れ，逆時間流れについて

別所正利

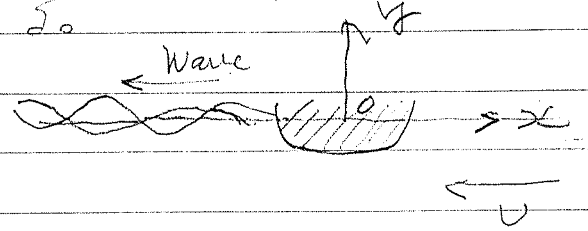
内容

前進しながら動揺する問題は複雑であり、種々の難問があるのでここでは圧力分布で表わされる浅喫水船の2次元問題を考えよう。

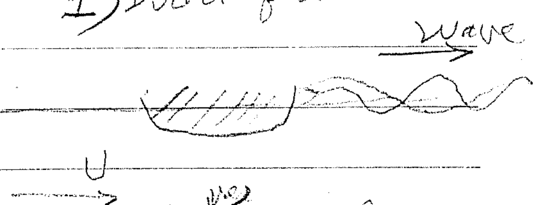
前節と同じようにこの場合もReverse flowとTime reversed flowを考える。

今簡単の為に

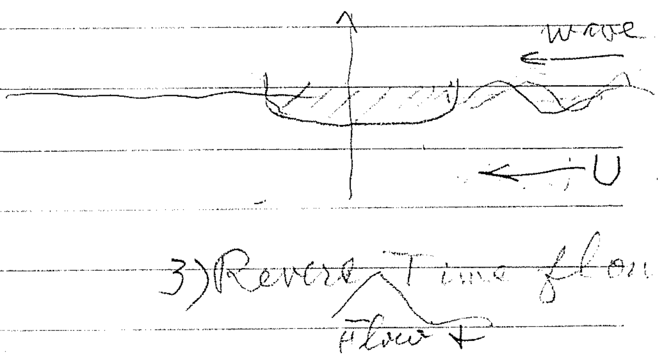
$$\alpha = \frac{\omega_e}{U} > \frac{\nu}{4} = \frac{g}{4U^2},$$



とするとDirect flowでは後流に2つの波が出て行く。Reverse flowでは2)図のようになり、その逆時間では3)のようになる。

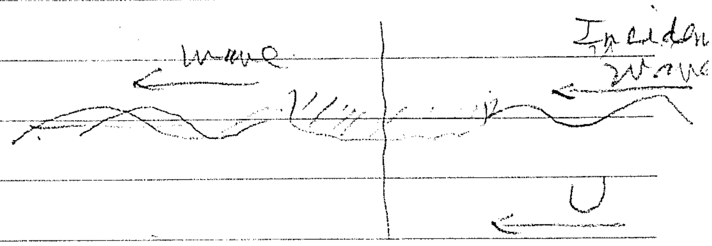


従って例えば逆時間逆方向流れでどちらか一つの波が消えるように入射波とその散乱波を加えると4)のように上流側には一つの入射波がある流れがえられる。



特別な場合としてReverse flowで下流に出て行く波の一つがない場合は、その逆時間流れ4)の下流には波がない事になる。

これは波吸収問題の解である。



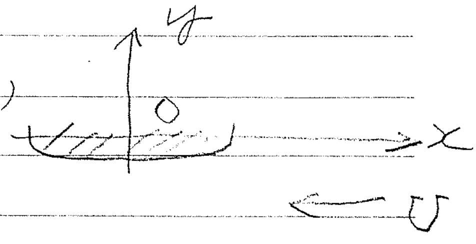
4) Incident wave and Radiating wave

昭和　年　月　日

を Direct flow の速度ポテンシャルを $\varphi(x,y)e^{i\omega t}$, 圧力分布を $P(x)e^{i\omega t}$, 水面変位を $\zeta(x)e^{i\omega t}$ とし, Reverse flow には (~) 印をつけるものとする。
それぞれの逆時間ポテンシャルはその複素共役値であるから (−) 印で示すものとする。

水面条件は

$$\frac{1}{\rho}p(x) = \left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,0) - g\zeta(x), \quad (1)$$



$$\varphi_y(x,0) = -\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta(x), \quad (2)$$

$\alpha = \omega/U > \frac{\gamma}{4} = g/4U^2$ なる時, この ω に対する入射波は二つあって波長の大きい方は向波, 小さい方は追波であるがその波速は U より小さいのでこの座標系では後流の方に進んでいる事になる。

夫々のポテンシャルは振幅を 1 とすると

$$\phi_0(x,y) = \frac{g}{i\omega_0}e^{Ky+iKx}, \quad K = \omega_0^2/g, \quad (3)$$

$$\phi_0'(x,y) = i\frac{g}{\omega_0'}e^{K'y+iK'x}, \quad K' = \alpha^2/K = \frac{\omega_0'^2}{g}, \quad (4)$$

$$\omega = \omega_0^2 U/g + \omega_0, \quad \cdots \quad (5)$$

そうすると

$$\zeta_0(x) = \frac{1}{g}\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_0(x,0) = e^{iKx},$$

$$\zeta_0'(x) = \frac{1}{g}\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_0'(x,0) = e^{iK'x}, \quad (6)$$

と書く事にしよう。

速度ポテンシャルは

$$\varphi_j(x,y) = \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1} p_j(x')S(x-x',y)\,dx', \quad \cdots (7)$$

$\omega_0'\omega_0 = g\alpha$, ∵ $K' = \omega_0'^2/g = \alpha^2/K = \frac{g\alpha^2}{\omega_0^2}$

$\omega - K'U = \omega\left(1 - \frac{\omega}{KU}\right) = -\frac{\alpha}{K}\omega_0 = -\frac{g\alpha}{\omega_0} = -\omega_0'$

$$S(x,y)=\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty\left[\frac{k-\alpha}{A(k)}e^{ikx}-\frac{k+\alpha}{B(k)}e^{-ikx}\right]e^{ky}dk, \quad (7')$$

$$A(k)=(k-\alpha)^2+i\mu(k-\alpha)-\gamma k,$$

$$B(k)=(k+\alpha)^2-i\mu(k+\alpha)-\gamma k,$$

と書け，又境界条件の積分方程式は

$$\eta(x)=-\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1}p(x')S_2(x-x',0)\,dx', \quad (8)$$

$$S_2(x,y)=\frac{\gamma}{2\pi}\int_0^\infty\left[\frac{e^{ikx}}{A(k)}+\frac{e^{-ikx}}{B(k)}\right]k\,e^{ky}dk.$$

となる。

無限後流では（$\alpha>\frac{\gamma}{4}$ の場合）

$$\varphi_j(x,y)\xrightarrow[x\ll 0]{}\frac{1}{K+\alpha}\left[K H_j(-K)e^{Ky+iKx}+\alpha H_j(-K')e^{K'y+iK'x}\right], \quad (9)$$

$$H_j(k)=\frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1}p_j(x)e^{ikx}dx, \quad (10)$$

境界条件は

$$\eta_1(x)=1\cdot h, \quad \text{for heaving}$$

$$\eta_2(x)=x\cdot\theta, \quad \text{for pitching} \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}\eta_d(x)&=-e^{iKx}\\ \eta'_d(x)&=-e^{iK'x}\end{aligned}\right\}\ \text{for diffraction}$$

夫々に対するポテンシャル，圧力を

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_d,\ \varphi'_d,\quad p_1,\ p_2,\ p_d,\ p'_d$$

とおく。

昭和　　年　　月　　日

以下では、また単位振幅の運動によるポテンシャルを φ_j, p_j と表わし、散乱波については φ_0, φ_0' に対応するものを φ_d, φ_d' と表わす事にしよう。

Reverse flow については

$$\frac{1}{\rho}\tilde{p}(x) = \left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\varphi}(x,0) - g\tilde{\eta}(x), \quad (12)$$

$$\tilde{\varphi}_y(x,0) = -\left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\eta}(x), \quad (13)$$

入射波は種々の条件の為

$$\tilde{\eta}_0(x) = \overline{\eta_0(x)} = e^{-ikx}, \quad \tilde{\eta}_0'(x) = \overline{\eta_0'(x)} = e^{-ik'x}, \quad (14)$$

と定義すると (12) より

$$\tilde{\varphi}_0(x,y) = \frac{g}{i\omega_0} e^{ky-ikx}, \quad \tilde{\varphi}_0' = \frac{ig}{\omega_0'} e^{ky-ik'x}, \quad (15)$$

$$\tilde{\varphi}_j(x,y) = \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1} \tilde{p}_j(x')\tilde{S}(x-x',y)\,dx', \quad (16)$$

$$\tilde{S}(x,y) = S(-x,y), \quad (17)$$

$$\tilde{\eta}(x) = +\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} \tilde{p}(x')\tilde{S}_2(x-x',0)\,dx', \quad (18)$$

$$\tilde{S}_2(x,y) = S_2(-x,y), \quad (19)$$

無限後流では、

$$\tilde{\varphi}_j(x,y) \xrightarrow[x \gg 0]{} \frac{1}{k+\alpha}\left[k\tilde{H}_j(k)e^{ky-ikx} + \alpha\tilde{H}_j(k')e^{ky-ik'x}\right], \quad (20)$$

$$\tilde{H}_j(k) = \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1}\tilde{p}_j(x')e^{ikx}\,dx, \quad (21)$$

境界条件としては

$$\tilde{\eta}(x) = \eta(x), \quad \text{---- (22)}$$

とすべきであろうから，特に前後対称ならば即ち

$$\tilde{\eta}(x) = \eta(-x) = \eta(x), \quad \text{---- (23)}$$

ならば(8)と(18)を較べて(19)を使うと

$$\tilde{p}(x) = p(-x) \quad \text{---- (23')}$$

これを(16)に代入して(17)を考えて(7)と較べれば

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(-x, y), \quad \text{---- (23'')}$$

コッチン関数については(21)に(23')を代入すると

$$\tilde{H}(k) = H(-k), \quad (23''')$$

同様に前後反対称ならば

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\eta}(x) &= \eta(x) = -\eta(-x), \\ \tilde{p}(x) &= -p(-x), \\ \tilde{\varphi}(x, y) &= -\varphi(-x, y), \\ \tilde{H}(k) &= -H(-k), \end{aligned}\right\} (24)$$

散乱ポテンシャルについては境界条件(11)から対称成分と反対称成分にわけて

$$\left.\begin{aligned} \eta_d(x) &= -e^{ikx} = -\cos kx - i \sin kx = \eta_{dc}(x) - i\eta_{ds}(x), \\ \phi_d(xy) &= \phi_{dc}(xy) + i\phi_{ds}(xy) \end{aligned}\right\} (25)$$

とおき ϕ_{dc}, ϕ_{ds} の境界条件は夫々 η_{dc}, η_{ds} とおこう。

これに対応して Reverse flow では

昭和　年　月　日

$$\tilde{\eta}_d(x) = -e^{-ikx} = -\eta_{dc}(x) + i\eta_{ds}(x),$$
$$\tilde{\varphi}_d(x,y) = \tilde{\varphi}_{dc}(x,y) - i\tilde{\varphi}_{ds}(x,y) \quad \Bigg\} \cdots (26)$$

となるが対称性から

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{dc}(-x,y) &= \varphi_{dc}(x,y)\\ \tilde{\varphi}_{ds}(-x,y) &= -\varphi_{ds}(x,y)\end{aligned}\right\} \cdots (27)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{p}_{dc}(-x) &= p_{dc}(x)\\ \tilde{p}_{ds}(-x) &= -p_{ds}(x)\end{aligned}\right\} \cdots (28)$$

同様にして

$$\left.\begin{aligned}\tilde{p}'_{dc}(x) &= p'_{dc}(-x),\\ \tilde{p}'_{ds}(x) &= -p'_{ds}(-x),\end{aligned}\right\} \cdots (29)$$

又

$$\tilde{H}_d(k) = \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1}\tilde{p}_d(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{\rho U}\int\{\tilde{p}_{dc}(x) - i\tilde{p}_{ds}(x)\}e^{ikx}dx$$

$$= \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1}\{\tilde{p}_{dc}(-x) - i\tilde{p}_{ds}(-x)\}e^{-ikx}dx$$

$$= \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1}\{p_{dc}(x) + ip_{ds}(x)\}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1}p_d(x)e^{-ikx}dx$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{H}_d(k) &= H_d(-k) , \\ \tilde{H}'_d(k) &= H'_d(-k) . \end{aligned}\right\} \cdots (30)$$

これらの関係を使って最初にのべた事柄を記述して見よう。

Reverse flow の速度ポテンシャルは x の正方向にのみ波があり (20) から (15) を使って

$$\overline{\tilde{\varphi}_j}(x, y) \xrightarrow[x \gg 0]{} \frac{1}{K+\alpha}\left[K\overline{\tilde{H}_j}(K) e^{Ky+iKx} + \alpha \tilde{H}'_j(K') e^{K'y+iK'x}\right], \cdots (31)$$

これとDirect flowと較べて見よう。

Direct flow では x の負方向に (9) のような波がある。これは (31) と同じ波長の同じ方向に進む波である。

そこで φ_j の境界条件 (11) を振幅で割ったものを又 Φ_j とすると、それに対応する境界条件は (11) から

$$\overline{\tilde{\eta}_j}(x) = \eta_j(x) , \cdots (32)$$

又 (12) と (13) より

$$\left.\begin{aligned} \Phi_y(x, 0) &= -(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\eta(x) \\ \overline{\tilde{\Phi}}_y(x, 0) &= (i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\overline{\tilde{\eta}}(x) \end{aligned}\right\} \cdots (33)$$

故

$$\Phi_j(x, y) + \overline{\tilde{\Phi}_j}(x, y) = \frac{(1/g)}{K+\alpha}\left[\omega_0 \overline{\tilde{H}_j}(K)\{\phi_0 + \phi_d\} - \omega'_0 \alpha \tilde{H}'_j(K')\{\phi'_0 + \phi'_d\}\right]$$

なるポテンシャルを考えると、x の正方向には (31) によって波は全く後方にのみ波を有し、(32)(33) によって境界条件は 0 となる。

従ってこの境界値問題が唯一の解を有するとすれば

$$\Phi_j(x, y) + \overline{\tilde{\Phi}_j}(x, y) = \frac{(1/g)}{K+\alpha}\left[\omega_0 K \overline{\tilde{H}_j}(K)\{\phi_0 + \phi_d\} - \omega'_0 \alpha \tilde{H}'_j(K')\{\phi'_0 + \phi'_d\}\right], \cdots (34)$$

これが求むる関係である。

圧力については (1), (12) より

$$(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\phi(x,0) = g\eta(x) + \frac{1}{\rho}p(x)$$

$$(i\omega + U\tfrac{\partial}{\partial x})\tilde{\phi}(x,0) = g\tilde{\eta}(x) + \frac{1}{\rho}\tilde{p}(x)$$

$$(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\overline{\tilde{\phi}}(x,0) = -g\overline{\tilde{\eta}}(x) - \frac{1}{\rho}\overline{\tilde{p}}(x),$$

$$(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\begin{bmatrix}\phi_0 + \phi_d \\ \phi_0' + \phi_d'\end{bmatrix}_{y=0} = \frac{1}{\rho}\begin{Bmatrix}p_d(x) \\ p_d'(x)\end{Bmatrix}$$

となるから (33) より

$$p_g(x) - \overline{\tilde{p}}_g(x) = \frac{(\gamma/g)}{K+\alpha}\left[K\hat{\tilde{H}}_g(K)p_d(x) - \alpha\hat{\tilde{H}}_g(K')p_d'(x)\right], \quad (35)$$

前で(34)を導くに当って(33)の条件を使ったが

$$\phi_y(x,0) = 0, \quad \eta(x) = Ae^{i\omega x/U} \quad (36)$$

の解φは明らかに恒等的に0とはならないので
一般にはこの斉次解だけ不定である。
(この斉次解はKuttaの条件を満たすように決められるものである)
しかしηに関する境界条件(8)および(18)は唯一の解を持つと思われるのでηを下半面に接続して
η(x,y)のような関数を考えそれについて$[\eta(x,y) - \bar{\eta}(x,y)]$
なる関数について同様な討論を展開すれば
(34)(35)は唯一の解と考えられる。

$$\left[\ \eta(x,y) = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p(x')S_2(x-x';y)\,dx', \quad (37)\ \right]$$

$$\alpha\omega_0' = \alpha^2\sqrt{\frac{g}{K}} = \frac{\alpha^2}{K}\sqrt{gK} = K'\omega_0$$

(34)あるいは(35)から積分定理(附録A)を導くのは容易である。

さて、ϕ_1, ϕ_2なる二つのポテンシャルが共に(34)の形に表わされるとし、A, Bを次の関係を満たす任意の定数とすると

$$A\tilde{\bar{H}}_1(K') + B\tilde{\bar{H}}_2(K') = 0, \quad \cdots (38)$$

(34)から

$$\Phi(x,y) = -\left\{A\tilde{\bar{\phi}}_1(x,y) + B\tilde{\bar{\phi}}_2(x,y)\right\}$$

$$= A\phi_1(x,y) + B\phi_2(x,y) - \frac{iK}{U(K'-K)}\, C(K)\left\{\phi_0(x,y) + \phi_d(x,y)\right\}, \quad \cdots (39)$$

$$C(K) = A\tilde{\bar{H}}_1(K) + B\tilde{\bar{H}}_2(K), \quad \cdots (40)$$

となるからΦは入射波(波数K)と radiation pot. P_1, P_2とから成る。

しかもΦはϕ_1, ϕ_2の reverse flow pot. で表わされる故左方には波がない、つまり船によって入射波は吸収されている。

入射波が単位振幅である為には(40)によって

$$A\tilde{\bar{H}}_1(K) + B\tilde{\bar{H}}_2(K) = \frac{iU(K'-K)}{K}, \quad \cdots (41)$$

この式と(38)からA, Bが定まる。

又Φの境界値$\eta(x)$は(39)より、ϕ_1, ϕ_2のそれをη_1, η_2とすると

$$\eta(x) = A\eta_1(x) + B\eta_2(x), \quad \cdots (42)$$

圧力は

$$p(x) = Ap_1(x) + Bp_2(x) + p_d(x), \quad \cdots (43)$$

$$\cancel{H(k)=\frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1}p(x)e^{ikx}dx=AH_1(k)+BH_2(k)+H_d(k)}\;,\cdots(44)$$

今 $\eta_1(x)$; even, $\eta_2(x)$; odd とし A. p.10′~10″ の関係式を使うと

$$\frac{H(-k)}{U(k'-k)}=x+a,\quad \frac{H(-k')}{U(k'-k)}=y+c$$

とおいて

$$\left.\begin{aligned}x+a&=\frac{i}{k}\\ y+c&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(45)$$

を得，確かに後流側に波のない事がわかる。

板がY方向になす仕事の平均値は

$$\overline{D}=\frac{i\omega}{4}\int_{-1}^{1}(p\overline{\eta}-\overline{p}\eta)dx\quad,\cdots(46)$$

であるから

$$p\overline{\eta}-\overline{p}\eta=p(\overline{\eta+\eta_d})-\overline{p}(\eta+\eta_d)+p\overline{\eta_0}-\overline{p}\eta_0$$

$$\eta_0=e^{ikx}$$

となり積分定理より　$\rho\omega U(k'-k)$

$$\frac{i}{\rho}\int_{-1}^{1}(p_i\overline{\eta_i}-\overline{p_i}\eta_j)dx=\frac{1}{k'-k}\left[k\overline{H_i(-k)}H_j(-k)-k'\overline{H_i(-k')}H_j(-k')\right]$$

であり p に対応する η は $(\eta+\eta_d)$ であるから

$$\overline{D}=\frac{\rho\omega}{4}U^2\frac{(k'-k)}{k}+\frac{i\rho U\omega}{4}\left\{H(-k)-\overline{H(-k)}\right\}$$

$$=-\frac{\rho\omega}{4}U^2\left(\frac{k'-k}{k}\right)\quad,\cdots\cdots(47)$$

全仕事は

$$\overline{W}=\frac{i}{4}\int_{-1}^{1}(p\overline{\phi_y}-\overline{p}\phi_y)dx$$

で与えられるが やはり

昭和　　年　　月　　日

$$\cancel{p\bar{\Phi}_y+\bar{p}\phi_y=p(\bar{\Phi}_y+\bar{\Phi}_{dy})+\bar{p}(\phi_y+\phi_{dy})+(p\bar{\Phi}_{oy}+\bar{p}\phi_{oy})}$$

$$\cancel{\phi_{oy}\Big|_{y=0}=\frac{\omega_0}{i}e^{ikx}}$$

$$\cancel{\int_{-1}^{1}(p_j\bar{\Phi}_{iy}+\bar{p}_i\phi_{jy})dx=\frac{\rho U}{\alpha+K}\left[K^2\bar{H}_i(-K)H_j(-K)+\alpha K'\bar{H}_i(-K')H_j(-K')\right]}$$

$$\cancel{+\frac{\pi}{2\rho U}\left[\delta_i\bar{\delta}_j-\sigma_i\bar{\sigma}_j\right]}$$

$$\therefore \bar{W}=\frac{\rho U^3}{4}\frac{(K'-K)^2}{\alpha+K}+\frac{\pi}{8\rho U}\left[\delta\bar{\delta}-\sigma\bar{\sigma}\right]+\frac{i}{4}\omega_0 U\left\{H(-K)-\bar{H}(-K)\right\}$$

$$=-\frac{\rho U^2}{4}\omega_0\left(\frac{K'-K}{K}\right)+\frac{\pi}{8\rho U}\left[\delta\bar{\delta}-\sigma\bar{\sigma}\right],\quad\cdots(48)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=A\sigma_1+B\sigma_2+\sigma_d\\ \delta&=A\delta_1+B\delta_2+\delta_d\end{aligned}\right\}\quad\cdots(49)$$

一方　$\bar{W}=\bar{D}+U\bar{R}$　として推進増力に$\bar{R}$を考えると

$$\bar{R}=+\frac{\rho U^2}{4}(K'-K)+\frac{\pi}{8\rho U^2}\left[\delta\bar{\delta}-\sigma\bar{\sigma}\right],\quad(50)$$

となる。

$\bar{R}$は又

$$\bar{R}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(p\bar{\eta}_x+\bar{p}\eta_x)dx,\quad\cdots(51)$$

によって計算する事も出来るがいづれにしてもこれ以上簡単な表現は問題を解かないと得られそうもない。

さて(48)の右辺第1項は

$$\bar{W}_0=-\frac{\rho U^2}{4}\omega_0\frac{K'-K}{K}=-\frac{\rho g}{2}\left(U+\frac{c}{2}\right),\quad\cdots(52)$$

となりこれは単位振幅の入射波が単位時間に搬入する全エネルギーである。

従って得られる仕事は入射波のエネルギーから飛沫による損失を差引いたものと考えられる。

次に(47)は

$$\overline{D} = -\frac{\rho}{4}\omega U^2\left(\frac{K'-K}{K}\right) = -\frac{\rho g}{2}\frac{\omega}{\omega_0}\left(U+\frac{c}{2}\right)$$

$$= \frac{\omega'}{\omega_0}\overline{W_0} = \left(\frac{\omega_0 U}{g}+1\right)\overline{W_0}, \quad \cdots (53)$$

となり上下方向の仕事は入射波のエネルギーより大きい。

従って $\overline{W} = \overline{D} + \overline{R}U$ であるから $\overline{R}$ は正となると考えられる。

(50)の右辺第1項は

$$\overline{R_0} = \frac{\rho U^2}{4}(K'-K) = \frac{\rho\omega_0}{2}\left(U+\frac{c}{2}\right), \quad \cdots (54)$$

となり

$$\overline{W_0} = \overline{D} + \overline{R_0}U, \quad \cdots (55)$$

で又

$$-\frac{\overline{R_0}U}{\overline{D}} = \frac{\omega_0^2 U}{g\omega} = \frac{K'}{\alpha} = \frac{U}{U+c} = \frac{c'}{c}, \quad (56)$$

なる関係がある。

いづれにしても(38),(41)を満足するようなA,Bについて(42)の運動をさせるならば後流側には波はなく、上下方向の運動からは $\overline{D}$ のエネルギーが取り出せるが前後方向には(50)なる平均抵抗が残る事になる。

附録 A, 積分諸定理

1. 相反定理

昭和　年　月　日

今

$$\left.\begin{aligned} f_{ji} &= \frac{1}{pq}\int_{-1}^{1} P_j(x)\,\eta_i(x)\,dx, \qquad \eta_i(x)\,;\,\text{real},\\ &\text{とおくと}\\ f_{ji} &= \frac{1}{pq}\int_{-1}^{1} P_j(x)\,\tilde{\eta}_i(x)\,dx \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

と書けるが $\tilde{\eta}_i(x)$ に(本文 18)を代入し、(本文 19)を使って(本文 8)を考えれば

$$\frac{1}{pq}\int_{-1}^{1} P_j(x)\,\tilde{\eta}_i(x)\,dx = \frac{1}{pq}\int_{-1}^{1} \tilde{P}_i(x)\,\eta_j(x)\,dx = \frac{1}{pq}\int_{-1}^{1} \tilde{P}_i(x)\,\tilde{\eta}_j(x)\,dx$$

故に

$$\tilde{f}_{ij} = \frac{1}{pq}\int_{-1}^{1} \tilde{P}_i\,\tilde{\eta}_j\,dx, \quad \cdots\cdots (2)$$

とおくと

$$f_{ji} = \tilde{f}_{ij}, \quad \cdots\cdots (3)$$

特に $\eta_i(x) = \pm\eta_i(-x)$, $\eta_j(x) = \pm\eta_j(-x)$ ならば

$$\int_{-1}^{1} \tilde{P}_i(x)\,\eta_j(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_i(-x)\,\eta_j(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_i(x)\,\eta_j(-x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} P_i(x)\,\eta_j(x)\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}_{ij} &= f_{ij} \\ f_{ij} &= f_{ji} \end{aligned}\right\} \text{for } \eta_i, \eta_j\,;\,\text{both real, even or odd} \quad (4)$$

又 $\eta_i(x) = +\eta_i(-x)$, $\eta_j(x) = -\eta_j(-x)$ ならば

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}_{ij} &= -f_{ij} \\ f_{ji} &= -f_{ij} \end{aligned}\right\}, \text{ for } \eta_i, \eta_j\,;\,\text{both real, even and odd} \quad (5)$$

昭和　　年　　月　　日

ここに

$$e_j = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p_d(x)\,\eta_j(x)\,dx = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p_d(x)\,\tilde{\eta}_j(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} \tilde{p}_j(x)\,\eta_d(x)\,dx = -\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} \tilde{p}_j(x)\,e^{+iKx}\,dx.$$

$$\left.\begin{aligned} e_j &= -\frac{U}{g}\tilde{H}_j(K), \\ e'_j &= -\frac{U}{g}\tilde{H}_j(K') \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$e'_j = \frac{1}{\rho g}\int p'_d\,\eta_j\,dx$

同様にして

$$\tilde{e}_j = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} \tilde{p}_d(x)\,\tilde{\eta}_j(x)\,dx = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} \tilde{p}_d(x)\,\eta_j(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p_j(x)\,\tilde{\eta}_d(x)\,dx = \frac{-1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p_j(x)\,e^{-iKx}\,dx.$$

故に

$$\left.\begin{aligned} \tilde{e}_j &= -\frac{U}{g}H_j(-K), \\ \tilde{e}'_j &= -\frac{U}{g}H_j(-K'), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

一方 $\tilde{H}$ と H は（論文 23''）,（24）なる式の関係がある。

又

$$\int_{-1}^{1} p_d(x)\,\tilde{\eta}_d(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \tilde{p}_d(x)\,\eta_d(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} p'_d(x)\,\tilde{\eta}_d(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \tilde{p}_d(x)\,\eta'_d(x)\,dx$$

$\rho U H'_d(K) = \int_{-1}^{1} p'_d\,e^{iKx}\,dx$

$$\int_{-1}^{1} p_d(x)\,\tilde{\eta}'_d(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \tilde{p}'_d(x)\,\eta_d(x)\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} p'_d\,\tilde{\eta}'_d\,dx = \int_{-1}^{1} \tilde{p}'_d\,\eta'_d\,dx$$

故

$$\left.\begin{aligned} H_d(-K) &= \tilde{H}_d(K), & H'_d(-K) &= \tilde{H}_d(+K') \\ H_d(-K') &= \tilde{H}'_d(K), & H'_d(-K') &= \tilde{H}'_d(K') \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$= H'_d(-K)$

次に

$$h_{ji} = -\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p_j(x)\,\tilde{\varphi}_{iy}(x,0)\,dx = +\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p_j(x)\,\overline{\varphi_{iy}}(x,0)\,dx, \quad (9)$$

$$\tilde{\varphi}_{iy}(x,0) = -\left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\eta}_i(x)$$

$$h_{ji} = +\frac{i\omega}{\rho g}\int_{-1}^{1} p_j(x)\,\tilde{\eta}_i(x) + \frac{U}{\rho g}\int_{-1}^{1} p_j(x)\,\tilde{\eta}_{ix}(x)\,dx$$

$$= +i\omega f_{ji} + U r_{ji}, \quad \cdots (10)$$

$$r_{ji} = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p_j(x)\,\tilde{\eta}_{ix}(x)\,dx, \quad \cdots$$

$$\tilde{h}_{ji} = -\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} \tilde{p}_j\,\varphi_{iy}\,dx = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} \tilde{p}_i\,\overline{\varphi_{iy}}\,dx,$$

$$= +i\omega \tilde{f}_{ji} + U\tilde{r}_{ji}, \quad \cdots (11)$$

$$\tilde{r}_{ji} = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} \tilde{p}_j\,\eta_{ix}\,dx,$$

とおくと

$$\int_{-1}^{1} p_i \tilde{p}_j\,dx < \infty \quad \text{ならば}, \quad \cdots (12)$$

$$h_{ji} = \tilde{h}_{ij}, \quad r_{ij} = \tilde{r}_{ji}, \quad \cdots (13)$$

が成立つが(12)の条件は今の場合成立たないと考えられる。

昭和　　年　　月　　日

さて $\int_{-1}^{1} P_i \tilde{P}_j \, dx \longrightarrow \infty$ ならば

$$\phi_y(x,0) = -\frac{1}{\pi\rho U}\int_{-1}^{1}\frac{P(x')\,dx'}{x-x'} + \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1} P\,S_1(x-x',0)\,dx'$$

$$\tilde{\phi}_y = \frac{1}{\pi\rho U}\int_{-1}^{1}\frac{\tilde{P}\,dx'}{x-x'} + \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1} \tilde{P}\,\tilde{S}_1\,dx'$$

$$S_1(-x,y) = \tilde{S}_1(x,y).$$

であるから

$$\int_{-1}^{1}\left[\tilde{P}_j(x)\phi_{iy}(x,0) - P_i(x)\tilde{\phi}_{jy}(x,0)\right]dx = -\frac{\Delta}{\pi\rho U}(P_i\tilde{P}_j), \quad (14)$$

$$\Delta = \int_{-1}^{1}\tilde{P}_j(x)\,dx\left[\int_{-1}^{1}\frac{P_i(x')\,dx'}{x-x'}\right] + \int_{-1}^{1}P_i(x)\,dx\int_{-1}^{1}\frac{\tilde{P}_j(x')\,dx'}{x-x'} \quad (15)$$

主値の積分を先に実行するものとする。

とおき $P_i, \tilde{P}_j$ を次頁のように表わされるとして積分を実行すると、(15)をうる。

昭和　　年　　月　　日

$$\cancel{p_i(x) = \frac{1}{2\sin\theta}\left[\sigma_i(1+\cos\theta)+\delta_i(1-\cos\theta)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i \sin n\theta , \quad (16)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\sin\theta}\left[\sigma_i(1+\cos\theta)+\delta_i(1-\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^i\{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\}\right]}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\sin\theta}\left[(\sigma_i+\delta_i+a_1^i)+(\sigma_i-\delta_i+a_2^i)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n+1}^i - a_{n-1}^i)\cos n\theta\right]}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{p_i(x')}{x-x'}dx' = -\int_0^{\pi}\frac{p_i(-\cos\theta')}{\cos\theta'-\cos\theta}\sin\theta' d\theta'$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\sigma_i - \delta_i - 2a_1\cos\theta - 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n^i \cos n\theta\right]$$

$$\Delta_1 = \int_{-1}^{1}\tilde{p}_j(x)dx\int_{-1}^{1}\frac{p_i\,dx'}{x-x'} = \frac{\pi^2}{4}\left[(\sigma_i-\delta_i)(\tilde{\sigma}_j+\tilde{\delta}_j+\tilde{a}_1^j) - a_1(\tilde{\sigma}_j-\tilde{\delta}_j+\tilde{a}_2^j)\right.$$

$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty} a_n^i(\tilde{a}_{n+1}-\tilde{a}_{n-1})\right]$$

$$\Delta_2 = \int_{-1}^{1}\tilde{p}_j(x)dx\int_{-1}^{1}\frac{p_i\,dx'}{x-x'} = \frac{\pi^2}{4}\left[(\tilde{\sigma}_j-\tilde{\delta}_j)(\sigma_i+\delta_i+a_1^i) - \tilde{a}_1(\sigma_i-\delta_i+a_2^i)\right.$$

$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty}\tilde{a}_n^j(a_{n+1}^i - a_{n-1}^i)\right]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\tilde{a}_n(a_{n+1}-a_{n-1}) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n\tilde{a}_{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\tilde{a}_{n+1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^i(\tilde{a}_{n+1}-\tilde{a}_{n-1}) + \sum_{n=2}\tilde{a}_n(a_{n+1}-a_{n-1})$$

$$= -a_1\tilde{a}_2 - a_2\tilde{a}_1$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{\pi^2}{4}\left[(\sigma_i-\delta_i)(\tilde{\sigma}_j+\tilde{\delta}_j) + (\tilde{\sigma}_j-\tilde{\delta}_j)(\sigma_i+\delta_i)\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left[\sigma_i\tilde{\sigma}_j - \delta_i\tilde{\delta}_j\right], \quad \cdots (15')$$

よって

$$h_{ij} - \tilde{h}_{ji} = + \frac{\pi^*}{2\rho^2 U g}\left(\delta_i \tilde{\delta}_j - \sigma_i \tilde{\sigma}_j\right), \quad \cdots \cancel{(16)}$$

一方 $f_{ij} = \tilde{f}_{ji}$ 故 (10), (11) より

$$h_{ij} - \tilde{h}_{ji} = U\left(r_{ij} - \tilde{r}_{ji}\right), \quad \cdots (17)$$

特に $\quad \eta_i(x) = e^{+i\alpha x}, \quad \tilde{\eta}_i = e^{-i\alpha x},$

$$\varphi_{iy}(x, 0) = 0 \quad \tilde{\varphi}_{iy} = 0 \quad \cdots (18)$$

となるならば (i = 5 と記して)

$$h_{j5} = 0, \quad \tilde{h}_{j5} = 0.$$

$$U r_{j5} + i\omega f_{j5} = U\tilde{r}_{j5} + i\omega \tilde{f}_{j5} = 0 \quad (19)$$

又 (16) より

$$h_{5j} = \frac{\pi^*}{2\rho^2 U g}\left(\delta_5 \tilde{\delta}_j - \sigma_5 \tilde{\sigma}_j\right)$$

$$-\tilde{h}_{5j} = \frac{\pi^*}{2\rho^2 U g}\left(\delta_j \tilde{\delta}_5 - \sigma_j \tilde{\sigma}_5\right) \quad \cdots (20)$$

更に $j = 5$ とおくと.

$$0 = h_{55} = -\tilde{h}_{55} = \frac{\pi^*}{2\rho^2 U g}\left(\delta_5 \tilde{\delta}_5 - \sigma_5 \tilde{\sigma}_5\right)$$

$$\delta_5 \tilde{\delta}_5 = \sigma_5 \tilde{\sigma}_5, \quad (21)$$

をうる。

なお

$$f_{j5} = \frac{1}{\rho g}\int p_j(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{U}{g} H_j(-\alpha), \quad (22)$$

$$r_{j5} = -i\alpha f_{j5} = -\frac{i\omega}{g} H_j(-\alpha),$$

のような意味がある。

$$= \omega_0 e^{iKx}$$

$$-\phi_{dy} = -\phi_{dy} = -(\omega - \ldots) e^{\ldots} = -i(\omega - \ldots) e^{iKx}$$

$$-\phi_{dy} = -i\omega_0 e^{iKx} \quad = -i\omega_0 e^{iKx}$$

昭和　年　月　日

又 $j = d$ とすると

$$h_{di} = \frac{-1}{\rho g}\int_{-1}^{1} P_d \tilde{\phi}_{iy}\,dx = \hat{h}_{id} + \frac{\pi^2}{2\rho^2 U g}\left(\delta_i \tilde{\delta}_d - \sigma_i \tilde{\sigma}_d\right)$$

$$\tilde{h}_{id} = -\frac{1}{\rho g}\int \hat{P}_i \phi_{dy}\,dx = \frac{\omega_0}{ig} U \tilde{H}_i(K) \quad (23)$$

$$h'_{di} = -\frac{1}{\rho g}\int P'_d \tilde{\phi}_{iy}\,dx = \hat{h}'_{id} + \frac{\pi^2}{2\rho^2 U g}\left(\delta_i \tilde{\delta}'_d - \sigma_i \tilde{\sigma}'_d\right),$$

$$\tilde{h}'_{id} = -\frac{1}{\rho g}\int \hat{P}_i \phi'_{dy}\,dx = i\omega'_0 \frac{U}{g} \tilde{H}_i(K'). \quad (24)$$

$$\tilde{\phi}_{0y} = -i(\omega - KU) e^{-iKx}$$

$$h_{id} = -\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} P_i \tilde{\phi}_{dy}\,dx = +\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} P_i \tilde{\phi}_{0y}\,dx$$

$$= -\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} P_i \phi_{0y}\,dx = \frac{-i\omega_0}{\rho g}\int_{-1}^{1} P_i e^{-iKx} dx = \frac{-i\omega_0 U}{g} H_i(-K)$$

$$h'_{id} = -\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} P_i \tilde{\phi}'_{dy}\,dx - \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} P_i \tilde{\phi}'_{0y}\,dx = \frac{i\omega'_0}{\rho g}\int_{-1}^{1} P_i e^{-iK'x}\,dx \quad (25)$$

$$= \frac{i\omega'_0 U}{g} H_i(-K')$$

又

$$h_{sd} = \frac{\omega_0 U}{ig} H_s(-K) = \frac{\pi}{2\rho^2 U g}\left(\delta_s \tilde{\delta}_d - \sigma_s \tilde{\sigma}_d\right)$$

$$\tilde{h}_{sd} = \frac{\omega_0 U}{ig} \tilde{H}_s(K) = \frac{\pi}{2\rho^2 U g}\left(\sigma_d \tilde{\sigma}_s - \delta_d \tilde{\delta}_s\right).$$

$$h'_{sd} = i\frac{\omega'_0 U}{g} H_s(-K') = \frac{\pi}{2\rho^2 U g}\left(\delta_s \tilde{\delta}'_d - \sigma_s \tilde{\sigma}'_d\right), \quad (26)$$

$$\tilde{h}'_{sd} = \frac{i\omega'_0 U}{g} \tilde{H}_s(K') = \frac{\pi}{2\rho^2 U g}\left(\sigma'_d \tilde{\sigma}_s - \delta'_d \tilde{\delta}_s\right)$$

$$\tilde{H}_s(K) = H_s(-K), \quad \tilde{H}_s(K') = H_s(-K')$$

2. エネルギー定理.

昭和　　年　　月　　日

さて $I = \frac{1}{\rho}\int_{-l}^{l}\{p_j(x)\overline{\eta_i(x)} - \overline{p_j(x)}\eta_i(x)\}dx$　　(1)

$$\int_{-l}^{l}\overline{\tilde{p}_j(x)}\,\overline{\eta}_i(x)dx = \overline{\int \tilde{p}_j(x)\eta_i(x)} = \overline{\int p_i(x)\tilde{\eta}_j(x)dx}$$

$$= \int_{-l}^{l}\overline{p_i(x)}\eta_j(x)dx \quad \because \tilde{\eta}_j(x) = \eta_j(x)$$

とおくと

$$\therefore I = \frac{1}{\rho}\int_{-l}^{l}\{p_j(x)\overline{\eta_i(x)} - \overline{p_i(x)}\eta_j(x)\}dx$$

$$= \lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{X}\Big[\{(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x})\phi_j(x) - g\eta_j(x)\}\overline{\eta_i(x)}$$

$$- \{(-i\omega - U\frac{\partial}{\partial x})\overline{\phi_i} - g\overline{\eta_i}\}\eta_j(x)\Big]dx$$

$$= \lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{X}\Big[\overline{\eta_i(x)}(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x})\phi_j(x) + \eta_j(x)(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x})\overline{\phi_i(x)}\Big]dx$$

$$= \lim_{X\to\infty}U\Big[\overline{\eta_i(-X)}\phi_j(-X,0) - \eta_j(-X)\overline{\phi_i(-X,0)}\Big]$$

$$+ \lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{X}\Big[\phi_j(x,0)(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x})\overline{\eta_i(x)} + \overline{\phi_i(x,0)}(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x})\eta_j\Big]dx$$

$$\phi_y(x,0) = -(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x})\eta(x)$$

$$\overline{\phi_y} = (i\omega + U\frac{\partial}{\partial x})\overline{\eta(x)}$$

$$\therefore I = \lim_{X\to\infty}U\Big[\overline{\eta_i(-X)}\phi_j(-X,0) - \eta_j(-X)\overline{\phi_i(-X,0)}\Big]$$

$$+ \lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{X}\Big[\phi_j(x,0)\overline{\phi_{iy}(x,0)} - \overline{\phi_i(x,0)}\phi_{jy}(x,0)\Big]dx \quad (2)$$

昭和　年　月　日

所で

$$\int_{-X}^{X} \phi_j(x,0)\overline{\Phi}_{iy}(x,0)\,dx = \iint \nabla\phi_j \nabla\overline{\Phi}_i \,dx\,dy + \int_{-\infty}^{0} \phi_j(-X,y)\overline{\Phi}_{ix}(-X,y)\,dy$$

$$\therefore\ I = \lim_{X\to\infty} U\left[\overline{\eta_i(-X)}\phi_j(-X,0) - \eta_j(-X)\overline{\Phi_i}(-X,0)\right]$$

$$+\lim_{X\to\infty}\int_{-\infty}^{0}\left[\overline{\Phi_{ix}}(-X,y)\phi_j(-X,y) - \overline{\Phi_i}(-X,y)\phi_{jx}(-X,0)\right]dy \quad (3)$$

1から12

$$\phi(x,y) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{1}{K+\alpha}\left[K H(-K) e^{Ky+iKx} + \alpha H(-K') e^{K'y+iK'x}\right],$$

$$\left(\frac{i\omega_0 - U\partial_x}{g}\phi\right) = \eta(x) \longrightarrow \frac{i\omega_0}{(K+\alpha)g}\left[K H(-K) e^{iKx} - K' H(-K') e^{iK'x}\right],$$

$$U\overline{\eta_i}\phi_j \longrightarrow \frac{-i\omega_0 U}{g(K+\alpha)^2}\left[K^2\overline{H_i}(-K)H_j(-K) - \alpha K'\overline{H_i}(-K')H_j(-K')\right]$$

$$\longrightarrow = -U\eta_j\overline{\Phi_i}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\overline{\Phi_{ix}}\phi_j\,dy \Longrightarrow \frac{-i}{2(K+\alpha)^2}\left[K^2\overline{H_i}(-K)H_j(-K) + \alpha^2\overline{H_i}(-K')H_j(-K')\right]$$

$$\longrightarrow = -\int_{-\infty}^{0}\overline{\Phi_i}\phi_{jx}\,dy.$$

$\alpha - K = \frac{\omega_0}{U}$

$$2\frac{\omega_0 U}{g} + 1 = 1 + 2\sqrt{\frac{K}{g}} = 1 + \frac{2K}{\alpha - K} = \frac{\alpha+K}{\alpha-K}.$$

$\frac{K}{\alpha - K} = \frac{U\omega_0^2}{g\omega_0}$

$$\alpha^2 - \frac{2\alpha K'}{g}\omega_0 U = \alpha^2 - \frac{2\alpha^3}{K}\sqrt{\frac{K}{g}} = \alpha^2\left(1 - \frac{2\alpha}{\alpha-K}\right) = \frac{-\alpha^2(\alpha+K)}{\alpha-K}.$$

$$\therefore\ I = \frac{\omega_0 U}{i(\alpha+K)g}\left[K\overline{H_i}(-K)H_j(-K) - K'\overline{H_i}(-K')H_j(-K')\right]$$

昭和　年　月　日

or

$$I = \frac{1}{i(k'-k)}\left[k\overline{H_i(-k)}H_j(-k) - k'\overline{H_i(-k')}H_j(-k')\right], \quad (4)$$

$$I = \frac{1}{\rho}\int_{-1}^{1}\{\tilde{p}_j(x)\overline{\eta_i}(x) - \tilde{\overline{p}}_j(x)\eta_i(x)\}dx,$$

$$= \frac{1}{\rho}\int_{-1}^{1}\left[p_j(x)\overline{\eta_i}(x) - \overline{p_i}(x)\eta_j(x)\right]dx,$$

$$= g\left(f_{ji} - \tilde{\overline{f}}_{ji}\right)$$

となるから

$$f_{ij} - \tilde{\overline{f}}_{ij} = -$$

$$f_{ji} - \tilde{\overline{f}}_{ji} = \frac{1}{ig(k'-k)}\left[k\overline{H_i(-k)}H_j(-k) - k'\overline{H_i(-k')}H_j(-k')\right] \quad (5)$$

$j = d$ とおく.

$$f_{di} = e_i = -\frac{U}{g}\hat{H}_i(k), \quad \tilde{f}_{di} = -\frac{U}{g}H_d(-k)$$

すると

$$\overline{H_i(-k)} - \hat{H}_i(k) = \frac{1}{iU(k'-k)}\left[k\overline{H_i(-k)}H_d(-k) - k'\overline{H_i(-k')}H_d(-k')\right], \quad (6)$$

$$\overline{H_i(-k')} - \hat{H}_i(k') = \frac{1}{iU(k'-k)}\left[k\overline{H_i(-k)}H'_d(-k) - k'\overline{H_i(-k')}H'_d(-k')\right], \quad (7)$$

さらに $i = d$ とおくと

$$\overline{H_d(-k)} - \tilde{H}_d(k) = \frac{1}{iU(k'-k)}\left[k\overline{H_d(-k)}H_d(-k) - k'\overline{H_d(-k')}H_d(-k')\right], \quad (8)$$

$$\overline{H_d(-k')} - \hat{H}_d(k') = \frac{1}{iU(k'-k)}\left[k\overline{H_d(-k)}H'_d(-k) - k'\overline{H_d(-k')}H'_d(-k')\right], \quad (9)$$

$$\overline{H'_d(-k)} - \tilde{H}'_d(k) = \frac{1}{iU(k'-k)}\left[k\overline{H'_d(-k)}H_d(-k) - k'\overline{H'_d(-k')}H_d(-k')\right], \quad (10)$$

$$\overline{H'_d(-k')} - \tilde{H}'_d(k') = \frac{1}{iU(k'-k)}\left[k\overline{H'_d(-k)}H'_d(-k) - k'\overline{H'_d(-k')}H'_d(-k')\right], \quad (11)$$

となる.

$\omega_0 = (\alpha - k')$

昭和　　年　　月　　日

$$\frac{H_d(-k)}{v(k'-k)} = a, \quad \frac{H_d(-k')}{v(k'-k)} = b, \quad \frac{H_d'(-k)}{v(k'-k)} = c, \quad \frac{H_d'(-k')}{v(k'-k)} = d$$

$$\frac{H_i(-k)}{v(k'-k)} = x, \quad \frac{H_i(-k')}{v(k'-k)} = y. \qquad x, y : \text{even or } l^{ikx}$$

even

$$\left.\begin{aligned} (\bar{x} - x) &= ik\bar{x}a + ik'\bar{y}b \\ (\bar{y} - y) &= -ik\bar{x}c + ik'\bar{y}d \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} (1+ika)\bar{x} - ik'b\bar{y} &= x \quad ① \\ ikc\bar{x} + (1-ik'd)\bar{y} &= y \quad ② \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} (1-ik\bar{a})x + ik'\bar{b}y &= \bar{x} \quad ③ \\ -ik\bar{c}x + (1+ik'\bar{d})y &= \bar{y} \quad ④ \end{aligned}$$

①と③から次頁の a, b, c, d の関係により
②を得る故 ①と②は同じ要素しか持たない。

x, y が odd であれば

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} + x &= -ik\bar{x}a + ik'\bar{y}b \\ \bar{y} + y &= -ik\bar{x}c + ik'\bar{y}d \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} (1+ika)\bar{x} - ik'b\bar{y} &= -x \\ ikc\bar{x} + (1-ik'd)\bar{y} &= -y \end{aligned}\right\}$$

となる

昭和　年　月　日

$x=a,\ y=b,\ x=c,\ y=d$ とおくと

$$\bar a - a = -ik a\bar a + ik'\bar b b.$$
$$\bar b - b = -ik\bar a c + ik'\bar b d,$$
$$\bar c - c = -ik\bar c a + ik'\bar d b$$
$$\bar d - d = -ik\bar c c + ik'\bar d d$$

$$\bar b(1-ik'd) = b(1-ik\bar a),$$
$$\bar b(1+ika) = b(1+ik'\bar d)$$
$$\therefore\ \frac{1-ik\bar a}{1-ik'd} = \frac{1+ik'\bar d}{1+ika}$$

書きかえると

$$(1+ika)(1-ik\bar a) = 1+kk'b\bar b$$
$$\bar b/b = \frac{(1-ik\bar a)}{1-ik'd} = \frac{1+k'\bar d}{1+ika}$$
$$(1-ik'd)(1+ik'\bar d) = 1+kk'b\bar b$$

よって　$(1+ika) = r_1 e^{i\alpha}$, $b = r_2 e^{i\beta}$, $(1-ik'd) = r_1 e^{i\delta}$

とおくと

$$r_1^2 = 1+kk'r_2^2$$
$$2\beta = \delta - \alpha$$

なる関係になる。

よって前頁の関係は

$$r_1\bar x e^{i\alpha} - ik' r_2 \bar y e^{i\beta} = x$$
$$ikr_2\bar x e^{i\alpha} + r_1\bar y e^{i\beta} = y e^{i(\alpha-\beta)}$$

とかける。

この事から　a, b がわかれば　d がわかり

x がわかれば y は定まる。

又 (x, y) の２組の値があれば　a, b, d が定まる。

昭和　　年　　月　　日

$\overbrace{x_1, y_1}^{\text{even}}; \overbrace{x_2, y_2}^{\text{odd}}$ の2組の値がわかったとしよう。

$$\left.\begin{aligned}(1+iKa)\overline{x_1} - iK'b\,\overline{y_1} &= x_1\\ iKc\,\overline{x_1} + (1-iK'd)\,\overline{y_1} &= y_1\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(1+iKa)\overline{x_2} - iK'b\,\overline{y_2} &= -x_2\\ iKc\,\overline{x_2} + (1-iK'd)\,\overline{y_2} &= -y_2\end{aligned}\right\}$$

今　$A\overline{y_1} - B\overline{y_2} = 0$

のように A, B を決めると上式から．

$$\left.\begin{aligned}(1+iKa)(A\overline{x_1} - B\overline{x_2}) &= Ax_1 + Bx_2\\ iKc(A\overline{x_1} - B\overline{x_2}) &= Ay_1 + By_2\end{aligned}\right\}$$

所では　$A\overline{x_1} - B\overline{x_2} = \frac{i}{K}$　とおくと

$$\left.\begin{aligned}(1+iKa)\frac{i}{K} &= Ax_1 + Bx_2\\ -c &= Ay_1 + By_2\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&= \frac{i}{K}\,\frac{x_1\overline{y_2} + \overline{y_1}x_2}{x_1\overline{y_2} - x_2\overline{y_1}}\\ &= \frac{i}{K}\,\frac{y_1\overline{y_2} + \overline{y_1}y_2}{x_1\overline{y_2} - x_2\overline{y_1}}\end{aligned}$$

$$A = \frac{\frac{i}{K}\overline{y_2}}{x_1\overline{y_2} - x_2\overline{y_1}}, \quad B = \frac{\frac{i}{K}\overline{y_1}}{x_1\overline{y_2} - x_2\overline{y_1}}$$

昭和　　年　　月　　日

この事は ~~入~~射波の振幅では

$$\zeta \longrightarrow \frac{i\omega_0}{g(k+\alpha)}\left[kH(-k)e^{ikx} - k'H(-k')e^{ik'x}\right]$$

$$= \frac{i}{U(k'-k)}\left[kH(-k)e^{ikx} - k'H(-k')e^{ik'x}\right]$$

完全反射

$$ika = \frac{ikH_d(-k)}{U(k'-k)} = A_d(k) \qquad ikb = \frac{ikH_d'(-k')}{U(k'-k)} = A_d'(k)$$

$$+ik'd = \frac{+ik'H_d'(-k')}{U(k'-k)} = -A_d'(k') \qquad ik'e = \frac{ik'H_d(-k')}{U(k'-k)} = -A_d(k')$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_d &\Longrightarrow A_d(k)e^{ikx} + A_d(k')e^{ik'x} \\ \eta_d' &\longrightarrow A_d'(k)e^{ikx} + A_d'(k')e^{ik'x} \end{aligned}\right\}$$

$$\{1 + A_d(k)\}\{1 + \overline{A_d(k)}\} = 1 + A_d'(k)\overline{A_d(k')}$$

$$\{1 + A_d'(k')\}\{1 + \overline{A_d'(k')}\} =$$

$$k'A_d'(k) + k A_d(k') = 0$$

$$-\frac{k'\overline{A_d(k')}}{k\overline{A_d'(k)}} = \frac{1 + A_d(k)}{1 + \overline{A_d'(k')}}$$

昭和　　年　　月　　日

2.2.12

$$J^{*} = \frac{1}{\rho}\int_{-1}^{1}\left[\tilde{p}_j(x)\overline{\tilde{\varphi}_{i,y}} - \overline{\tilde{p}_j(x)}\,\tilde{\varphi}_{i,y}\right]dx \quad , \quad \cdots (12)$$

所で $\overline{\int_{-1}^{1}\tilde{p}_j\varphi_{i,y}\,dx} = \overline{\int p_i\tilde{\varphi}_{j,y}\,dx} - \overline{\frac{\Delta}{\pi\rho U}(i\tilde{j})}$

$$J^{*} = \frac{1}{\rho}\int_{-1}^{1}\left[p_j(x)\overline{\varphi_{i,y}} + \overline{p_i}\,\varphi_{j,y}\right]dx + \frac{1}{\pi\rho^2 U}\overline{\Delta(p_i,\tilde{p}_j)}, \quad (13)$$

$$\varphi_y(x,0) = -\frac{1}{\rho\pi U}\int_{-1}^{1}\frac{p(x')}{x-x'}dx' + \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1}p(x')S_1(x-x',0)\,dx'$$

故

$$\Delta(\overline{p_i},p_j) = \int_{-1}^{1}\overline{p_i}(x)\,dx\int_{-1}^{1}\frac{p_j(x')}{x-x'}dx' + \int_{-1}^{1}p_j(x)\,dx\int_{-1}^{1}\frac{\overline{p_i}(x')}{x-x'}dx' \quad , (14)$$

とおくと 前節(15')によって

$$\Delta(\overline{p_i},p_j) = \frac{\pi^2}{2}\left(\overline{\sigma_i}\sigma_j - \overline{\delta_i}\delta_j\right) \quad , \quad \cdots (15)$$

そうすると

$$J^{*} = J + \frac{1}{\pi\rho^2 U}\left[\overline{\Delta(p_i,\tilde{p}_j)} - \Delta(\overline{p_i},p_j)\right], \quad (16)$$

$$J = \frac{1}{\rho^2 U}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}p_j(x)\overline{p_i}(x')\,dx\,dx'\left[\overline{S_1(x-x',0)} + S_1(x'-x,0)\right], \quad (17)$$

$$S_1(x,0) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{P.V.}\int_0^{\infty}\left[\frac{(\alpha+\gamma)k-\alpha^2}{A}e^{ikx} + \frac{(\alpha-\gamma)(\cdots)}{B}e^{-ikx}\right]dk$$

$$+ \frac{1}{2(\alpha+K)}\left[K^2 e^{iKx} + \alpha K' e^{iK'x}\right].$$

故に

$$\overline{S_1(x,0)} + S_1(-x,0) = \frac{1}{\alpha+K}\left[K^2 e^{-iKx} + \alpha K' e^{-iK'x}\right], \quad \cdots (18)$$

昭和　　年　　月　　日

よって

$$J_{ji} = \frac{U}{\alpha+K}\left[K^2 H_j(-K)\overline{H_i(-K)} + \alpha K' H_j(-K')\overline{H_i(-K')}\right], \quad (19)$$

を得る。

Jをh_{ij}で表わすと

$$\frac{1}{g}J_{ji} = -h_{ji} + \overline{\tilde{h}_{ji}}, \quad \cdots (20)$$

最終的に

$$\overline{\delta_i}(\delta_j - \tilde{\delta}_j) + \overline{\sigma_i}(\tilde{\sigma}_j - \sigma_j)$$

$$\overline{\tilde{h}_{ji}} - h_{ji} = \frac{J_{ji}}{g} + \frac{\pi}{2P^2Ug}\left[\overline{\delta_i}\delta_j - \overline{\sigma_i}\sigma_j + \overline{\sigma_i}\tilde{\sigma}_j - \overline{\delta_i}\tilde{\delta}_j\right], \quad (21)$$

$i = s$とおくと左辺は0で

$$J_{js} + \frac{\pi}{2P^2U}\left[\overline{\delta_s}\delta_j - \overline{\sigma_s}\sigma_j + \overline{\sigma_s}\tilde{\sigma}_j - \overline{\delta_s}\tilde{\delta}_j\right] = 0, \quad (22)$$

更にj ~~=~~ sとおくと

$$J_{ss} + \frac{\pi}{2P^2U}\left[\overline{\delta_s}\delta_s - \overline{\sigma_s}\sigma_s + \overline{\sigma_s}\tilde{\sigma}_s - \overline{\delta_s}\tilde{\delta}_s\right] = 0, \quad (23)$$

前節(20), (21)等と合せてσ, δとH_j, H_sとの関係式を得る。

このJ_{ji}は波のみに関係しており もしσ, δが0とすれば 次のように無限後方の波から求められる。

$$\left[\overline{\tilde{h}_{ij}} + h_{ji} = \frac{1}{g}J_{ji} + \frac{\pi}{2P^2gU}\left[\overline{\delta_i}\delta_j - \overline{\sigma_i}\sigma_j\right], \quad \cdots (21')\right]$$

$$J_{ji} = \frac{1}{\rho}\int_{-1}^{1}\left[p_j(x)\overline{\phi_{iy}}(x,0) - \overline{\tilde{p}_j}(x)\overline{\phi_{iy}}\right]dx \quad , \cdots (24)$$

$$\int_{-1}^{1}\tilde{p}_j\phi_{iy}\,dx = \overline{\int_{-1}^{1}p_i\tilde{\phi}_{jy}} = -\int_{-1}^{1}\overline{p_i}\phi_{jy}\,dx$$

$$\because \tilde{\phi}_{jy} = -\phi_{jy} \quad , \quad \phi_y = -(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\eta$$

$$\therefore J = \frac{1}{\rho}\int_{-1}^{1}\left[p_j(x)\overline{\phi_{iy}}(x,0) + \overline{p_i}(x)\phi_{jy}(x,0)\right]dx \quad , \cdots$$

$$= \lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{X}\Big[\{(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\phi_j - g\eta_j\}\overline{\phi_{iy}}$$

$$+ \{(-i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\overline{\phi_i} - g\overline{\eta_i}\}\phi_{jy}\Big]dx \quad ,$$

$$\int_{-X}^{X}(\eta_j\overline{\phi_{iy}} + \overline{\eta_i}\phi_{jy})\,dx = \int_{-X}^{X}\left(\eta_j(i\omega + U\tfrac{\partial}{\partial x})\overline{\eta_i} - \overline{\eta_i}(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\eta_j\right)dx$$

$$= U\int_{-X}^{X}(\eta_j\overline{\eta_{ix}} + \overline{\eta_i}\eta_{jx})\,dx = U\left[\overline{\eta_i}\eta_j\right]_{-X}^{X}$$

$$\int_{-X}^{X}\{(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\phi_j\}\overline{\phi_{iy}}\,dx = \iint \nabla(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\phi_j\nabla\overline{\phi_i}\,dx\,dy$$

$$+ \int_{-\infty}^{0}\{(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\phi_j\}\overline{\phi_{ix}}\,dy .$$

$$J = +\lim_{X\to\infty} gU\left[\overline{\eta_i}(-X)\eta_j(-X)\right] + U\,\overline{\phi_i}(-X,0)\phi_{jy}(-X,0)$$

$$+\lim\int_{-\infty}^{0}\left[\overline{\phi_{ix}}(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\phi_j - \overline{\phi_i}(i\omega - U\tfrac{\partial}{\partial x})\phi_{jx}\right]dy \quad ,(25)$$

$$U\bar{\phi}_i \phi_{jy} \to \frac{U}{(K+\alpha)^2}\left[K^3 \bar{H}_i(-K) H_j(-K) + \alpha^2 K' \bar{H}_i(-K') H_j(-K')\right]$$

年 月 日

$$gU\left[\bar{\eta}_i \eta_j\right] = \frac{\omega_0^2 g U}{g^2 (K+\alpha)^2}\left[K^2 \bar{H}_i(-K) H_j(-K) + K'^2 \bar{H}_i(-K') H_j(-K')\right]$$

$$\omega - KU = \omega_0 \quad , \omega - K'U = -\omega_0' \quad , \omega_0' \alpha =$$

$$\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi \longrightarrow \frac{i}{K+\alpha}\left[\omega_0 K H(-K) e^{Ky+iKx} - \omega_0' \alpha H(-K') e^{K'y+iK'x}\right]$$

$$\bar{\phi}_x \longrightarrow \frac{-i}{K+\alpha}\left[K^2 H(-K) e^{Ky+iKx} + K'\alpha H(-K') e^{K'y+iK'x}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{0}\left[\bar{\phi}_{ix}\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_j - \bar{\phi}_i\left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_{jx}\right]dy$$

$$= \frac{1}{(K+\alpha)^2}\left[\omega_0 K^2 \bar{H}_i(-K) H_j(-K) - \omega_0' \alpha^2 \bar{H}_i(-K') H_j(-K')\right]$$

$$\omega_0 + \frac{\omega_0^2 U}{g} = \omega_0 + KU = \omega$$

$$\frac{\omega_0'^2 U}{g} K'^2 - \omega_0' \alpha^2 = KK'^2 U - \omega_0 K' \alpha = K'(KK'U - \omega_0 \alpha)$$

$$= K'U\{KK' - (\alpha - K)\alpha\} = \alpha KK'U = \omega KK' = \omega \alpha^2$$

$$\cancel{K\alpha}^2 - \alpha^2 + \alpha K.$$

$$J_{ji} = \frac{U}{(K+\alpha)}\left[K^2 \bar{H}_i(-K) H_j(-K) + \alpha K' \bar{H}_i(-K') H_j(-K')\right] \quad (26)$$

のように在って(19)に一致する。

$$J_{ji}^* = \frac{1}{\rho}\int_{-1}^{1}\left\{p_j(x)\bar{\phi}_{iy}(x,0) + \bar{p}_i(x)\phi_{jy}(x,0)\right\}dx -$$

$$= \frac{1}{\rho}\int_{-1}^{1}\left\{p_j(x)\left(i\omega\bar{\eta}_i + U\bar{\eta}_{ix}\right) + \bar{p}_i(x)\left(-i\omega\eta_j + U\eta_{jx}\right)\right\}dx$$

$$= i\omega I_{ji} + UR_{ji}^* \quad \cdots\cdots (27)$$

$$R_{ji}^* = \frac{\pm 1}{\rho}\int_{-1}^{1}\left\{p_j(x)\bar{\eta}_{ix}(x) + \bar{p}_i(x)\eta_{jx}(x)\right\}dx \quad , \quad -(28)$$

昭和　　年　　月　　日

とおき

$$R^{*}_{ji} = R_{ji} + \frac{1}{U}(J^{*}_{ji} - J_{ji}) = g(\gamma_{ji} - \tilde{\gamma}_{ij}), \quad (29)$$

とおくと

$$U R_{ji} = J_{ji} - i\omega I_{ji}$$

$$= \frac{U}{K'-K}\left[-K^{2} H_i(-K) H_j(-K) + K'^{2} \bar{H}_i(-K') H_j(-K')\right], \quad (30)$$

1 周期間に平板のなす仕事の平均は

$$\overline{W_{ji}} = \frac{1}{T_e}\int_0^{T_e} dt \int_{-1}^{1} Re\{p_j e^{i\omega t}\} Re\{\phi_{iy} e^{i\omega t}\} dx \quad ,$$

$$(p_{jR}\cos\omega t - p_{jI}\sin\omega t)(\phi_{iyR} \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[p_{jR}\phi_{iyR} + p_{jI}\phi_{iyI}\right] dx = \frac{1}{2}\int$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[p_j\overline{\phi_{iy}} + \overline{p_j}\phi_{iy}\right] dx \quad , \quad \text{---} \quad (31)$$

$\phi_{iy} = (i\omega + U\frac{\partial}{\partial x})\eta_i$

$\overline{\phi_{iy}} = (i\omega + U\frac{\partial}{\partial x})\ldots$

平均抵抗は

$$\overline{R_{ji}} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[p_j\overline{\eta_{ix}} + \overline{p_j}\eta_{ix}\right] dx \quad , \quad \text{--} (32)$$

$$\overline{W_{ji}} - U\overline{R_{ji}} = \frac{i\omega}{4}\int_{-1}^{1}\left[p_j\overline{\eta_i} - \overline{p_j}\eta_i\right] dx$$

y方向の平均仕事は

$$\overline{D_{ji}} = \frac{i\omega}{4}\int_{-1}^{1}\left[p_j\overline{\eta_i} - \overline{p_j}\eta_i\right] dx \quad , \quad \text{---} (33)$$

$$\overline{W_{ji}} = U\overline{R_{ji}} + \overline{D_{ji}} \quad , \quad \text{--} (34)$$

$$\left.\begin{array}{lll}
\overline{W^w} & \overline{W^s} + \overline{W^w} \; , \; \overline{W^s} = U\overline{R^s} & \\
\overline{R}U = U\overline{R^s} + U\overline{R^w} & ; \text{ X DIRECTION} & ; \text{RESISTANCE} \\
\overline{D} = \overline{D^w} & ; \text{ Y DIRECTION} & ; \text{Damping}
\end{array}\right\} (35)$$

suffix w means "of wave"

〃 s 〃 "of suffix"

$\overline{D}$ は Damping と呼んでおこう。

昭和　　年　　月　　日

(21) において $i = d$ or d' とおき (23), (24), (25) を代入すると

$$i\frac{\omega_0 U}{g}\left[\tilde{\overline{H_j}}(K) - H_j(-K)\right] = \frac{U}{(\alpha+K)g}\left[K^2 H_j(-K)\overline{H_d}(-K) + \alpha K' H_j(-K')\overline{H_d}(-K')\right]$$

$$+ \frac{\pi}{2\rho^2 U g}\left[\overline{\delta_d}\,\delta_j - \overline{\sigma_d}\,\sigma_j + \overline{\sigma_d}\,\tilde{\overline{\sigma_j}} - \overline{\delta_d}\,\tilde{\overline{\delta_j}}\right]$$

$$+i\frac{\omega_0' U}{g}\left[-\tilde{\overline{H_j}}(K') + H_j(-K')\right] = \frac{U}{(\alpha+K)g}\left[K^2 H_j(-K)\overline{H_d'}(-K) + \alpha K' H_j(-K')\overline{H_d'}(-K')\right]$$

$$+ \frac{\pi}{2\rho^2 U g}\left[\overline{\delta_d'}\,\delta_j - \overline{\sigma_d'}\,\sigma_j + \overline{\sigma_d'}\,\tilde{\overline{\sigma_j}} - \overline{\delta_d'}\,\tilde{\overline{\delta_j}}\right],$$

$$\omega_0(\alpha+K) = U(\alpha^2 - K^2), \quad \omega_0'(\alpha+K) = \frac{\alpha}{K}U(\alpha^2 - K^2)$$

$$i\left\{\tilde{\overline{H_j}}(K) - H_j(-K)\right\} = \frac{1}{U(K'-K)}\left\{K H_j(-K)\overline{H_d}(-K) + \frac{\alpha K'}{K}H_j(-K')\overline{H_d}(-K')\right\}$$

$$+ \frac{\pi}{2\rho^2 U^2 \omega_0}\left[\overline{\delta_d}\,\delta_j - \overline{\sigma_d}\,\sigma_j + \overline{\sigma_d}\,\tilde{\overline{\sigma_j}} - \overline{\delta_d}\,\tilde{\overline{\delta_j}}\right], \quad (35)$$

$$-i\left\{\tilde{\overline{H_j}}(K') - H_j(-K')\right\} = \frac{1}{U(K'-K)}\left\{\frac{K^2}{\alpha}H_j(-K)\overline{H_d'}(-K) + K' H_j(-K')\overline{H_d'}(-K')\right\}$$

$$+ \frac{\pi}{2\rho^2 U^2 \omega_0'}\left[\overline{\delta_d'}\,\delta_j - \overline{\sigma_d'}\,\sigma_j + \overline{\sigma_d'}\,\tilde{\overline{\sigma_j}} - \overline{\delta_d'}\,\tilde{\overline{\delta_j}}\right], \quad (36)$$

この共役値を (6) (17) と比較すると

$$K'\overline{H_j}(-K')H_d(-K') = \frac{-\pi}{2\rho^2 U^2}\left[\delta_d\,\overline{\delta_j} - \sigma_d\,\overline{\sigma_j} + \sigma_d\,\tilde{\overline{\sigma_j}} - \delta_d\,\tilde{\overline{\delta_j}}\right], \quad (37)$$

$$K\overline{H_j}(-K)H_d'(-K) = \frac{-\pi}{2\rho^2 U^2}\left[\delta_d'\,\overline{\delta_j} - \sigma_d'\,\overline{\sigma_j} + \sigma_d'\,\tilde{\overline{\sigma_j}} - \delta_d'\,\tilde{\overline{\delta_j}}\right], \quad (38)$$

昭和　　年　　月　　日

$j = d, d'$ とおくと.

$$K'\overline{H_d(-K')}H_d(-K') = \frac{\pi}{2\rho^2U^2}\left[\sigma_d\overline{\sigma_d} - \delta_d\overline{\delta_d}\right],$$

$$K\overline{H_d(-K)}H'_d(-K) = \frac{\pi}{2\rho^2U^2}\left[\sigma'_d\overline{\sigma_d} - \delta'_d\overline{\delta_d} + \delta'_d\overline{\sigma_d} - \sigma'_d\overline{\delta_d}\right], \quad (39)$$

$$K'\overline{H'_d(-K')}H_d(-K') = \frac{\pi}{2\rho^2U^2}\left[\sigma_d\overline{\sigma'_d} - \delta_d\overline{\delta'_d} + \delta_d\overline{\sigma'_d} - \sigma_d\overline{\delta'_d}\right],$$

$$K\overline{H'_d(-K)}H'_d(-K) = \frac{\pi}{2\rho^2U^2}\left[\sigma'_d\overline{\sigma'_d} - \delta'_d\overline{\delta'_d}\right], \quad (40)$$

第1, 4式より

$$\frac{2\rho^2U^2}{\pi}\left|H_d(-K)\right|^2 = \frac{1}{K'}\left[\sigma_d\overline{\sigma_d} - \delta_d\overline{\delta_d}\right] = \frac{1}{K}\left[\sigma'_d\overline{\sigma'_d} - \delta'_d\overline{\delta'_d}\right] > 0, \quad (41)$$

又第2, 3式より

$$H_d(-K')\left\{K\overline{H_d(-K)} + K'\overline{H'_d(-K')}\right\} = \frac{\pi}{2\rho^2U^2}\left[\sigma'_d\overline{\sigma_d} + \sigma_d\overline{\sigma'_d} - \delta'_d\overline{\delta_d} - \delta_d\overline{\delta'_d}\right] \quad (42)$$

等の関係がえられる。

又(35), (36)で $j = d, d'$ とおき さらに

$$\frac{iKH_d(-K)}{U(K'-K)} = A_d(K), \quad \frac{iKH_d(-K')}{U(K'-K)} = A'_d(K)$$

$$\frac{iK'H'_d(-K')}{U(K'-K)} = -A'_d(K'), \quad \frac{iK'H'_d(-K)}{U(K'-K)} = -A_d(K') \quad (43)$$

とおくと A_d ‥‥ は入射波の振幅を1とした時の散乱波の振幅である。

とすると.

$$\{1+A_d(K)\}\{1+\overline{A_d}(K)\} + \frac{c'}{c}A_d(K')\overline{A_d}(K')$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2\rho^2U^2g\left(1+\frac{\alpha}{K}\right)}\left[\sigma_d\overline{\sigma_d} - \delta_d\overline{\delta_d}\right], \quad (44)$$

$$\{1+A'_d(K')\}\{1+\overline{A'_d(K')}\}+\frac{c'}{c}A'_d(K)\overline{A'_d(K)}$$

$$=1+\frac{\pi}{2\rho^2U^2g\left(1+\frac{K}{\alpha}\right)}\left[\sigma'_d\overline{\sigma'_d}-\delta'_d\overline{\delta'_d}\right], \qquad (45)$$

を得る。

これらの式の左辺第1項は透過波の振幅の自乗を第2項は反射波の振幅の自乗を示す。

又 c', c は K, K' 波の波速であるから，右辺の1は入射波のエネルギーで左辺は夫々 K, K' 波の単位長さ当りのエネルギーとなり，右辺第2項が夫々平板が流体に供給するエネルギーとなる。

これは平板が波からうける抵抗のなす仕事に等しい。(?)

昭和　年　月　日

B. 積分方程式の分解

積分方程式を

$$\zeta(x) = \int_{-1}^{1} p(x') S_2(x-x')\,dx' , \qquad (1)$$

とおく時、

$$S_2(x) = S(x) + \frac{i\gamma}{2(K'-K)}\left[K e^{iKx} - K' e^{iK'x}\right], \qquad (2)$$

$$S(x) = \frac{\gamma}{2\pi} P.V. \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{ikx}}{A(k)} + \frac{e^{-ikx}}{B(k)} \right\} k\,dk ,$$

であるから (1) は

$$\zeta(x) = \int_{-1}^{1} p(x') S(x-x')\,dx' + i\left[K e^{iKx} A(K) - K' e^{iK'x} A(K')\right], \qquad (3)$$

とかける。

但し

$$A(k) = \frac{\gamma}{2(K'-K)} \int_{-1}^{1} p(x') e^{-ikx'}\,dx' , \qquad (4)$$

とする。

新しい核は

$$\overline{S}(x) = S(-x) , \qquad (5)$$

であり且つ原点において対数的特異点を有するから、(3)の解は次の3つの積分方程式の解の組合せで現わせる事になる。

つまり

$$\zeta(x) = \int_{-1}^{1} p_a(x') S(x-x')\,dx' , \qquad (6)$$

$$e^{iKx} = \int_{-1}^{1} p_w(x') S(x-x')\,dx' , \qquad (7)$$

$$e^{iK'x} = \int_{-1}^{1} p'_{w}(x') S(x-x')\,dx' , \qquad (8)$$

とすると

$$p(x) = p_a(x) - iKA(K) p_w(x) + iK'A(K') p'_w(x) \qquad (9)$$

さて(7),(8)は(6)において$\eta(x)$をかえた場合であるから
これらの方程式について一般的に考えるには(6)を考える
だけでよい。

(6)において実部と虚部を分け、さらに偶関数と
奇関数とに分解すると一般に

$$p(x) = p_{CR}(x) + p_{SR}(x) + i\{p_{CI}(x) + p_{SI}(x)\}, \qquad (10)$$

となり、一方

$$S(x) = S_C(x) + i S_S(x), \qquad (11)$$

となる。

但し下添字Rは実部、Iは虚部、Cは偶関数
Sは奇関数を示すものとする。

従って(6)は夫々に分解すると次の4つの方程式
となる。

$$\left.\begin{aligned}
\eta_{CR}(x) &= [p_{CR} S_C - p_{SI} S_S], \\
\eta_{SR}(x) &= [p_{SR} S_C - p_{CI} S_S], \\
\eta_{CI}(x) &= [p_{SR} S_S + p_{CI} S_C], \\
\eta_{SI}(x) &= [p_{CR} S_S + p_{SI} S_C].
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

ここに右辺の大括弧は積分を意味するものとする。

先ず$\eta(x)$が偶関数で実ならば

$$\eta_{SR}(x) = \eta_{CI}(x) = \eta_{SI}(x) = 0 \quad \text{for } \eta: \text{real, even}, \qquad (13)$$

$\eta(x)$が奇で実ならば

$$\eta_{CR}(x) = \eta_{CI}(x) = \eta_{SI}(x) = 0 \quad \text{for } \eta: \text{real, odd}, \qquad (14)$$

$\eta = e^{ikx}$ならば(k: real)

$$\eta_{SR}(x) = \eta_{CI}(x) = 0 \quad \text{for } \eta = e^{ikx}, \qquad (15)$$

となるから(13),(15)の時は(12)の第2,3式の左辺は恒等的に0となるので p_{SR} と p_{CI} に関するこの聯立積分方程式の解が唯一に定まるならば

$$p_{SR}(x)=p_{CI}(x)=0, \quad \text{for (13),(15)}, \quad \cdots (16)$$

となり

$$p(x)=p_{CR}(x)+i\,p_{SI}(x), \quad \text{〃} \qquad (17)$$

の形つまり実部は偶で虚部は奇となり、明らかに $A(k)$ は実となる。

又(14)の場合は第1,4式より

$$\left.\begin{aligned} &p_{SR}(x)=p_{SI}(x)=0 \quad \text{for (14)}, \\ &p(x)=p_{SR}(x)+i\,p_{CI}(x), \quad \text{〃} \end{aligned}\right\} (18)$$

となり、$A(k)$ は純虚数値になる。

そして(9)から

$$\left.\begin{aligned} A(K)&=A_a(K)-iK\,A(K)A_w(K)+iK'A(K')A'_w(K), \\ A(K')&=A_a(K')-iK\,A(K)A_w(K')+iK'A(K')A'_w(K'), \end{aligned}\right\} (19)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} A_w(k)&=\frac{\gamma}{2(K'-K)}\int_{-1}^{1}p_w(x)\,e^{-ikx}\,dx \\ A'_w(k)&=\frac{\gamma}{2(K'-K)}\int_{-1}^{1}p'_w(x)\,e^{-ikx}\,dx \end{aligned}\right\} (20)$$

これを $A(K)$, $A(K')$ について解くと、

$$\left.\begin{aligned} A(K)&=\frac{1}{\Delta}\Big[\{1-iK'A'_w(K')\}A_a(K)+iK'A'_w(K)A_a(K')\Big], \\ A(K')&=\frac{1}{\Delta}\Big[-iK\,A_w(K')A_a(K)+\{1+iK\,A_w(K)\}A_a(K')\Big], \end{aligned}\right\} (21)$$

$$\Delta = 1+i\{K A_w(K)-K'A'_w(K')\}+KK'\{A_w(K)A'_w(K')-A'_w(K)A_w(K')\}, \quad (22)$$

を得る。

昭和　　年　　月　　日

(9) 式で特に (1) の $\eta(x)$ が e^{iKx}, $e^{iK'x}$ に対する解を $P_d(x)$, $P_d'(x)$ とおくと.

$$\left.\begin{aligned} P_d(x) &= \{1 - iKA_d(K)\}P_w(x) + iK'A_d(K')P_w'(x), \\ P_d'(x) &= -iKA_d'(K)P_w(x) + \{1 + iK'A_d'(K')\}P_w'(x), \end{aligned}\right\} (23)$$

となる故 (21) は.

$$\left.\begin{aligned} A_d(K) &= \frac{1}{\Delta}\left[A_w(K) - iK'\{A_w'(K')A_w(K) - A_w(K')A_w'(K)\}\right] \\ A_d(K') &= \frac{1}{\Delta}A_w(K'), \\ A_d'(K) &= \frac{1}{\Delta}A_w'(K), \\ A_d'(K') &= \frac{1}{\Delta}\left[A_w'(K') + iK\{A_w(K)A_w'(K') - A_w(K')A_w'(K)\}\right], \end{aligned}\right\} (24)$$

となる。

一方 相反定理より (これは (1) から直接証明出来る)

$$\left.\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_d(x)\hat{\eta}(x)dx &= \int_{-1}^{1}\hat{P}(x)e^{iKx}dx = \frac{2(K-K)}{\gamma}A(K), \\ \int_{-1}^{1} P_d'(x)\hat{\eta}(x)dx &= \int_{-1}^{1}\hat{P}(x)e^{iK'x}dx = \frac{2(K-K)}{\gamma}A(K'), \end{aligned}\right\} (25)$$

又 (6), (7) (8) より

$$\left.\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_w(x)\hat{\eta}(x)dx &= \int_{-1}^{1}\hat{P}_a(x)e^{iKx}dx = \frac{2(K-K)}{\gamma}A_a(K), \\ \int_{-1}^{1} P_w'(x)\hat{\eta}(x)dx &= \int_{-1}^{1}\hat{P}_a(x)e^{iK'x}dx = \frac{2(K-K)}{\gamma}A_a(K'), \end{aligned}\right\} (26)$$

であるから (23) より

$$\left.\begin{aligned} A(K) &= \{1 - iKA_d(K)\}A_a(K) + iK'A_d(K')A_a(K'), \\ A(K') &= -iKA_d'(K)A_a(K) + \{1 + iK'A_d'(K')\}A_a(K'), \end{aligned}\right\} (27)$$

(24) を代入すると (21) に一致する。

但し $A_w'(K) = A_w(K')$

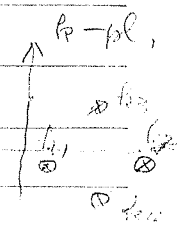
昭和　　年　　月　　日

C. 境界値問題の変形とその解について

積分方程式は与えられた $\eta(x)$ について次の形になる。

$$\eta(x)=\int_{-1}^{1}p(x')S(x-x')\,dx', \quad \cdots \quad (1)$$

$$S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{e^{ikx}}{A(k)}+\frac{e^{-ikx}}{B(k)}\right\}k\,dk, \quad \cdots \quad (2)$$



$$\left.\begin{aligned}A(k)&=(k-\alpha)^2+\mu i(k-\alpha)-\gamma k\\&=(k-k_1)(k-k_2)\\B(k)&=(k+\alpha)^2-\mu i(k+\alpha)-\gamma k\\&=(k+k_3)(k+k_4)\end{aligned}\right\}\quad (3)$$

今

$$\int_{-1}^{1}p(x')e^{ikx'}dx'=F(k), \quad \cdots \quad (4)$$

とおくと、(1)は又次のように書ける。

$$\eta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left[\frac{F(-k)}{A(k)}e^{ikx}+\frac{F(k)}{B(k)}e^{-ikx}\right]k\,dk, \quad (5)$$

さて

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(-k)e^{ikx}dk=\lim_{y\to-0}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}p(x')dx'\int_0^\infty e^{ik(x-x')-ky}dk$$

$$=\lim_{y\to-0}\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(x')\,dx'}{(x-x')-iy}=p(x)-iq(x), \quad \cdots \quad (6)$$

$$q(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(x')}{x'-x}dx' \quad \cdots \quad (7)$$

同様にして

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(k)e^{-ikx}dk=p(x)+iq(x), \quad \cdots \quad (8)$$

$-ikx-\mu x$

よって

$$e^{ik_jx}\int_{+\infty}^{x}\{p(x)-iq(x)\}e^{-ik_jx}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(-k)dk\cdot e^{ik_jx}\int_{+\infty}^{x}e^{i(k-k_j)x}dx$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty\frac{F(-k)}{k-k_j}e^{ikx}dk, \quad \cdots \quad (9)$$

$j=1,2.$

$-ik_3x = -ik_3'x + \ldots$

$$\left.\begin{aligned} e^{ik_3x}\int_{-\infty}^{x}(p+iq)e^{-ik_3x}dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\overline{F}(k)}{k+k_3}e^{-ikx}dk, \\ e^{ik_4x}\int_{+\infty}^{x}\{p+iq\}e^{-ik_4x}dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\overline{F}(k)}{k+k_4}e^{-ikx}dk; \end{aligned}\right\} \quad (10).$$

なお右辺は $x\to\infty$ で 0 と考えられるから

$$e^{ik_jx}\int_{-\infty}^{x}(p\pm iq)e^{-ik_jx}dx = e^{ik_jx}\int_{+\infty}^{x}(p\pm iq)e^{-ik_3x}dx,$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty}(p\pm iq)e^{-ik_jx}dx = 0$$

又 $p(x)=0$ for $|x|>1$ となる事に注意。

今

$$\left.\begin{aligned} \chi_j(x) &= e^{ik_jx}\int_{+\infty}^{x}(p-iq)e^{-ik_jx}dx \quad \text{for } j=1,2. \\ &= e^{ik_jx}\int_{+\infty}^{x}(p+iq)e^{-ik_jx}dx \quad \text{for } j=3,4 \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

とおくと

$$\frac{1}{A(k)} = -\left(\frac{-1}{k-k_1}+\frac{1}{k-k_2}\right)\frac{1}{-k_1+k_2}$$

$$\frac{1}{B(k)} = \frac{1}{k_4-k_3}\left(\frac{1}{k-k_4}-\frac{1}{k-k_3}\right)$$

$$\frac{k}{A(k)} = \frac{1}{k_1-k_2}\left(\frac{k_1}{k-k_1}-\frac{k_2}{k-k_2}\right)$$

$$\frac{k}{B(k)} = \frac{1}{-k_3-k_4}\left(\frac{k_3}{k-k_3}-\frac{-k_4}{k-k_4}\right)$$

となるから

$$\left.\begin{aligned} 2\zeta(x) &= \frac{i}{k_1-k_2}\left[k_1\chi_1(x)-k_2\chi_2(x)\right]+\frac{(-i)}{k_3-k_4}\left[k_3\chi_3(x)-k_4\chi_4(x)\right], \\ 2\int_{+\infty}^{x}\eta(x)dx &= \frac{1}{k_1-k_2}\left[\chi_1(x)-\chi_2(x)\right]+\frac{1}{k_3-k_4}\left[\chi_3(x)-\chi_4(x)\right], \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

昭和　年　月　日

さてここで次の operator を定義しよう。

$$\left.\begin{aligned} L &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}-i\alpha\right)^4+\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}=l_1 l_2 \\ l_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}-i\alpha\right)^2-i\gamma\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-ik_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-ik_2\right) \\ l_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}-i\alpha\right)^2+i\gamma\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-ik_3\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-ik_4\right)\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

そうすると明らかに $l_1 e^{ikx}=-A(k)e^{ikx}$, $l_2 e^{ikx}=-B(-k)e^{ikx}$.

$$\left.\begin{aligned} l_1 e^{-ikx} &= -A(-k)e^{-ikx},\quad l_2 e^{-ikx}=-B(k)e^{-ikx} \\ Le^{ikx} &= A(k)B(-k)e^{ikx},\quad Le^{-ikx}=A(-k)B(k)e^{-ikx}\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

そこで (5) を x で一回積分して、L をかけると

$$L\int_{+\infty}^{x}\eta(x)dx=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\bar{F}(-k)B(-k)e^{ikx}-\bar{F}(k)A(-k)e^{-ikx}\right]dk,$$

$$=\frac{-l_2}{2i}\{p(x)-iq(x)\}+\frac{l_1}{2i}\{p+iq\}$$

$$=\frac{1}{2i}(l_1-l_2)p+\frac{1}{2}(l_1+l_2)q$$

よって

$$L\int_{+\infty}^{x}\eta(x)dx=-\gamma p_x(x)+\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\alpha\right)^2 q(x),\quad\cdots(15)$$

を得る。

さらに

$$\left.\begin{aligned} Q(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}p(x')\log|x-x'|dx' \\ \frac{d}{dx}Q(x) &= q(x)\end{aligned}\right\}\cdots(16)$$

のように Q を定義すると (15) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\alpha\right)^2 Q(x)-\gamma p(x)=f(x),\quad\cdots(17)$$

昭和　　年　　月　　日

とかけ，散乱問題では

$$f(x) = c_1 x + c_0 .$$

上下動では２次，曲げゆれでは３次の関数となる。

(17)を２階の微分方程式と見ると２つの斉次解を有するので散乱問題では上の任意定数 c_0, c_1 に対応する解と合せて４つの解を有しそれらが４つの散乱波（今はその中２つが虚部波となっているが）に対応している。

さて(17)を次のように書く事が出来る。

$$l_1 Q(x) - \gamma\{p(x) - i g(x)\} = f(x) , \qquad (18)$$

$$l_2 Q(x) - \gamma\{p(x) + i g(x)\} = f(x) , \qquad (19)$$

夫々 $Q(x)$ に対する微分方程式と見たて，解くと(18)から

$$Q(x) = a_1 e^{ik_1 x} + a_2 e^{ik_2 x} + f^{(1)}(x) - \frac{\gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{\overline{F}(-k)}{A(k)} e^{ikx} dk , \qquad (20)$$

~~(19)から~~

$$Q(x) = -a_3 e^{ik_3 x} - a_4 e^{ik_4 x} + f^{(2)}(x) - \frac{\gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{\overline{F}(k)}{B(k)} e^{-ikx} dk , \qquad (21)$$

となるが $f^{(1)}, f^{(2)}, f$ の間には

$$l_1 f^{(1)}(x) = f(x) = l_2 f^{(2)}(x) , \qquad (22)$$

なる関係があるがここで $f^{(1)}, f^{(2)}$ は x の多項式とする。

a_n は任意常数であるが(20),(21)は同じ関数であるから例えば $a_3, a_4, f^{(2)}$ は $a_1, a_2, f^{(1)}$ で表わせる。

その前に(20),(21)を x で微分すると

$$g(x) = ik_1 a_1 e^{ik_1 x} + ik_2 a_2 e^{ik_2 x} + f_x^{(1)}(x) - \frac{i\gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{\overline{F}(-k)}{A} e^{ikx} k\, dk , \qquad (23)$$

$$g(x) = -ik_3 a_3 e^{ik_3 x} - ik_4 a_4 e^{ik_4 x} + f_x^{(2)}(x) + \frac{i\gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{\overline{F}(k)}{B} e^{-ikx} k\, dk , \qquad (24)$$

を得る故両式を比較すると(5)によって，

昭和　　年　　月　　日

$$2\gamma\eta(x) = \frac{\gamma}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{F(-k)}{A(k)} e^{ikx} + \frac{F(k)}{B(k)} e^{-ikx} \right] k\,dk$$

$$= -i\left\{ f_x^{(1)}(x) - f_x^{(2)}(x) \right\} + k_1 a_1 e^{ik_1 x} + k_2 a_2 e^{ik_2 x} + k_3 a_3 e^{ik_3 x} + k_4 a_4 e^{ik_4 x} \quad \cdots (25)$$

を得る。

先づ散乱問題では例えば

$$\eta(x) = e^{ik_1 x} \quad \text{ならば}$$

$$\left. \begin{aligned} & f_x^{(1)}(x) = f_x^{(2)}(x), \quad k_1 a_1 = 2\gamma \\ & a_2 = a_3 = a_4 = 0 \end{aligned} \right\} \cdots (26)$$

新らしく

$f^{(1)}(x) = c_0 + c_1 x$ とおけば

$$l_1 f^{(1)}(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i(2\alpha+\gamma)\frac{\partial}{\partial x} - \alpha^2\right)(c_0 + c_1 x) = -\alpha^2(c_0 + c_1 x) - i(2\alpha+\gamma)c_1$$

一方

$$f^{(2)}(x) = c_0' + c_1 x, \quad (\because f_x^{(2)}(x) = f_x^{(1)}(x))$$

$$l_2 f^{(2)}(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i(2\alpha-\gamma)\frac{\partial}{\partial x} - \alpha^2\right)(c_0 + c_1 x) = -\alpha^2(c_0' + c_1 x) - i(2\alpha-\gamma)c_1$$

(22) によリ

$$-\alpha^2 c_0 - i(2\alpha+\gamma)c_1 = -\alpha^2 c_0' - i(2\alpha-\gamma)c_1$$

つまり

$$\left. \begin{aligned} & c_0' = c_0 + \frac{2i\gamma}{\alpha^2} c_1, \\ & f^{(1)}(x) = c_0 + c_1 x, \\ & f^{(2)}(x) = c_0' + c_1 x, \end{aligned} \right\} \cdots\cdots (27)$$

を得る。

昭和　　年　　月　　日

上下動では　$\eta(x) = 1$ とすると．

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, \\ &2\gamma = -i\{ f_x^{(1)}(x) - f_x^{(2)}(x) \}, \end{aligned}\right\} \cdots (28)$$

となるから

$$\left.\begin{aligned} &f^{(1)}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \\ &f^{(2)}(x) = c_0' + c_1' x + c_2' x^2. \end{aligned}\right\} \cdots (29)$$

とおくと

$$\left.\begin{aligned} &l_1 f^{(1)}(x) = 2c_2 - i(2\alpha+\gamma)(2c_2 x + c_1) - \alpha^2(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \\ &= l_2 f^{(2)}(x) = 2c_2' - i(2\alpha-\gamma)(2c_2' x + c_1') - \alpha^2(c_0' + c_1' x + c_2' x^2) \\ &2\gamma i = c_1 + 2c_2 x - (c_1' + 2c_2' x) \end{aligned}\right\}.$$

$$\therefore \quad c_2 = c_2'$$

$$c_1' = c_1 - 2i\gamma$$

$$-i(2\alpha+\gamma)2c_2 x - \alpha^2 c_1 x - i(2\alpha+\gamma)c_1 - \alpha^2 c_0$$

$$= -i(2\alpha-\gamma)2c_2 x - \alpha^2 c_1' x - i(2\alpha-\gamma)c_1' - \alpha^2 c_0'$$

$(c_1 - 2i\gamma)$　　$+2i\gamma\alpha^2$

$$\left.\begin{aligned} &-2i\gamma c_2 - \alpha^2 c_1 = +2i\gamma c_2 - \alpha^2 c_1' \\ &\alpha^2 c_0 + i(2\alpha+\gamma)c_1 = \alpha^2 c_0' + i(2\alpha-\gamma)c_1' \end{aligned}\right\}.$$

$$\left.\begin{aligned} &c_2 = -\alpha^2/2 = c_2' \\ &c_0' = c_0 + \frac{i}{\alpha^2}\left[(2\alpha+\gamma)c_1 - (2\alpha-\gamma)(c_1 - 2i\gamma)\right] = \\ &\quad = c_0 + \frac{i}{\alpha^2}\left[2\gamma c_1 + 2i\gamma(2\alpha-\gamma)\right] \\ &c_1' = c_1 - 2i\gamma \end{aligned}\right\} (30)$$

c_0, c_1 は任意定数となる。

縦ゆれでは　$\zeta(x) = x$　とすると、

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \\ &2\gamma x = -i\{f_x^{(1)}(x) - f_x^{(2)}(x)\} \end{aligned}\right\} \cdots (31)$$

尚

$$\left.\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \\ f^{(2)}(x) &= C_0' + C_1' x + C_2' x^2 + C_3' x^3 \end{aligned}\right\} \cdots (32)$$

とおいて、

$$2i\gamma x = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 - C_1' - 2C_2' x - 3C_3' x^2.$$

$$\left.\begin{aligned} &C_3 = C_3', \quad C_1 = C_1' \\ &C_2 - C_2' = i\gamma \end{aligned}\right\}$$

を得る。

$$l_1 f^{(1)}(x) = 2C_2 + 6C_3 x - i(2\alpha+\gamma)(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2) - \alpha^2(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3)$$

$$l_2 f^{(2)}(x) = 2C_2' + 6C_3' x - i(2\alpha-\gamma)(C_1' + 2C_2' + 3C_3' x^2) - \alpha^2(C_0' + C_1' x + C_2' x^2 + C_3' x^3).$$

$$\left.\begin{aligned} &2C_2 - i(2\alpha+\gamma)C_1 - \alpha^2 C_0 = 2C_2' - i(2\alpha-\gamma)C_1' - \alpha^2 C_0' \\ &6C_3 - 2i(2\alpha+\gamma)C_2 - \alpha^2 C_1 = 6C_3' - 2i(2\alpha-\gamma)C_2' - \alpha^2 C_1' \\ &-i(2\alpha+\gamma)3C_3 - \alpha^2 C_2 = -i(2\alpha-\gamma)3C_3' - \alpha^2 C_2' \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &-6i\gamma C_3 = i\gamma\alpha^2, \quad C_3 = -\frac{\alpha^2}{6} = C_3' \\ &-4i\gamma C_2 = -2\gamma(2\alpha-\gamma), \quad C_2 = -\frac{i}{2}(2\alpha-\gamma), \\ &\qquad C_2' = C_2 - i\gamma = -\frac{i}{2}(2\alpha+\gamma), \\ &2i\gamma - 2i\gamma C_1 - \alpha^2 C_0 = -\alpha^2 C_0', \quad C_0' = C_0 - \frac{2i\gamma}{\alpha^2}(1 - C_1), \\ &\qquad C_1' = C_1 \end{aligned}\right\} (33)$$

となり　やはり、C_0, C_1 は任意となる。

一般に　$\eta(x) = x^n$，$n \geq 2$ では.

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \\ &2i\gamma x^n = f_x^{(1)}(x) - f_x^{(2)}(x) \end{aligned}\right\} \cdots \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= c_0 + c_1 x + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + c_{n+2} x^{n+2} \\ f^{(2)}(x) &= c_0' + c_1' x + c_n' x^n + c_{n+1}' x^{n+1} + c_{n+2}' x^{n+2} \end{aligned}\right\} (35)$$

$$2i\gamma x^n = c_1 + n c_n x^{n-1} + (n+1) c_{n+1} x^n + (n+2) c_{n+2} x^{n+1}$$
$$- \left[c_1' + n c_n' x^{n-1} + (n+1) c_{n+1}' x^n + (n+2) c_{n+2}' x^{n+1} \right].$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} &c_1 = c_1', \quad c_n = c_n', \quad c_{n+2} = c_{n+2}' \\ &2i\gamma = (n+1)\left[c_{n+1} - c_{n+1}' \right] \end{aligned}\right\}$$

$$l_1 f^{(1)}(x) = -\alpha^2 (c_0 + c_1 x) - i(2\alpha+\gamma) c_1 + \left\{ n(n-1) c_n x^{n-2} + (n+1) n c_{n+1} x^{n-1} + (n+2)(n+1) c_{n+2} x^{n} \right\}$$
$$- i(2\alpha+\gamma)\left[n c_n x^{n-1} + (n+1) c_{n+1} x^n + (n+2) c_{n+2} x^{n+1} \right]$$
$$- \alpha^2 \left[c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + c_{n+2} x^{n+2} \right].$$

$$= -\alpha^2 c_0 - i(2\alpha+\gamma) c_1 - \alpha^2 c_1 x + n(n-1) c_n x^{n-2}$$
$$+ \left\{ (n+1) n c_{n+1} - n i (2\alpha+\gamma) c_n \right\} x^{n-1}$$
$$+ \left\{ (n+2)(n+1) c_{n+2} - i(2\alpha+\gamma)(n+1) c_{n+1} - \alpha^2 c_n \right\} x^n$$
$$+ \left\{ -i(2\alpha+\gamma)(n+2) c_{n+2} - \alpha^2 c_{n+1} \right\} x^{n+1} - \alpha^2 c_{n+2} x^{n+2}.$$

$$= l_2 f^{(2)}(x) = -\alpha^2 c_0' - i(2\alpha-\gamma) c_1' - \alpha^2 c_1' x + n(n-1) c_n' x^{n-2}$$
$$+ \left\{ (n+1) n c_{n+1}' - n i (2\alpha-\gamma) c_n' \right\} x^{n-1}$$
$$+ \left\{ (n+2)(n+1) c_{n+2}' - i(2\alpha-\gamma)(n+1) c_{n+1}' - \alpha^2 c_n' \right\} x^n$$
$$+ \left\{ -i(2\alpha-\gamma)(n+2) c_{n+2}' - \alpha^2 c_{n+1}' \right\} x^{n+1} - \alpha^2 c_{n+2}' x^{n+2}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} &i(2\alpha+\gamma)(n+2) c_{n+2} + \alpha^2 c_{n+1} = i(2\alpha-\gamma)(n+2) c_{n+2} + \alpha^2 c_{n+1}' \\ &(2\alpha+\gamma) c_{n+1} = (2\alpha-\gamma) c_{n+1}' = (2\alpha-\gamma)\left\{ c_{n+1} - \frac{2i\gamma}{n+1} \right\} \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore 2\gamma c_{n+1} = -\frac{2i\gamma(2\alpha-\gamma)}{n+1}, \qquad c_{n+1} = -\frac{i(2\alpha-\gamma)}{n+1}$$

$$2i\gamma(n+2) c_{n+2} = \frac{\alpha^2}{n+1}(-2i\gamma). \qquad c_{n+2} = -\frac{\alpha^2}{(n+1)(n+2)}$$

昭和　　年　　月　　日

$$(n+1)n\{C_{n+1}-C'_{n+1}\} = ni(2\alpha+\gamma)C_n - ni(2\alpha-\gamma)C'_n$$

$$2in\gamma = 2ni\gamma C_n \quad , \quad c_n = 1$$

結局

$$\left.\begin{aligned} &c_n = 1, \quad C_{n+1} = -\frac{i(2\alpha-\gamma)}{n+1}, \quad C_{n+2} = -\frac{\alpha^2}{(n+1)(n+2)} \\ &C'_n = C_n = 1, \quad C'_{n+2} = C_{n+2} \\ &C'_{n+1} = c_{n+1} - \frac{2i\gamma}{n+1} = -\frac{i}{(n+1)}(2\alpha+\gamma), \end{aligned}\right\} (36)$$

となり

$$C'_1 = c_1 \quad , \quad C'_0 = c_0 + \frac{2i\gamma}{\alpha^2}c_1 \quad , \quad \text{--}\ (36')$$

は散乱問題と(27)と同じでやはり任意となる。

これらと上下動、縦ゆれの場合を較べて見ると、結局一般に(34), (35), (36)とすればよく、それにさらに c_0, c_1 は(36') or (27)のようにとってこれは任意定数としておけばよい。

従って例えば(20)を解いて解を求めるとすると、解くべき数は

散乱問題では	a_1, a_2, c_0, c_1 に対する	4つ
上下動	c_0, c_1, c_2 〃	3つ
縦ゆれ 〃	c_0, c_1, c_2, c_3 〃	4つ
$n \geq 2$ では	$c_0, c_1, c_n, c_{n+1}, c_{n+2}$ 〃	5つ

となるが c_0, c_1 に対する解は勿論同じであるから上下動、縦ゆれを共に解いて計4つとなり結局縦ゆれを解いておけばその解で上下動の解をつくる事が出来る。

昭和　年　月　日

さて元に戻つて(20),(21)を(10),(11)によつてかきかえると.

$$
\left.\begin{aligned}
Q(x) &= a_1 e^{ik_1x} + a_2 e^{ik_2x} + f^{(1)}(x) - \frac{\gamma i}{k_1-k_2}\left[\chi_1(x) - \chi_2(x)\right], \\
Q(x) &= -a_3 e^{ik_3x} - a_4 e^{ik_4x} + f^{(2)}(x) + \frac{i\gamma}{k_3-k_4}\left[\chi_3(x) - \chi_4(x)\right],
\end{aligned}\right\} (37)
$$

又(23),(24)は.

$$
\left.\begin{aligned}
P(x) &= ik_1a_1e^{ik_1x} + ik_2a_2e^{ik_2x} + f_x^{(1)}(x) + \frac{\gamma}{k_1-k_2}\left[k_1\chi_1(x) - k_2\chi_2(x)\right], \\
P(x) &= -ik_3a_3e^{ik_3x} - ik_4a_4e^{ik_4x} + f_x^{(2)}(x) + \frac{(-\gamma)}{k_3-k_4}\left[k_3\chi_3(x) - k_4\chi_4(x)\right],
\end{aligned}\right\} (38)
$$

(37)の第1式を解くものとしその解を

$$
\left.\begin{aligned}
Q_{d1}(x) &= e^{ik_1x} - \frac{\gamma i}{k_1-k_2}\left[\chi_1^{(d1)}(x) - \chi_2^{(d2)}(x)\right], \\
Q_{d2}(x) &= e^{ik_2x} - \frac{\gamma i}{k_1-k_2}\left[\chi_1^{(d2)}(x) - \chi_2^{(d2)}\right],
\end{aligned}\right\} (39)
$$

$$
Q_n(x) = x^n - \frac{\gamma i}{k_1-k_2}\left[\chi_1^{(n)}(x) - \chi_2^{(n)}\right], \quad (40)
$$

と　for $P(x) = P_{dn}^{(d\,n)}(x)$, $P = P_n^{(n)}(x)$

とおく事にしよう。

a_3, a_4 の散乱問題はとく必要なく(37)第1式で $a_1, a_2 \neq 0$ とおき(40)の解 $P_0(x)$, $P_1(x)$ を(37),(38)の夫々第2式に代入すれば定数 c_0, c_1 が定まるので解は $P(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x)$ の形に与えられる。今は $a_3 = a_4 = 0$ となるのでこれらの解について考える必要は無く, (37),(38)の第2式は(39),(40)の解を組合せて求める解を作る為の副条件になる。

例えば $\eta = e^{ik_1 x}$ とすると. $a_2 = a_3 = a_4 = 0$

$a_1 = 2\gamma/k_1$, $f^{(1)}(x) = c_0 + c_1 x$. $f^{(c)}(x) = c_0' + c_1 x$

故 (39), (40)により 解は. $c_0' = c_0 + \frac{2i\gamma}{\alpha^2} c_1$

$$p(x) = \frac{2\gamma}{k_1} p_{d1}(x) + c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x), \qquad (41)$$

の形になるが $a_3 = a_4 = 0$ の条件は (37), (38)の第2式に代入して

$$\frac{2\gamma}{k_1} Q_{d1}(x) + c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) = c_0 + \frac{2i\gamma}{\alpha^2} c_1 + c_1 x + \frac{i\gamma}{k_3-k_4}\left[\frac{2\gamma}{k_1}\{X_3^{d1}(x) - X_4^{(d1)}\} + c_0\{X_3^0 - X_4^0\} + c_1\{X_3^1 - X_4^1\}\right],$$

が

$$\frac{2\gamma}{k_1} q_{d1}(x) + c_0 q_0(x) + c_1 q_1(x) = c_1 - \frac{\gamma}{k_3-k_4}\left[\frac{2\gamma}{k_1}\{k_3 X_3^{d1} - k_4 X_4^{d1}\} + c_0\{k_3 X_3^0 - k_4 X_4^0\} + c_1\{k_3 X_3^1 - k_4 X_4^1\}\right], \qquad (42)$$

で c_0, c_1 が決まる。

これらの式は恒等式であるから特定の点 例えば $x = \pm 1$ で等置すればよい。

ここで $$\chi_j^{(n)}(1) = X_j^{(n)} = i e^{ik_j}\int_{+\infty}^{1} g(x) e^{-ik_j x} dx = -i e^{ik_j}\int_{+\infty}^{1} (p + iq) e^{-ik_j x} dx, \qquad (43)$$ $j = 3, 4$

とおくと.

$$\frac{2\gamma}{k_1}\left[Q_{d1}(1) - \frac{i\gamma}{k_3-k_4}\left(X_3^{(d1)} - X_4^{(d1)}\right)\right] = c_0\left[1 - Q_0(1) + \frac{i\gamma}{k_3-k_4}\left(X_3^{(0)} - X_4^{(0)}\right)\right] + c_1\left[\left(1 + \frac{2i\gamma}{\alpha^2}\right) - Q_1(1) + \frac{i\gamma}{k_3-k_4}\left(X_3^{(1)} - X_4^{(1)}\right)\right],$$

$$\frac{2\gamma}{k_1}\left[q_{d1}(1) + \frac{\gamma}{k_3-k_4}\left(k_3 X_3^{(d1)} - k_4 X_4^{(d1)}\right)\right] = -c_0\left[q_0(1) + \frac{\gamma}{k_3-k_4}\left(k_3 X_3^{(0)} - k_4 X_4^{(0)}\right)\right] - c_1\left[q_1(1) + \frac{\gamma}{k_3-k_4}\left(k_3 X_3^{(1)} - k_4 X_4^{(1)}\right)\right], \qquad (44)$$

によって c_0, c_1 が定まる。

昭和　　年　　月　　日

$y = e^{ik_2x}$ については (d1) の所に (d2) を用いて $k_1 \to k_2$ とすればよい。

上下動については、a_1, a_2, a_3, a_4 が 0 で $c_2 = -\frac{\alpha^2}{2}$ であるから基本解に $P_2(x)$ をとっておけば後は全く同様になりやはり (44) の形で c_0, c_1 が定まる。

昭和　年　月　日

散乱問題は最終的には必要がないので結局(40)式を $n=0\sim3$ の4つの解を得れば今は充分である。
以下その解について考えて見よう。
さて　$x=-\cos\theta$ とおくと

$$p_n(x) = \frac{1}{\sin\theta}\sum a_m^n \cos m\theta = \frac{\varphi_n(\theta)}{\sin\theta}, \qquad (45)$$

$$q_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi_n(\theta')\,d\theta'}{\cos\theta-\cos\theta'} = \sum_{m=0}^\infty a_m^n \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}, \qquad (46)$$

$$Q_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_n(\theta')\log|\cos\theta-\cos\theta'|\,d\theta' = a_0^n \log 2 + \sum_{m=1}^\infty \frac{a_m^n}{m}\cos m\theta, \qquad (47)$$

なお $|x|>1$ に対しては　$x=+\mathrm{ch}\,u>1$ とすると

$$q_n(\mathrm{ch}\,u) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi_n(\theta')\,d\theta'}{\mathrm{ch}\,u+\cos\theta'} = -\frac{1}{\pi}\sum \frac{\varepsilon_m e^{-mu}(-1)^m}{\mathrm{sh}\,u}\int_0^\pi \varphi_n(\theta')\cos m\theta'\,d\theta'$$

$$= -\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m e^{-mu}}{\mathrm{sh}\,u} a_m^n \quad \text{for } x>1, \qquad (48)$$

今の場合(40)では不便なので次のようにとっておこう。

$$Q_n(x) = \cos n\theta + \frac{i\gamma}{k_2-k_1}\left[\chi_1^{(n)}(x) - \chi_2^{(n)}(x)\right], \qquad (49)$$

さて　G.F.Miller の記号を使おう。*

$$\left.\begin{aligned} C_n(x,k)+iS_n(x,k) &= e^{ikx} I_n(x,k), \\ I_n(x,k) &= P\int_0^\infty \frac{J_n(t)\,e^{ix(t-k)}}{t-k}\,dt, \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

* G.F.Miller; P.R.S. vol. 243 (1958)

昭和　年　月　日

$$\chi_j(x) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\overline{F}(-k)}{k-k_j} e^{ikx} dk = -\overline{F}(-k_j) e^{ik_j x} + \frac{P}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\overline{F}(-k) e^{ikx}}{k-k_j} dk$$

$$\overline{F}_n(-k) = \int_{-1}^{1} P_n(x) e^{-ikx} dx = \sum a_m^n \int_0^\pi e^{ik\cos\theta} \cos m\theta \, d\theta$$

$$= \pi \sum_{m=0}^\infty i^m a_m^n J_m(k), \qquad (51)$$

$$\therefore \quad \chi_j^{(n)}(x) = -\overline{F}_n(-k_j) e^{-ik_j\cos\theta} + \frac{1}{i}\sum_{m=0}^\infty i^m a_m^n P\int_0^\infty \frac{J_m(k) e^{ikx}}{k-k_j} dk$$

$$= -\overline{F}_n(-k_j) e^{-ik_j\cos\theta} + \sum_{m=0}^\infty i^{m-1} a_m^n \{ C_m(x, k_j) + i S_m(x, k_j) \}, \qquad (52)$$

$j = 1, 2$

さらに
$$e^{ikx} = e^{-ik\cos\theta} = \sum_{\mu=0}^\infty (-i)^\mu J_\mu(k) \varepsilon_\mu \cos\mu\theta$$

であるから、

$$\chi_j^{(n)}(x) = -\overline{F}_n(-k_j) \sum_{\mu=0}^\infty \varepsilon_\mu (-i)^\mu J_\mu(k_j) \cos\mu\theta + \sum_{m=0}^\infty \sum_{\mu=0}^\infty i^{m-\mu-1} \varepsilon_\mu a_m^n \overline{C}_{m,\mu}^{\,j} \cos\mu\theta, \qquad (53)$$

$$\overline{C}_{m,\mu} = P\int_0^\infty \frac{J_m(k) J_\mu(k)}{k-k_j} dk, \quad j = 1, 2. \qquad (54)$$

としよう。

(49)に代入して $\cos\mu\theta$ の項を較べれば

$$a_0^n \log 2 = \delta(n) + \frac{i\gamma}{k_2-k_1}\left[-\overline{F}_n(-k_j) J_0(k_j) + \sum_{m=0}^\infty i^{m-1} a_m^n C_{m,0}\right],$$

$$\frac{a_\mu^n}{\mu} = \delta(n-\mu) + \frac{2\gamma i^{1-\mu}}{k_2-k_1}\left[-\overline{F}_n(-k_j) J_\mu(k_j) - i\sum_{m=0}^\infty i^m a_m^n C_{m,\mu}\right],$$

を得る。 但し
$$\delta(n-\mu) = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq \mu \\ 1 & \text{for } n = \mu \end{cases}$$

(51)を代入すると.

$$a_0^n l_y z = \delta(n) + \frac{\gamma}{k_2 - k_1} \sum_{m=0}^{\infty} i^m a_m^n C_{m,0}(k_j), \qquad \left.\right\} \quad (55)$$

$$\frac{a_\mu^n}{\mu} = \delta(n-\mu) + \frac{2\gamma}{k_2 - k_1} \sum_{m=0}^{\infty} i^{m+\mu} a_m^n C_{m,\mu}(k_j),$$

$$C_{m,\mu}(k_j) = \int_0^{\infty} \frac{J_m(k) J_\mu(k)}{k - k_j} dk$$

$$= \overline{C}_{m,\mu}(k_j) - i \overline{D}_{m,\mu}(k_j), \qquad (56)$$

$$D_{m,\mu}(k_j) = \pi J_m(k_j) J_\mu(k_j),$$

昭和　年　月　日

別法としては(17)を解いて斉次解2つを含むすべての解の線型結合を(20), (21)に代入して定数を決定する方法もあるが斉次解を求めるのが少し面倒である。

又(17)を$Q(x)$についてとけば

$$Q(x)=d_1e^{i\alpha x}-d_2xe^{i\alpha x}+f^{(0)}(x)$$

$$+\gamma e^{i\alpha x}\int_{-1}^{x}p(\xi)(x-\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi, \quad (57)$$

但し

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\alpha\right)^2 f^{(0)}(x)=f(x), \quad (58)$$

$f^{(0)}(x)$はxの多項式とする。

この形の積分方程式ならば(17)の斉次解がexplicitに出ているのでその点便利であろう。

この形では一般に

$$Q(x)-\gamma e^{i\alpha x}\int_{-1}^{x}p(\xi)(x-\xi)e^{-i\alpha\xi}d\xi=\cos n\theta, \quad (59)$$

$x=\cos n\theta$

の形の積分方程式が解ければよい。

あるいは$e^{-i\alpha x}$を両辺にかけて

$$e^{i\alpha\cos\theta}Q(-\cos\theta)+\gamma\int_0^\theta p(-\cos\theta')(\cos\theta-\cos\theta')e^{i\alpha\cos\theta'}d\theta'\sin\theta'$$

$$=e^{i\alpha\cos\theta}\cos n\theta, \quad (59')$$

となるから

$$\left.\begin{aligned} p(-\cos\theta)&=\frac{\varphi(\theta)}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos m\theta \\ Q(-\cos\theta)&=a_0\log 2+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m}\cos m\theta \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

$$I_m(\theta,\alpha) = \frac{1}{\pi i^m}\int_0^\theta \cos m\theta' \, e^{i\alpha\cos\theta'} \, d\theta', \qquad (61)$$

$$= \frac{1}{2\pi i^m}\sum_{\nu=0}^{\infty} i^\nu \varepsilon_\nu J_\nu(\alpha)\left[\frac{\sin(m-\nu)\theta}{m-\nu} + \frac{\sin(m+\nu)\theta}{m+\nu}\right],$$

とおくと

$$\int_0^\theta P(\theta')(\cos\theta-\cos\theta') \, e^{i\alpha\cos\theta'} \, d\theta' = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_0^\theta \cos m\theta' (\cos\theta-\cos\theta') \, e^{i\alpha\cos\theta'} \, d\theta'$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} i^m a_m \left[\cos\theta \, I_m(\theta,\alpha) - \frac{1}{2i}\left\{I_{m-1}(\theta,\alpha) - I_{m+1}(\theta,\alpha)\right\}\right], \qquad (62)$$

$$\int_0^\pi \cos\mu\theta \, I_m(\theta,\alpha) \, d\theta = \frac{1}{\pi i^m}\int_0^\pi \cos\mu\theta \, d\theta \int_0^\theta \cos m\theta' \, e^{i\alpha\cos\theta'} \, d\theta' =$$

$$= \frac{1}{\pi i^m}\left[\frac{\sin\mu\theta}{\mu}\int_0^\theta \cos m\theta \, e^{i\alpha\cos\theta} \, d\theta \Big|_0^\pi - \frac{1}{\mu}\int_0^\pi \sin\mu\theta \cos m\theta \, e^{i\alpha\cos\theta} \, d\theta\right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi\mu i^m}\int_0^\pi e^{i\alpha\cos\theta}\left(\sin(\mu-m)\theta + \sin(\mu+m)\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{-1}{2\mu i^m}\left[(\mu-m)\, i^{\mu-m-1} E_{\mu-m}(\alpha) + (\mu+m)\, i^{\mu+m-1} E_{\mu+m}(\alpha)\right]$$

$$= \frac{i^{\mu+1}}{2\mu}\left[(-)^m(\mu-m)E_{\mu-m}(\alpha) + (\mu+m)E_{\mu+m}(\alpha)\right], \qquad (63)$$

$$E_n(\alpha) = \frac{(-i)^{n-1}}{\pi n}\int_0^\pi e^{-i\alpha\cos\theta} \sin n\theta \, d\theta, \qquad (64)$$

$$E_0(\alpha) = \frac{i}{\pi}\int_0^\pi e^{+i\alpha\cos\theta} \, \theta \, d\theta = \frac{\pi i}{2}J_0(\alpha) + \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-)^\nu}{(2\nu+1)^2}J_{2\nu+1}(\alpha),$$

$$E_1(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{i\alpha\cos\theta} \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi\alpha}\sin\alpha, \qquad (65)$$

$$E_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\pi e^{i\alpha\cos\theta} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\alpha}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha}{\alpha}\right],$$

$$E_{-n}(\alpha) = (-)^n E_n(\alpha)$$

$$\int_0^\pi \cos\mu\theta\, I_m(\theta,\alpha)\,d\theta = \frac{i^{\mu+1}}{2\mu}\left[(-1)^\mu(\mu-m)E_{m-\mu}(\alpha) + (\mu+m)E_{m+\mu}(\alpha)\right], \quad (65')$$

特に $\mu=0$ では

$$\int_0^\pi I_m(\theta,\alpha)\,d\theta = i E_m(\alpha), \quad (65'')$$

あらためて

$$i^{\mu+1} C_{m,\mu}(\alpha) = \int_0^\pi \cos\mu\theta\, I_m(\theta,\alpha)\,d\theta, \quad \cdots (66)$$

とおくと (62) によって (59') に $\cos\mu\theta$ をかけて積分すると

$$i^\mu \pi a_0 f_y \varepsilon J_\mu(\alpha) + \frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^\infty \frac{a_m}{m}\left\{i^{\mu-m}J_{\mu-m}(\alpha) + i^{m+\mu}J_{\mu+m}(\alpha)\right\}$$

$$+ \frac{\gamma i^\mu}{2}\sum_{m=0}^\infty i^m a_m\left[C_{m,\mu-1}(\alpha) - C_{m,\mu+1} - C_{m-1,\mu} + C_{m+1,\mu}\right],$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[i^{n+\mu}J_{n+\mu}(\alpha) + i^{n-\mu}J_{n-\mu}(\alpha)\right], \quad (67)$$

を得る。

所で γ は今の場合小さいとするので第0近似では

$$Q(x) = \cos n\theta, \quad \cdots (68)$$

であり これは 重力を無視した振動翼の解である。従って逐次近似解を構成するのは容易である。

昭和　　年　　月　　日

最後に(47)に附随する変分問題を考えておこう。
今次の積分を考えよう。

$$G = \int_{-1}^{1}\Big[Q'(x)\overline{Q'}(x) + i\alpha\{Q(x)\overline{Q'}(x) - \overline{Q}(x)Q'(x)\} + \alpha^2 Q\overline{Q} +$$

$$+\gamma p(x)\overline{Q}(x) + f(x)\overline{Q}(x) + \overline{f}(x)Q(x)\Big]dx, \quad (68)$$

上棒は complex conjugate, 肩符 ′ は x に関する微分を意味するものとし その変分をとつて見よう。

先ず

$$\delta\int_{-1}^{1} Q'(x)\overline{Q'}(x)dx = \int_{-1}^{1}\{Q'\delta\overline{Q'} + \overline{Q'}\delta Q'\}dx$$

$$= \left[Q'\delta\overline{Q} + \overline{Q'}\delta Q\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\{Q''\delta\overline{Q} + \overline{Q''}\delta Q\}dx,$$

$$\delta\int_{-1}^{1} Q\overline{Q'}dx = \int\{Q\delta\overline{Q'} + \overline{Q'}\delta Q\}dx =$$

$$= \left[Q\delta\overline{Q}\right]_{-1}^{1} + \int(\overline{Q'}\delta Q - Q'\delta\overline{Q})dx,$$

$$\delta\int_{-1}^{1} Q'\overline{Q}dx = \left[\overline{Q}\delta Q\right]_{-1}^{1} + \int(Q'\delta\overline{Q} - \overline{Q'}\delta Q)dx,$$

$$\delta\int_{-1}^{1} p\overline{Q}dx = \int\{\delta p\overline{Q} + p\delta\overline{Q}\}dx = \int_{-1}^{1}\{\overline{p}\delta Q + p\delta\overline{Q}\}dx.$$

となるから

$$\delta G = \left[\delta Q\{\overline{Q'} - i\alpha\overline{Q}\} + \delta\overline{Q}\{Q' + i\alpha Q\}\right]_{x=-1}^{1}$$

$$+\int_{-1}^{1}\Big[\delta Q\{\gamma\overline{p} - \overline{l}\overline{Q} + \overline{f}\} + \delta\overline{Q}\{\gamma p - lQ + f\}\Big]dx, \quad \cdots(69)$$

但し $l = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\alpha\right)^2,$

となる故　$\delta Q(\pm 1)=0$ で $\delta G=0$ ならば (17) が成立つ。

つまり G の変分問題と (17) の方程式は同等である。

その際境界値は任意に指定出来る事がよくわかる。

例えば $f(x)=0,\ 1,\ \cos\theta,\ \cos 2\theta$ 等の場合で最も簡単な近似解は

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\left[a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta\right], \\ Q(x) &= a_0\log 2 + a_1\cos\theta + \frac{a_2}{2}\cos 2\theta, \\ Q'(x) &= -a_1 - 2a_2\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

であるから境界条件は

$$\left.\begin{aligned} Q(1) = C' &= a_0\log 2 + a_1 + \frac{a_2}{2} \\ Q(-1) = D' &= a_0\log 2 - a_1 + \frac{a_2}{2} \end{aligned}\right\}$$

故これをあらためて

$$\left.\begin{aligned} a_0\log 2 + \frac{a_2}{2} &= C = \frac{C'+D'}{2} \\ a_1 &= D = \frac{C'-D'}{2} \end{aligned}\right\}.$$

と書け、結局 a_0, a_2 のどちらかを (68) の変分で決めればよい。

さて
$$\int_{-1}^{1} Q'\overline{Q'}\,dx = \int_{-1}^{1}(a_1 - 2a_2x)(\overline{a_1} - 2\overline{a_2}x)\,dx$$
$$= 2a_1\overline{a_1} + \frac{8}{3}a_2\overline{a_2},$$

$$\int\left(Q\overline{Q}' - \overline{Q}Q'\right)dx = \int_{-1}^{1}\Big[\left(a_0\log 2 - a_1x + a_2x^2 - \frac{a_2}{2}\right)\left(-\overline{a_1} + 2\overline{a_2}x\right)$$
$$- \left(\overline{a_0}\log 2 - \overline{a_1}x + \overline{a_2}x^2 - \frac{\overline{a_2}}{2}\right)\left(-a_1 + 2a_2x\right)\Big]dx$$
$$= \int\Big[-(C - a_2)\overline{a_1} + a_1\overline{a_1}x - a_2\overline{a_1}x^2 + \left(C - \frac{a_2}{2}\right)2\overline{a_2}x - 2a_1\overline{a_2}x^2 + 2a_2\overline{a_2}x^3$$
$$+ (\overline{C} - \overline{a_2})a_1 - a_1\overline{a_1}x + a_2\overline{a_1}x^2 - \left(\overline{C} - \frac{\overline{a_2}}{2}\right)2a_2x + 2\overline{a_1}a_2x^2 - 2\cdots$$

昭和　　年　　月　　日

$$\int_{-1}^{1}(Q\bar{Q}'-\bar{Q}Q')dx=2(\bar{c}-\bar{a}_2)a_1-2(c-a_2)\bar{a}_1+2(a_2\bar{a}_1-a_1\bar{a}_2)$$

$$\int_{-1}^{1}Q\bar{Q}\,dx=\int_{-1}^{1}\{c-a_2-a_1x+a_2x^2\}\{\bar{c}-\bar{a}_2-\bar{a}_1x+\bar{a}_2x^2\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\Big[(c-a_2)(\bar{c}-\bar{a}_2)+a_1\bar{a}_1x^2+a_2\bar{a}_2x^4$$

$$+\{a_2(\bar{c}-\bar{a}_2)+\bar{a}_2(c-a_2)\}x^2\Big]dx$$

$$=2(c-a_2)(\bar{c}-\bar{a}_2)+\frac{2}{3}\{a_1\bar{a}_1+a_2(\bar{c}-\bar{a}_2)+\bar{a}_2(c-a_2)\}+\frac{2}{5}a_2\bar{a}_2,$$

$$\int_{-1}^{1}p\bar{Q}\,dx=\pi a_0\bar{a}_0\log 2+\frac{\pi}{2}a_1\bar{a}_1+\frac{\pi}{4}a_2\bar{a}_2,$$

よって $\displaystyle\int_{-1}^{1}f\bar{Q}\,dx=(\ )\alpha_0\bar{a}_0+\beta_0\bar{a}_1+\gamma_0\bar{a}_2=\alpha_0\left(\bar{c}-\frac{\bar{a}_2}{2}\right)+\beta_0\bar{a}_1+\gamma_0\bar{a}_2$

とおき　Fを$\bar{a}_2$で微分すると

$$\left(2\cdot\frac{8}{3}-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{8}{3}a_2+i\alpha\cdot2\{-a_1-a_1\}+\alpha^2\left\{-2(c-a_2)+\frac{2}{3}(-a_2+(c-a_2))+\frac{2}{5}a_2\right\}$$

$$+\frac{\pi\gamma}{4}\{a_2\}+\left(\gamma_0-\frac{\alpha_0}{2}\right)=0$$

$$a_2\left\{\frac{8}{3}+\frac{16}{15}\alpha^2+\frac{\pi}{4}\gamma\right\}=4i\alpha D+\frac{4}{3}\alpha^2C-\gamma_0+\frac{\alpha_0}{2},$$

これが求める近似値であって，$\alpha_0=\gamma_0=0$ は斉次解を与える。

昭和　年　月　日

D.　出会周期，船速，波速等の関聯（二次元）

ある周期 ω で振動しながら速度 U で走る船の作る波の波数は次式の根で与えられる

$$A(k) = (k-\alpha)^2 - \gamma k = (k-K)(k-K') = 0 \quad , \qquad (1)$$

$$B(k) = (k+\alpha)^2 - \gamma k = (k-\beta)(k-\beta') = 0 \quad , \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} & K = \alpha + \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\alpha\gamma + \frac{\gamma^2}{4}} \,,\quad K' = \alpha + \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\alpha\gamma + \frac{\gamma^2}{4}} \,, \\ & K' = \alpha^2/K \,,\qquad \gamma = g/U^2 \,, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} & \beta = -\alpha + \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha\gamma} \,,\quad \beta' = -\alpha + \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha\gamma} \\ & \beta' = \alpha^2/\beta . \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

波高はすべて

$$\left.\begin{aligned} \eta(x,t) & \propto e^{ikx + i\omega t} \,,\quad k = K, K' \,, \\ & \propto e^{-ikx + i\omega t} \quad \text{for } k = \beta, \beta' \end{aligned}\right\} \,, \quad (5)$$

のように与えられる。

従って

i) $\alpha > \frac{\gamma}{4}$ では β, β' は複素数になるので遠方に伝わる波は存在せず，K, K' 波のみになり，又 $K, K' > 0$ であるのでこれは後流方向に進む波である。

しかし波速を夫々 C, C' とすると

$$\left.\begin{aligned} & C = \frac{\omega_0}{K} \,,\quad K = \frac{\omega_0^2}{g} \,,\quad C = \sqrt{\frac{g}{K}} \\ & C' = \frac{\omega_0'}{K'} \,,\quad K' = \frac{\omega_0'^2}{g} \,,\quad C' = \sqrt{\frac{g}{K'}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{gK} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

一方相対速度は K 波については

$$\frac{\omega}{K} = U + C \quad , \qquad (7)$$

であるから (6) を代入すると

$$UC/C' = U + C \,.$$

昭和　　年　　月　　日

あるいは
$$\frac{1}{c'}=\frac{1}{c}+\frac{1}{U}, \quad \text{-----} (8)$$

を得る。

それ故 常に $c'<U$ となる。

K' 波の相対速度は ω/K' であたえられるから (7) により

$$\omega/K'=\frac{\alpha U}{\alpha^2}K=\frac{KU^2}{\omega}=\frac{U^2}{U+C}=U-\frac{cU}{U+c}=U-c', \quad \cdots (9)$$

となり K' 波は静止座標系では波速 c' で船の進行方向に進む波である。

(7) 式は又 波速 c の向波を受ける時の出会周期を与える式であり、(9) 式は波速 c' の追波を受ける時のそれであるから、結局ある周期 ω で振動しながら走る船が $\alpha>\frac{g}{4}$ の時後方に残す波は出会周期が ω となるような波長の波であり、その一つは向波 他は追波状態となっている。

ii) $\alpha<\frac{g}{4}$ では K、K' 波の他に β、β' 波が生じて来、これは共に上流方向に進む波である。

その波速は夫々

$$\left.\begin{aligned} c_\beta&=\frac{\omega_\beta}{\beta}, \quad \beta=\frac{\omega_\beta^2}{g}, \quad c_\beta=\sqrt{g/\beta}, \\ c'_\beta&=\frac{\omega'_\beta}{\beta'}, \quad \beta'=\frac{\omega_\beta'^2}{g}, \quad c'_\beta=\frac{\sqrt{g\beta}}{\alpha}, \end{aligned}\right\} (10)$$

相対速度は上流方向に β 波で

$$\frac{\omega}{\beta}=U+c_\beta, \quad \text{---} (11)$$

で (10) を代入すると

$$Uc_\beta/c'_\beta=U+c_\beta$$

or
$$\frac{1}{c'_\beta}=\frac{1}{U}+\frac{1}{c_\beta}, \quad \text{---} (12)$$

を得る故 常に $c'_\beta < U$。

一方 β'波の相対速度は

$$\frac{\omega}{\beta'} = \frac{\omega}{\alpha^2}\beta = \frac{\beta}{\omega}U^2 = \frac{U^2}{U+c_\beta} = U - c'_\beta \ , \quad \cdots (13)$$

となって β'波は静止系では後流側に進む波である。

つまり $\alpha < \frac{\gamma}{4}$ では後方に4つの波系があり 夫々各2つ宛つ出会周期の等しい追波、向波の波長に等しい。

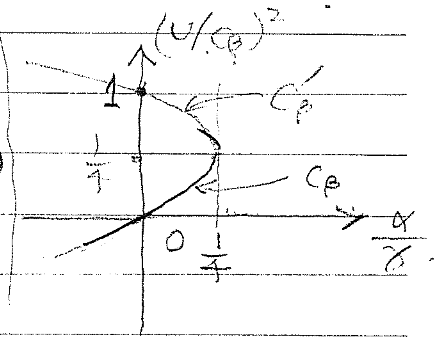
所でこの追波の場合 K'波の速度はUより小さく、β波の速度はUより大きく 従ってβ波は上流側にある。

(10)より(4)を使って

$$\left(\frac{U}{c_\beta}\right)^2 = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\gamma} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{\gamma}} \ , \quad (14)$$

を得るから右図のようになり

$$\frac{U}{c'_\beta} > \frac{1}{2} > \frac{U}{c_\beta} \quad for\ \alpha < \frac{\gamma}{4}, (15)$$



となり 特に

$$c_\beta = c'_\beta = 2U \quad for\ \alpha = \frac{\gamma}{4}, (16)$$

となる。

波速Cの波の群速度は $\frac{C}{2}$ であるから(16)式つまり $\alpha = \frac{\gamma}{4}$ の時 β波の群速度は前進速度に一致する事を示している。

又(15)式から 群速度が船の前進速度より速ければ波が船の前方に出来る事がわかる。

iii). 入射波の波長とα, γの関係

入射波の波長が与えられた時に出会周期を与える式は(7),(9),(11),(13)であるから、今

$$F=\frac{U}{\sqrt{gL}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma L}}$$

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi L}}=\frac{1}{\sqrt{KL}}=\mu=\frac{c}{\sqrt{gL}}\qquad \cdots (17)$$

とおくと、

向波においては

$$F \gtrless \frac{\sqrt{2}-1}{2}\mu = 0.08262\sqrt{\frac{\lambda}{L}}$$

$$\text{for}\quad \alpha \gtrless \frac{\gamma}{4}, \qquad (18)$$

追波では

$$F \gtrless \frac{1+\sqrt{2}}{2}\mu = .4816\sqrt{\frac{\lambda}{L}}$$

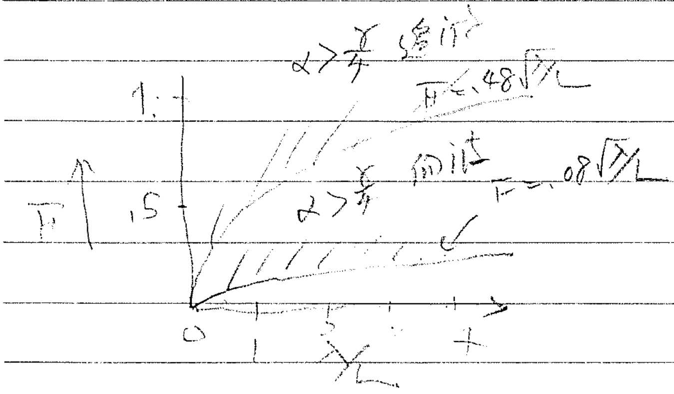
$$\text{for}\quad \alpha \gtrless \frac{\gamma}{4}, \qquad (19)$$

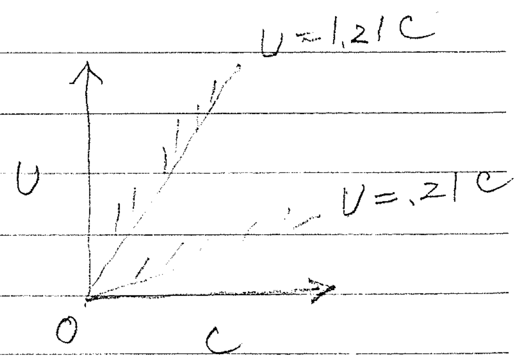
を得る。

又波速 c を使えば(18),(19)は

$$U \gtrless \frac{\sqrt{2}\pm 1}{2}c, \qquad \cdots (20)$$

となる。





E　飛体と飛体ポテンシャル

一般に境界条件 $\eta_j(x)$ $(=\cos j\theta)$ に対応する圧力分布 $p_j(x)$ は

$$p_j(x) = \frac{1}{\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^j \cos n\theta \, , \qquad x=-\cos\theta, \quad \cdots (1)$$

と展開出来よう。

これを A (16) により

$$p_j(x) = \frac{1}{2\sin\theta}\left[\sigma_j(1+\cos\theta)+\delta_j(1-\cos\theta)\right]+\sum_{n=1}^{\infty} b_n^j \sin n\theta, \quad (2)$$

と書くならば

$$\left.\begin{aligned} \sigma_j &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^j \\ \delta_j &= \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_n^j \end{aligned}\right\} \quad \cdots (3)$$

である。

一方 A (18) の $\eta_s(x)=e^{i\alpha x}$ に対する斉次解 $p_s(x)$ は

$$\eta_s(x)=e^{i\alpha x}=e^{-i\alpha\cos\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-i)^n J_n(\alpha)\cos n\theta, \quad (4)$$

であるから

$$p_s(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-i)^n J_n(\alpha)\, a_m^n \left(\frac{\cos m\theta}{\sin\theta}\right), \quad (5)$$

と書け (2) の形とするば

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= \sum\sum \varepsilon_n(-i)^n J_n(\alpha)\, a_m^n = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-i)^n J_n(\alpha)\,\sigma_n, \\ \delta_s &= \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-i)^n J_n(\alpha)\,\delta_n \, , \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

を得る。

昭和　年　月　日

(12)にかえって Reverse flow では

$$\tilde{P}_j(x) = \frac{1}{2\sin\theta}\left[\tilde{\sigma}_j(1+\cos\theta) + \tilde{\delta}_j(1-\cos\theta)\right] + \sum_{n=1} \tilde{B}_n^j \sin n\theta \quad , (7)$$

又

$$P_j(-x) = \frac{1}{2\sin\theta}\left[\sigma_j(1-\cos\theta) + \delta_j(1+\cos\theta)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^j (-)^{n-1} \sin n\theta, \quad (8)$$

であるから

i) η_j ; even ならば $P_j(-x) = \tilde{P}_j(x)$ 故

$$\sigma_j = \tilde{\delta}_j \ , \ \tilde{\sigma}_j = \delta_j \ , \quad \cdots \quad (9)$$

ii) η_j ; odd ならば $P_j(-x) = -\tilde{P}_j(x)$ 故

$$\sigma_j = -\tilde{\delta}_j \ , \ \tilde{\sigma}_j = -\delta_j \ , \quad \cdots \quad (10)$$

iii) $\eta_j(-x) = \overline{\eta_j(x)}$ ならば (9), (10)を組合せて

(9)が成立つので

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_d = \tilde{\delta}_d \ , \ \tilde{\sigma}_d = \delta_d \\ \sigma_d' = \tilde{\delta}_d' \ , \ \tilde{\sigma}_d' = \delta_d' \end{array}\right\} \quad \cdots (11)$$

$$\sigma_s = \tilde{\delta}_s \ , \ \tilde{\sigma}_s = \delta_s \ , \quad \cdots (12)$$

たゞし σ_d, δ_d は $\eta = e^{iKx}$ に, σ_d', δ_d' は $\eta = e^{-iKx}$ に対応するものとする。

iv) 又

$$f_{sj} = \tilde{f}_{js} = \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} P_j e^{i\alpha x} dx = \frac{\mu}{g} H_j(\alpha)$$

$$= \frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} P_s(x)\eta_j(x)dx \ ,$$

であるから

昭和　　年　　月　　日

$\tilde{\eta}_j(x) = \eta_j(-x)$ もしくは $\eta_j(x)$; real even ならば

$$\tilde{f}_{sj} = f_{sj} , \quad \cdots\cdots (13)$$

$\eta_j(x)$; real odd ならば

$$\tilde{f}_{sj} = -f_{sj} , \quad \cdots\cdots (14)$$

v) 同様にして、

$\tilde{\eta}_j(x) = \eta_j(-x)$ もしくは $\eta_j(x)$ even ならば

$$h_{sj} = \tilde{h}_{sj} , \quad \cdots\cdots (15)$$

$\eta_j(x)$; odd ならば

$$h_{sj} = -\tilde{h}_{sj} , \quad \cdots\cdots (16)$$

をうる。

vi) (14) において $j = d$ とおくと、

$$\left.\begin{aligned} H_s(-K) &= \tilde{H}_s(K) \\ H_s(-K') &= \tilde{H}_s(K') \end{aligned}\right\} \cdots (17)$$

をうる。

vii) 又 A (2θ) から

$$h_{sj} = \frac{\pi}{2\rho^2 U g}\left(\delta_s \tilde{\delta}_j - \sigma_s \tilde{\sigma}_j\right), \quad (18)$$

であるから $P_s(x)$ は 預 i 木 の influence func. である。

昭和　　年　　月　　日

F. 運動方程式

質量をM, 原点周りの慣性モーメントをIとし原点の上下変位を$Ye^{i\omega t}$角変位を$\Theta e^{i\omega t}$とすると浮体の運動方程式は

$$-\omega^2 M Y = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx,$$
$$-\omega^2 I \Theta = \int_{-1}^{1} p(x)\,x\,dx, \qquad (1)$$

ここで

$$p(x) = Y p_0(x) + \Theta p_1(x) + p_d(x), \qquad (2)$$

$p_0(x)$は$\eta(x)=1$に対する, $p_1(x)$は$\eta(x)=x$に対する圧力分布, $p_d(x)$は波数Kの単位振巾の向波に対する波圧とする。

そうすると

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \rho g\left[Y f_{00} + \Theta f_{1,0} + e_0\right]$$
$$\int_{-1}^{1} p(x)\,x\,dx = \rho g\left[Y f_{0,1} + \Theta f_{1,1} + e_1\right]$$
$$e_0 = -\frac{U}{g}\hat{H}_0(K),\quad e_1 = -\frac{U}{g}\hat{H}_1(K), \qquad (3)$$

ここ

$$f_{0,1} = \hat{f}_{10} = -f_{1,0}$$

これを(1)に代入すると

$$\left[+\frac{\omega^2}{\rho g}M + f_{00}\right]Y + f_{1,0}\Theta = -e_0 = \frac{U}{g}\hat{H}_0(K),$$
$$\left[+\frac{\omega^2}{\rho g}I + f_{1,1}\right]\Theta - f_{1,0}Y = -e_1 = \frac{U}{g}\hat{H}_1(K). \qquad (4)$$

昭和　年　月　日

$$\Upsilon = \frac{U}{g\Delta}\left[\tilde{H}_0(K)\left\{\frac{\omega^2}{\rho g}I + f_{11}\right\} - f_{10}\tilde{H}_1(K)\right]$$

$$\Theta = \frac{U}{g\Delta}\left[\tilde{H}_1(K)\left\{\frac{\omega^2}{\rho g}M + f_{0,0}\right\} + \tilde{H}_0(K)f_{10}\right] \quad (5)$$

$$\Delta = \left[\frac{\omega^2}{\rho g}M + f_{00}\right]\left[\frac{\omega^2}{\rho g}I + f_{11}\right] + (f_{1,0})^2, \quad (6)$$

$$= (f'_{00r} - i f_{00i})(f'_{11r} - i f_{11i}) + (f_{10r} - i f_{10i})^2$$

$$\Delta_r = Re\,\Delta = f'_{00r}f'_{11r} - f_{00i}f_{11i} + f_{10r}^2 - f_{10i}^2$$

$$\Delta_i = -Im\,\Delta = f'_{00r}f_{11i} + f'_{11r}f_{00i} + 2f_{10r}f_{10i} \quad (7)$$

ついで関数は

$$\frac{1}{\rho a}\int_{-1}^{1} p(x)e^{-iKx}dx = H(-K) = \Upsilon H_0(-K) + \Theta H_1(-K) + H_d(-K), \quad (8)$$

$$H(-K') = \Upsilon H_0(-K') + \Theta H_1(-K') + H_d(-K'), \quad (9)$$

である

抵抗増加は

$$\bar{R} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(p\bar{\eta}_x + \bar{p}\eta_x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\bar{\Theta}\int_{-1}^{1}p\,dx + \Theta\int_{-1}^{1}\bar{p}\,dx\right]$$

で(1)の第1式を代入すると

$$\bar{R} = -\frac{\omega^2}{4}M(\bar{\Theta}\Upsilon + \bar{\Upsilon}\Theta), \quad (10)$$

を得る。