

昭和49年5月3日

浅吃水船の二次元動揺問題について

別所正利

1. 序

頁

1

2. 速度ポテンシヤル・力等

2

3. 境界値問題

7

4. 特別な場合の解核

11

5. 浅吃水船の分類

16

6. 端部の形状と分布関数型

20

7. 箱船の左右動

26

8. 両端の僅かな部分のみが動く場合

28

9. 水線幅が僅かに変化する場合

31

1. 序

水面の圧力分布で表わされる速度ポテンシャルは非常に簡単であるので応用面で魅力的なものであるが、それに対応する物理的モデルが必ずしも明らかでない。

例えば「厳密に水面におかれた平板と考えると動揺する時端は水から出ておきにくくなる」と言う心配がある。

又浅い平板船と考えるとこれが本当に排水量型船の浅吃水の極限に一致するかどうかという疑問が残る。

又左右動については船の浮力も含めて無視してしまう立場と考えると「簡単でよいけれど」それでは一寸惜しいのでこの面でも利用したい。

最後に数学的存面についてもこの問題の短波長における解は大変複雑であるけれども、これは端点近傍のみで中程では簡単な形である。そして前者は自乗積分が有限であるか、後者はそうとは限らない。元の積分方程式の形から L_2 に属する解の存在と L_1 性には疑問が残るが L_1 に属する解はどうなるかについてはよくわからぬ。

と言ふ訳でこの面の関聯は圧力分布の関数型に関する問題であり、従つて又船型の問題である筈である。

以下順次検討し応用面につけても觸れる事としよう。

2, 速度ポテンシヤル・力等

幅 $B (=2b)$ の浅い水の船の
2次元動揺問題を考えよう。

座標系は左図の如くとり

長さの単位をとす。

すべての量は円周波数 ω で
調和振動的に変動するものと

しこれらの任意の点(実数値) $f(x, y, t)$ は

$$f(x, y, t) = \text{Re} \{ f(x, y) e^{i\omega t} \} \quad (1)$$

$$f(x, y) = f_2(x, y) + i f_3(x, y) \quad (2)$$

のようにかけるので以下複素関数 $f(x, y)$ について
論ずる本とし, (2) 式のようにその実部虚部を
下添字 c, s による示す本にしよう。

さて速度ポテンシヤルを $\varphi(x, y)$, 水面変位を
 $Y(x)$, 船底圧力を $P(x)$, 重力の定数 g と T と
水面において

$$i\omega \varphi(x) = -\varphi_y(x, 0) \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} P(x) = i\omega \varphi(x, 0) - g Y(x) \quad (4)$$

$$\times \quad \frac{i\omega}{\rho g} P(x) = \varphi_y(x, 0) - K \varphi(x, 0) \quad (5)$$

を以て $K = \omega^2 / g$

任意の運動は個々の要素運動の線型
重ね合せとして表わせる。(6)

そこで個々の要素運動の振幅を X_j とし
次のように正規化して互くと便利である。

$$\left. \begin{aligned} \psi_j(x, y) &= i c_0 X_j \phi_j(x, y) \\ P_j(x) &= \sum_j P_j X_j P(x) \\ \gamma_j(x) &= X_j \gamma_j(x) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

よりすると

$$\phi_{jy}(x, 0) = -\gamma_j(x) \text{ for } |x| < 1, \quad (5')$$

$$\left. \begin{aligned} K\phi(x, 0) - \phi_y(x, 0) &= P(x) \text{ for } |x| < 1 \\ &= 0 \text{ for } |x| > 1 \end{aligned} \right\} (5)$$

入射波, 散乱波についての量はすべて E, d なる下添字によつて示す事とし $X_E = X_d = a$ を入射波の振幅とし, 入射波は次のようにとり

$$\gamma_E(x) = -e^{ikx} \quad (7)$$

従つて
$$\phi_E(x, y) = +\frac{1}{K} e^{ky + ikx}, \quad (8)$$

ϕ_d に関する境界条件は

$$\phi_{dy}(x, 0) = -\phi_{Ey}(x, 0) = -e^{ikx}, \quad (9)$$

とする。

展開ポテンシャルは

$$\phi(x, y) = -\int_{-1}^1 P(x') S(x-x', y) dx', \quad (10)$$

$$S(x, y) = \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu y} \cos kx}{k - K + \mu i} dk, \quad (11)$$

と表わされ 充分遠方では.

$$\phi(x, y) \longrightarrow \sum_{\pm} H^{\pm}(k) e^{\pm i k x} + \dots \quad (12)$$

$$H^{\pm}(k) = \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm i k x} dx, \quad (13)$$

となる。

○ 流体力を求めるときは一般に次の積分が求められる。

運動による j 方向の力 F_{ij} は.

$$F_{ij} = \int_{-1}^1 p_i(x) \eta_j(x) dx = \rho g X_i \int_{-1}^1 p_i(x) \eta_j(x) dx, \quad (14)$$

p は 静水圧部を含むの η 部を K_{ij} , 附加粘性部を M_{ij} , 減衰部を N_{ij} と記す。

$$F_{ij} = (-\omega^2 M_{ij} + i\omega N_{ij} + K_{ij}) X_i, \quad (15)$$

となるから

$$\frac{F_{ij}}{\rho g X_i} \equiv f_{ij} = \int_{-1}^1 p_i \eta_j dx = -\frac{K}{\rho} M_{ij} + \frac{i\omega}{\rho g} N_{ij} + \frac{K_{ij}}{\rho g}, \quad (16)$$

ここで

$$\begin{aligned} f_{ij}^* &= \frac{1}{K} \int_{-1}^1 (\eta_i - p_i) \eta_j dx = \frac{M_{ij}}{\rho} - \frac{i}{\rho \omega} N_{ij}, \\ &= \frac{1}{K} \left[\int_{-1}^1 \eta_i \eta_j dx - f_{ij} \right], \quad (17) \end{aligned}$$

ばり量 を 定義しておこう。

波の強制力は

$$F_{dj} = \rho g a \int_{-1}^1 P_d(x) \eta_j(x) dx \quad \dots (18)$$

相反定理は

$$\int_{-1}^1 P_i(x) \eta_j(x) dx = \int_{-1}^1 P_j(x) \eta_i(x) dx \quad \dots (19)$$

エネルギー一定定理は

$$\int_{-1}^1 \{ P_j(x) \eta_i(x) - P_i(x) \eta_j(x) \} dx = -iK [H_i^+(K) \overline{H_j^+(K)} + H_i^-(K) \overline{H_j^-(K)}] \quad \dots (20)$$

よって (19) より

$$f_{ij} = f_{ji} \quad \dots (21)$$

特に

$$\frac{F_{dj}}{\rho g a} = f_{dj} = \int_{-1}^1 P_d(x) e^{iKx} dx = H_d^+(K) \quad \dots (22)$$

ここで j が偶数 (0を含む) ならば η_j, P_j は共に
 偶関数. 奇ならば 奇関数 となる. i のように
 i が 偶ならば (20) から

$$\frac{\omega N_i}{\rho g \eta_j} = \frac{1}{2i} (f_{ji}^* + f_{ij}) = \frac{K}{2i} (f_{ji}^* + f_{ij}) = K H_i^+(K) \overline{H_j^-(K)} \quad \dots (24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Rightarrow H_{2n}^+(K) &= H_{2n}^-(K) \\ H_{2n+1}^+(K) &= -H_{2n+1}^-(K) \end{aligned} \right\} \quad \dots (25)$$

昭和 年 月 日

$i = d$ とおくと、 j が偶, 奇 に よる

$$\begin{aligned} H_{2n}^+(k) - \overline{H_{2n}^+}(k) &= -ik [H_d^+ + H_d^-] \overline{H_{2n}^+}(k), \\ H_{2n+1}^+(k) - \overline{H_{2n+1}^+}(k) &= -ik [H_d^+ - H_d^-] \overline{H_{2n+1}^+}(k). \end{aligned} \quad (25)$$

又 $i = j = d$ とおくと、

$$H_d^-(k) - \overline{H_d^-}(k) = -ik [H_d^+ \overline{H_d^+} + H_d^- \overline{H_d^-}],$$

or $|ik H_d^+(k)|^2 + |-ik \overline{H_d^-}(k)|^2 = 1, \quad (26)$

互に同値がある。

(25) によつて H_{2n} の位相はすべて等しいし、又 H_{2n+1} についても同じでこれは散乱係数から求まる。

3. 境界値問題

この節では境界条件の積分方程式の解について一般的に考えて見よう。

それは (2) (3') (5') (10) により $[S(x,0) \text{ を } S(x) \text{ と書かせる}]$

$$\varphi(x) = p(x) + K \int_0^1 \underbrace{p(x')}_{\text{対称核}} S(x-x') dx', \quad (1)$$

S は双対的特異点を有するが、フレッドホルムⅡの第2種の方程式であるので $\varphi(x)$ の恒等積分が存在するならば (以下これを L_2 に属すると称する) L_2 に属する解 $p(x)$ が唯一存在する。

今この問題の解核 $R^*(x, x')$ を

$$p(x) = \varphi(x) - K \int_0^1 \varphi(x') R^*(x, x') dx', \quad (2)$$

と定義すると、 R^* は結核型の積分方程式の解となる。

$$S(x-z) = R^*(x, z) + K \int_0^1 R^*(x, z') S(x-x') dx', \quad (3)$$

次にこの解核の級数展開について考えよう。

その為には今正規直交関数系 $\{v_n(x)\}$ を導入しよう。

$$\int_0^1 v_n(x) v_m(x) dx = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ 1 & \text{for } n = m \end{cases} \quad (4)$$

さて $p_n(x)$ は p の解つまり

$$v_n(x) = p_n(x) + K \int_0^1 p_n(x') S(x-x') dx', \quad (5)$$

を満足するものとする。

昭和 年 月 日

$P_n(x)$ は又 v_n の上に展開出来るから

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{n,m} v_m(x), \quad (6)$$

とすると $f_{n,m} = \int_{-1}^1 P_n(x) v_m(x) dx = f_{m,n}, \quad (7)$

(c.f. §2 (16))

従って今

$$R(x, \xi) = R(\xi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{n,m} v_n(x) v_m(\xi), \quad (8)$$

なる級数を考えると、一般に任意の境界条件 $\gamma(x)$ に対し 圧力は

$$p(x) = \int_{-1}^1 \gamma(x') R(x, x') dx', \quad (9)$$

と書ける事は明らかである。

一方 Dirac の δ 関数を導入すると

$$\delta(x-\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) v_n(\xi), \quad (10)$$

と展開出来るから

δ の (17) により、

$$f_{n,m}^* = \frac{1}{k} [d_{n,m} - f_{n,m}], \quad (11)$$

とすると (8) は

$$R(x, \xi) = \delta(x-\xi) - k R^*(x, \xi), \quad (12)$$

$$R^*(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{n,m}^* v_n(x) v_m(\xi), \quad (13)$$

となる事がわかる。

これが解核の展開である。

昭和 年 月 日

R^* は (3) より明らかのように $x=3$ で対数的特異点を有すると考えられる。

一方 (2) あるいは (4) において $\gamma(x) = \delta(x-3)$ とおくとその解を $p^\delta(x; 3)$ と記し

$$\begin{aligned} p^\delta(x; 3) &= \int_1^x \delta(x-3) R(x, x') dx' = R(x, 3) \\ &= \delta(x-3) - KR^*(x, 3), \quad \dots \quad (14) \end{aligned}$$

さうから解核は $\gamma(x) = \delta(x-3)$ に対する (1) の解でもある。

さて $p_n(x)$ がすべての n についておまると散乱問題はこの解で表わされる。

即ち

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x) &= e^{iKx} - \sum_{n=0}^{\infty} i^n b_n v_n(x), \\ b_n &= i^{-n} \int_1^x e^{iKx} v_n(x) dx, \end{aligned} \quad (15)$$

と展開出来るは

$$p_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n b_n p_n(x), \quad \dots \quad (16)$$

p_n に (6) を代入し

$$b_m^\pm = \int_1^x p_m(x) e^{\pm iKx} dx = \int_1^x p_\alpha(x) v_m(x) dx, \quad (17)$$

右辺を定義すると

$$p_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m v_m(x), \quad \dots \quad (18)$$

なる展開がえられる。

(b_m は肩符 \pm を省略する事がある)

昭和 年 月 日

$$f_{d, \pm} = \int_{-1}^1 P_d e^{\pm iKx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n b_n h_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (\pm i)^n i^m b_n h_m f_{n,m}$$

$$h_m = \sum_{n=0}^{\infty} i^n b_n f_{n,m} \quad \left. \vphantom{h_m} \right\} (19)$$

となり h_m は $f_{n,m}$ で表わされる。

又 f_{\pm} (24) 式より $f_{n,m}$ の漸近形について

$$\left. \begin{aligned} \int \{ f_{2n, 2m} \} &= K (h_{2n} \overline{h_{2m}}) \\ \int \{ f_{2n+1, 2m+1} \} &= K (h_{2n+1} \overline{h_{2m+1}}) \end{aligned} \right\} (20)$$

f_{\pm} (25) によつて、右辺は実となる。

最後に P_d^{δ} によつて積分定理を適用すると、

$$f_{\delta, n}(\xi) = \int_{-1}^1 P_d^{\delta}(x, \xi) v_n(x) dx = \int_{-1}^1 P_n(x) \delta(x-\xi) dx = P_n(\xi), \quad (21)$$

$$f_{\delta, d}(\xi) = h_d(\xi) = \int_{-1}^1 P_d^{\delta}(x, \xi) e^{iKx} dx = \int_{-1}^1 P_d(x) \delta(x-\xi) dx = P_d(\xi), \quad (22)$$

$$f_{n, \delta}(\xi) - \overline{f_{n, d}(\xi)} = P_n(\xi) - \overline{P_n(\xi)} = iK [h_n \overline{P_d(\xi)} + h_n \overline{P_d(\xi)}] \quad (23)$$

$$P_n(\xi) - \overline{P_d(\xi)} = iK [h_d \overline{P_d(\xi)} + h_d \overline{P_d(\xi)}],$$

2212 $P_d^-(x)$ は $\xi = e^{-iKx}$ つまり x の虚部(4)から来るのは散乱ポロノミナルとする。

従つて上式は P_n の虚部は散乱ポロノミナルによつて表わされる事を示している。

4. 特別な場合の解核

前節で見たように解核を求めるには一般に $\eta = v_n(x)$ のすべての解を求める必要があるが、特別な場合は必ずしもその必要がない。

特に $x = \pm 1$ におけるそれを以下検討する。

さて一般に $P(\pm 1)$ は有限であるので P は積分可能である。

従って次のような演算が可能であると考えられる。
 $\int_0^1 (1)$ を x で微分して右辺の2項を部分積分する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x) = P_x(x) + K \int_{-1}^1 P(x') S'_x(x-x') dx'$$

$$= P_x(x) + K \int_{-1}^1 P_{x'}(x') S'_x(x-x') dx' - \left[K P(x') S(x-x') \right]_{x'=-1}^{x'=1}, \quad (1)$$

次に同じ式を K で微分しよう。

$$\frac{\partial}{\partial K} S(x) = -\frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u \sin Kxu}{u-1+iu} du = \frac{x}{K} \frac{\partial}{\partial x} S(x), \quad (2)$$

であるから

$$\begin{aligned} &= K \int_{-1}^1 P_{x'}(x') S'_{Kx}(x-x') dx' = - \int_{-1}^1 P(x') (x-x') \frac{\partial}{\partial x'} S(x-x') dx' \\ &= - \left[P(x') (x-x') S(x-x') \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \left\{ P_{x'}(x') (x-x') - P(x') \right\} S(x-x') dx' \end{aligned}$$

となり (1) に x をかけたものと (2) を相引くと

$$\begin{aligned} &x \frac{\partial}{\partial x} \eta(x) - K \frac{\partial}{\partial K} \eta(x) + K \left[x P(x') S(x-x') \right]_{x'=-1}^{x'=1} \\ &= x P_x(x) - K P_K(x) + K \int_{-1}^1 \left\{ x P_{x'}(x') - K P(x') \right\} S(x-x') dx', \quad (3) \end{aligned}$$

昭和 年 月 日

をうる。

(1), (3) は §3(3) によつて、解核の助けによつて簡単に解ける。

今は特に次の3つの場合を考えよう。

$$f(x) = v_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \{P_0(x)\}$$

$$= v_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x \quad \{P_1(x)\}$$

$$= e^{ikx} \quad \{P_\alpha(x)\}$$

(1) は

$$k \int_{-1}^1 P_0(x') S'(x-x') dx' = P_{0x} + k \int_{-1}^1 P_{0x'} S dx',$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} + k \int_{-1}^1 P_1(x') S'(x-x') dx' = P_{1x} + k \int_{-1}^1 P_{1x'} S dx',$$

$$ik e^{ikx} + k \int_{-1}^1 P_\alpha(x') S'(x-x') dx' = P_{\alpha x} + k \int_{-1}^1 P_{\alpha x'} S dx'.$$

(3) から

$$k \int_{-1}^1 x' P_0(x') S'(x-x') dx' = x P_{0x} - k P_{0x} + k \int_{-1}^1 \{x' P_{0x'} - k P_{0x'}\} S dx',$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} x + k \int_{-1}^1 x' P_1(x') S'(x-x') dx' = x P_{1x} - k P_{1x} + k \int_{-1}^1 \{x' P_{1x'} - k P_{1x'}\} S dx',$$

$$+ k \int_{-1}^1 x' P_\alpha(x') S'(x-x') dx' = x P_{\alpha x} - k P_{\alpha x} + k \int_{-1}^1 \{x' P_{\alpha x'} - k P_{\alpha x'}\} S dx'.$$

等証明。

式(3)によつて、夫々の解は

$$\begin{aligned}
 P_{0x}(x) &= K P_0(1) R^*(x, 1) - K P_0(-1) R^*(x, -1) \\
 P_{1x}(x) &= \sqrt{3} P_0(x) + K P_1(1) R^*(x, 1) - K P_1(-1) R^*(x, -1) \\
 P_{dx}(x) &= i K P_d(x) + K P_d(1) R^*(x, 1) - K P_d(-1) R^*(x, -1)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 x P_{0x}(x) - K P_{0K}(x) &= K P_0(1) R^*(x, 1) + K P_0(-1) R^*(x, -1) \\
 x P_{1x}(x) - K P_{1K}(x) &= P_1(x) + K P_1(1) R^*(x, 1) + K P_1(-1) R^*(x, -1) \\
 x P_{dx}(x) - K P_{dK}(x) &= K P_d(1) R^*(x, 1) + K P_d(-1) R^*(x, -1)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

を得る。但し $P_0(1) = P_0(-1)$, $-P_1(1) = P_1(-1)$ である。
 つまり $x=1$ における R^* は $P_0(x)$ の x, K に對する微係數が“あつた”求まる筈になる。(P₁ or P_d)

$$\begin{aligned}
 \int_1^1 R^*(x, 3) v_n(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,m}^* v_n(3) = \frac{v_n(3) - P_n(3)}{K} \\
 \int_1^1 R^*(x, 3) e^{iKx} dx &= \sum_n \sum_m i^n b_n f_{nm}^* v_n(3) = \dots \\
 &= \frac{1}{K} \{ e^{iK3} - P_d(3) \}
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

なるが (6) (7) から次のような関係が得られる。

$$\begin{aligned}
 2 P_0(1) P_{2n+1}(1) &= \int_1^1 P_0(x) v_{2n+1}(x) dx \\
 P_0(1) \{ P_d(1) - P_d(-1) \} &= i K h_0
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

$$z P_1(1) P_{2n}(1) = \sqrt{3} f_{0,2n} + \int_{-1}^1 P_1(x) v_{2n}'(x) dx,$$

$$P_1(1) \{ P_d(1) + P_d(-1) \} = i K h_1 + \sqrt{3} h_0,$$

$$\int_{-1}^1 P_d(x) v_n'(x) dx = -i K h_n + P_d(1) P_n(1) - P_d(-1) P_n(-1),$$

$$z i K h_d = P_d(1) P_d(1) - P_d(-1) P_d(-1),$$

$$z P_0(1) P_{2n}(1) = f_{0,2n} + K \frac{d}{dK} f_{0,2n} + \int_{-1}^1 P_0(x) \frac{d}{dK} (x v_{2n}) dx,$$

$$P_0(1) \{ P_d(1) + P_d(-1) \} = h_0 + K \frac{d}{dK} h_0,$$

$$z P_1(1) P_{2n+1}(1) = f_{1,2n+1} + K \frac{d}{dK} f_{1,2n+1} + \int_{-1}^1 P_1(x) \frac{d}{dK} (x v_{2n+1}) dx,$$

$$P_1(1) \{ P_d(1) - P_d(-1) \} = z h_1 + K \frac{d}{dK} h_1,$$

$$P_d(1) P_n(1) + P_d(-1) P_n(-1) = h_n + K \frac{d}{dK} h_n + \int_{-1}^1 P_d(x) v_n' dx,$$

$$P_d(1)^2 + P_d(-1)^2 = h_d + K \frac{d}{dK} h_d,$$

昭和 年 月 日

$$\left. \begin{aligned} \approx P_0(1)P_1(1) &= \sqrt{3} f_{0,0} ; \quad = 1 \\ \approx P_0^2(1) &= f_{0,0} + k \frac{d}{dk} f_{0,0} , \\ \approx P_1^2(1) &= 3 f_{1,1} + k \frac{d}{dk} f_{1,1} , \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\left. \begin{aligned} P_0(1)\{P_0(1) - P_0(-1)\} &= ik h_0 , \\ P_1(1)\{P_1(1) + P_1(-1)\} &= \sqrt{3} h_0 + ik h_1 , \\ P_0(1)\{P_0(1) + P_0(-1)\} &= h_0 + k \frac{d}{dk} h_0 , \\ P_1(1)\{P_1(1) - P_1(-1)\} &= 2h_1 + k \frac{d}{dk} h_1 , \\ P_0^2(1) - P_0^2(-1) &= 2ik h_d , \\ P_1^2(1) + P_1^2(-1) &= h_d + k \frac{d}{dk} h_d , \end{aligned} \right\} (16)$$

左辺 $\rho(x) = 1$, x の範囲 P_0, P_1 と記すと $P_0 = \sqrt{3} P_0, P_1 = \sqrt{3} P_1$

$$\therefore F_{0,0} = \int_{-1}^1 P_0 dx = 2 f_{0,0}, \quad F_{1,1} = \int_{-1}^1 P_1 x dx = \frac{2}{3} f_{1,1}$$

とすると上式は

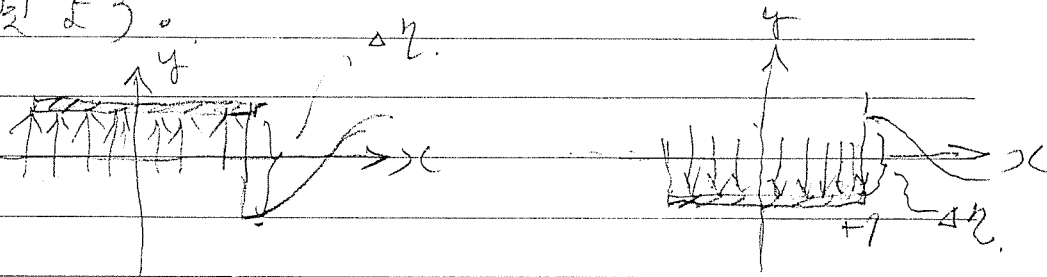
$$\left. \begin{aligned} \approx P_0(1)P_1(1) &= F_{0,0} \\ \approx P_0^2(1) &= F_{0,0} + k \frac{d}{dk} F_{0,0} \\ \approx P_1^2(1) &= 3 F_{1,1} + k \frac{d}{dk} F_{1,1} \end{aligned} \right\} (17)$$

とすると

5. 浅吃水船の分類

$y=0$ における圧力分布で表わされる速度ポテンシャル ϕ (10) は一体どのような船に對する流体運動を記述しているのだろうか。

普通は水面 ($y=0$) におかれた平板の動揺に因するものと考えられているので先ずその場合について考えて見よう。



§2. (4) から板の端における水面変位の差 ΔY は ここで ϕ は連続量とすると

$$\Delta Y(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \phi(1+\epsilon) - \phi(1-\epsilon) \} = \frac{1}{\rho g} P(0), \quad \dots (1)$$

と存しているが上図からわかるように下降時は物理的に存在しない昇時では板面は負圧となり水が直接大気圧に接しているのだから空気を吸い込むであろうからこのような運動は物理的にはなりたつのが難しいだろう。

このような困難は吃水 T が有限な船の $T \rightarrow 0$ の時の近似ポテンシャルと考えればよい。この時上の考察から

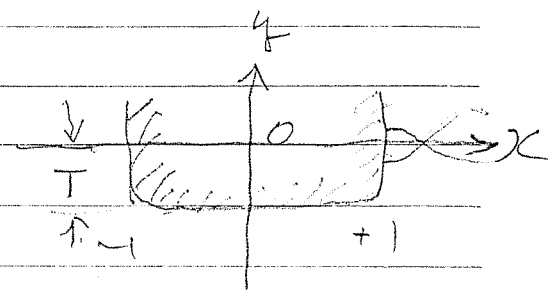
$$T > |\Delta Y| \quad \dots (2)$$

なる条件が必要であるが線形理論では Y は一次の微小量と考えるので T は充分小さいと考える事が出来る。

(その他には $\delta y > T$ の条件があるだろう)

$$(KT < 1)$$

そうすると右図のような
浅吃水船模型が
えられる。



つまり $\rho \geq (10)$ は吃水の浅い排水量型船の $T \rightarrow 0$ の極限と考える事が出来る。

(この極限については次節で考察する)

(しかしながら左右動に拘りては)問題が
異なる。

その境界条件は $\rho \geq (3)$ により φ_y に
指定されるから今船底の off set が $f(x)$ で
与えられ左右動の振幅を X_0 とすれば

$$\varphi_y(x,0) = -i\omega X_0 \frac{df(x)}{dx} \quad (3)$$

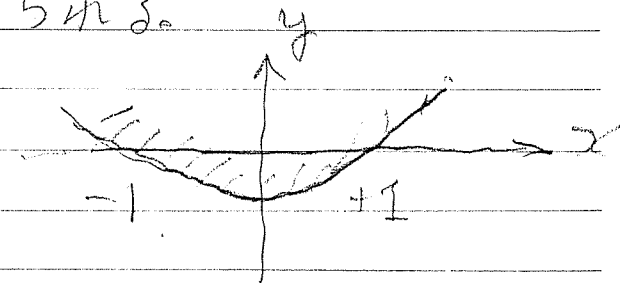
と与えられるが上図のように右側が垂直な
な場合右側の自乗積分は有限ではない。

従って $\rho \geq (3)$ のでたように L_2 に属する解
は存在しない*

そのような場合の解については又 後述するが
今の段階について言えば"吃水が幅に比して
充分小さいと考えるので"左右動による水の
運動は極めて小さくて無視し得ると
考えた事に存する。

さて一方 (3) の右辺が L_2 に属する場合は
下図のように一般に右側が水平にして
傾余斗をもっていると考えられる。

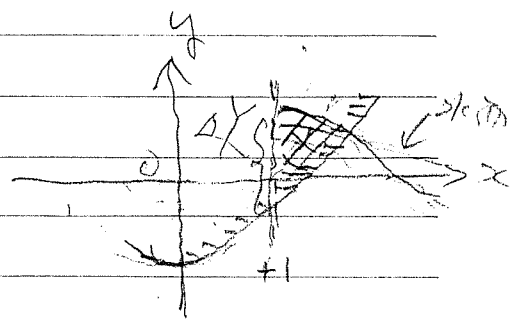
例えは" $f(x)$ が放物線
とすれば" $\rho \propto x$ とする
ので左右動は横ゆれのポテンシヤルと同じである。



*これは解がないと言う事ではない。次節参照

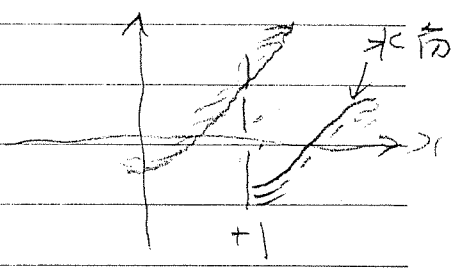
しかしこのような場合困るのは上下動と横揺れである。

節ち吃水は浅いとするので当然玄側傾斜角は小さくなる故 例えば"上下動をすると下図のようは平板の場合よりむしろ工合が悪くなる。



実際には水線幅が変化するので (10) はこのような場合を表現する事は出来ない。

工合が悪いのは右上図の斜線の部分であるけれどこれを小さければ"あまり問題はないであろう。



この部分の面積はこの近々"水面が平らで玄側傾斜角がαであるとする(1)により、

$$\frac{1}{2\alpha} (\Delta Y)^2 = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{P(t)}{C_F} \right)^2, (\alpha \neq \tan \alpha) \quad (4)$$

である。

Pは角輪振幅に比例するからこれは二次の微小量で線型理論の立場からは無視すべき量であり、この意味ではこのような場合も (10) で表わしてよい事になる。

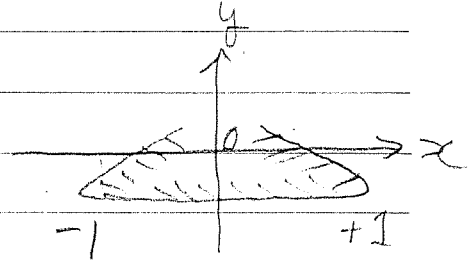
問題はαであって何のFのような場合あるいは極端に楔状の場合には

$$\alpha = 2\pi / B, \quad \dots (5)$$

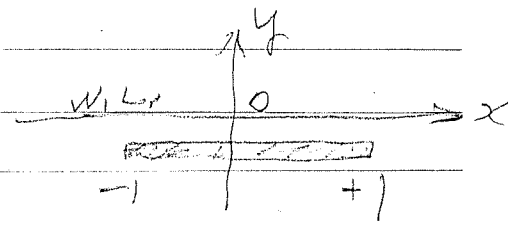
であって仮定からこれは充分小さい量であるから(4)は振幅の自乗に比例するけれども数値的には一次の量のオーダーになる。

従ってこれを無視する款にも行かない。
 一方一般的に水線幅が変化する場合を
 取扱うのは大変面倒であるし、片方線型
 理論的には上述のように水線変化分は高次
 の微小量であるから無視してもよいという立場
 があるので後述のようなこの水線変化を近似
 的に取扱う立場が中間段階として考え
 られよう。

同じような考え方で右図の
 ようにダブル・ホームの場合
 も取扱がえるであろう。



又完全に浸水した平板の場合も深度が
 充分浅いと $k \rightarrow 0$ の近くを除いて (10)
 で近似出来る事が示されている*。



* 別紙「水圏に近くおき小振幅浸水平板の流体力」

6. 端部の形状と分布関数型

§2 (10) は、浮き水船のポテンシャルを代表すると考えられるが前節で考察した端部付近の形状の差とどのように関係しているのであろうか。その為には一般的な排水量型の場合のポテンシャルを考えよう。

すなわち C を水線下の浸水表面とすると

$$\phi(x, y) = \int_C \left\{ -\phi(x', y') \frac{\partial}{\partial n} G(x, y; x', y') + \frac{\partial \phi}{\partial n} G(x, y; x', y') \right\} ds \quad (1)$$

$$G(x, y; x', y') = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - \frac{1}{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\infty - k(y+y')} \frac{e^{-kz} \cos k(x-x')}{r - k + \mu i} dk \quad (2)$$

$r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$

と与えられる*

今 C が水面に充分近づくので吃水が非常に浅くなると船体は殆ど y 軸に平行となり

$$G(x, y; x', y') \xrightarrow{y' \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty - ky} \frac{e^{-kz} \cos k(x-x')}{r - k + \mu i} dk$$

$$= -S'(x-x', y) \quad (3)$$

である

$$\left(k + \frac{\partial}{\partial y} \right) G(x, y; x', y') = \left(k - \frac{\partial}{\partial y} \right) G(x, y; x', y')$$

$$\xrightarrow{y' \rightarrow 0} 0$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y} S'(x, y) = -k S'(x, y) \quad (4)$$

であるから

* 別冊 "流の中の船の運動の理論" について

昭和 年 月 日

$$4\phi(x,0) - \phi(x,0) = p(x), \quad (5)$$

とおくと

$$\phi(x,y) = - \int_{-1}^1 p(x') S(x-x',y) dx', \quad (6)$$

となり (10) に一致する。

この函数等は 端部付近を除いて合理的であると考えられるから 結局 端部付近について細かく考えて見ればよい。

その際 排水器型の式 (1) の極限 について検討するのはかなり面倒になるので ここでは逆に (6) において $p(x)$ の 関数型を変化させると 端部でどのような流れ場になるかについて以下考察する。

まず (6) に対応する流れ関数 ψ は

$$\psi(x,y) = - \int_{-1}^1 p(x') T(x-x',y) dx', \quad (7)$$

$$T(x,y) = \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2} + \mu} \frac{e^{-kx} \sin kx}{k - k + \mu i} dk, \quad (8)$$

であり、 $S(x,y)$ は $\frac{x^2}{2}$ 偶関数で 原点近傍で対数的特異的を有するが、一方 $T(x,y)$ は x について 奇関数で

$$T(x,y) \xrightarrow[y=0]{x \rightarrow +0} \frac{1}{2},$$

$$\text{つまり } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{T(+\varepsilon,0) - T(-\varepsilon,0)\} = 1, \quad (9)$$

となり 原点で $\frac{\pi}{4}$ となる。

昭和 年 月 日

又 x, y 方向の速度を u, v とすると

$$v(x, 0) = -\phi_y(x, 0) = p(x) + k \int_{-1}^1 p(x') S'(x-x') dx', \quad (10)$$

$$u(x, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(x')}{2l-x'} dx' - k \int_{-1}^1 p(x') T(x-x') dx', \quad (11)$$

境界条件は $v(x, 0)$ について指定され、先づ
左右動については前節(3)のようにオフセットを
 $f(x)$ とすと

$$v(x) = \frac{d}{dx} f(x), \quad (12)$$

よって ψ では $v = -\phi_y = \psi_x$ なる

$$\psi(x, 0) = f(x), \quad (13)$$

となるが、その他では

振動振幅 $g(x)$ とすると

$$v(x) = g(x), \quad (14)$$

である。

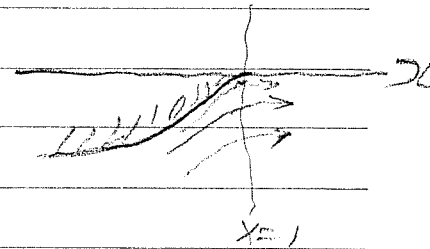
圧力分布としては次の3種類を考へよう。

一つは L_2 に属するものの代表として $p(x)$ が
有限な型、 ψ_2 は L_1 に属するものの代表
として $1/\sqrt{1-x^2}$ なる因子を有して端部で無限
大となるもの、 ψ_3 はやはり L_1 に属するもの
の一つとして端部で集中特異点を有する
ものとする。

ψ_1, ψ_2 の型では左側外側で水面変位
は有限である(6)式よりわかるが ψ_3 の型では
明らかに対称的に無限大となる。

さて(10)(11)に 大の型の 圧力を入れて 端部近く
の流れを 見て見るに

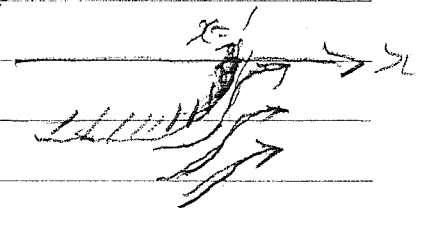
まず $\alpha=1$, $\alpha=2$ の型では 右辺 $\alpha=1$ の項は $x=1$
で 連続であるので 斜角 右辺 $\alpha=1$ の項を 考
えれば "よくこれは 薄い船あるいは 翼の 理論の
場合と 全く同じ形であるから $\alpha=1$ の型では
 ψ は $x=1$ で $\rho(x)$ だけ jump があり, " $\psi(x,y)$ "
は $x=1, y=0$ では 無限大 (対数的) にはあるが
 $y \neq 0$ ならば "連続" であるから 右図
のように 水面と ある角度で



交わる船型を 代表する
車になる。 なお 水面との
交点は 厳密には $\psi(x,y)$ と
なるのは 薄船理論でしられ
ている通りである。

$\alpha=2$ の型では $\psi(x)$ は $|x| < 1$ で
無限大となるが $|x| > 1$ では 有限となり,
 $\psi(x,0)$ は $|x| < 1$ では 有限であるが $|x| > 1$ で
は 船のオーガで 無限大となる。

従って 右図の ような流れになり
左側が 水面と 直角に 交つて
いる 船型を 代表すると
考えられる。



この両者の 差は K が 小さい 時は どう考えて
見ても あまり 違いは ないと 考えられるが K が 大
きくなつて 波の 波長と 吃水 T が 同じ 位に
なると 物理的に 考えて も かなり 差を生じる。

つまり 下図の 場合は 波は 垂直 左側で 完全
反射される 筈になるが 上図の 場合は 所謂
Overhang Cliff* であつて 完全反射に 較
べると 位相が 少し 変なつて くる。

* J.J. Stoker "Water Waves"

そう言う訳で 従来の L_2 に属する解は水面と舷側の交りの角が鈍角である場合の解と考えられる。

又舷側が垂直に交れる場合 K が小さければ従来の解でよいであろうが K が大きくなると場合が悪く 結局 L_2 に属する解の適用範囲は又狭

$$KT < 1 \quad \text{--- (15)}$$

と考えられる。

それより短波長域では ϕ の型の L_1 に属する ϕ の方が適当である。

実際 $K \rightarrow \infty$ の特殊積分方程式 (10) は

$$v(x, 0) \rightarrow \frac{1}{\pi K} \int_{-1}^1 \frac{p(x')}{x-x'} dx' \quad \text{--- (16)}$$

と成って 簡単には ϕ の型の解が与えられるが ϕ の型の解では立端点で $v \rightarrow \infty$ となり $x = \pm 1$ で v が有限に成らな。

しかしこのように考えると ϕ の解は短波長 $KT > 1$ の垂直舷側船の解として採用する事が出来る。

最後に不連続な圧力分布の代表として ϕ の型のつまり p が δ 関数で表わされるとすると (7) から

$$p(x) = \delta(1-x)$$

とすると

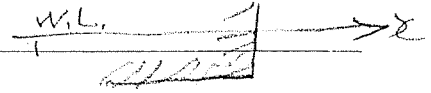
$$v(x, y) = -T(x-1, y)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{--- (17)}$$

となり、例えば"左右動力"は (13) で ϕ of set が与えられ 且つ T は $x=1$ で jump するから

昭和 年 月 日

結局右図の如くやはり
左側が垂直であるかヒツチが
か角ばった船型を代表
する車になる。



左右動以外の運動では(14)により

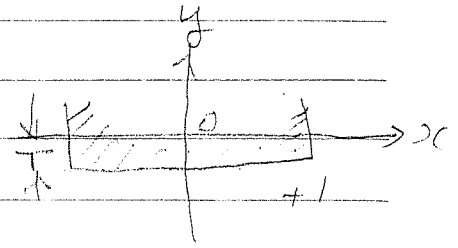
$$\psi(x) = \int_0^x \psi(x) dx, \quad (18)$$

が $x=1$ まで jump する車になるのでやはりそこで
流れは急激に変化し結局の所上図の船
型を代表すると考えられる。

さう言う訳でこの場合は垂直左側を
代表すると言ふ意味では右の型と同じ
であり、結局 L_1 に属する解は垂直左側
船を代表すると言ふことができる。

7. 箱船の左右動

前節の考察によつて浅吃水箱船の左右動のポテンシャルは3.4節の結果を利用して直ちに求められる事になる。



なお3.5で考えた楕円形の場合についてはあまり簡単にはならないが形式的には3.3(9)によつて解答が与えられる事になる。

しかし一般に浅吃水船では箱船の方が普通であると考へられるのでこの場合に限つて考へる事にする。さて吃水をTとすると境界条件は

$$-\phi_y(x,0) = T\{\delta(x-1) - \delta(x+1)\}, \quad (1)$$

よつて3.3(4)によつて前は

$$p(x) = T\{P(x,1) - P(x,-1)\} = T\{\delta(x-1) - \delta(x+1) - KR^*(x,1) + KR^*(x,-1)\} \quad (2)$$

左右方向の力はこれに差をつけて積分しなければならぬので存在しない。

元素薄いのので附加質量は0と近似していいわけである。

モーメント M は3.3(21)によつて

$$M = \int_{-1}^1 p(x)x dx = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-1}^1 p(x)u_1(x) dx = T\sqrt{\frac{2}{3}}\{P_1(1) - P_1(-1)\} \quad (3)$$

出て行く波の振幅(コッチ=実数)は3.3(22)より

$$H^+ = \int_{-1}^1 p(x)e^{ikx} dx = T\{P_d(1) - P_d(-1)\} \quad (4)$$

これはハスキントの関係により波の強制力

昭和 年 月 日

に等しいからその本は上式からよくわかる。

つまり 左側における圧力は一様に $P_0(z=1)$ であるとみなしているわけである。

さらに 4 節の 1 箇係を使えば R^* を計算する必要はなく、§4 (6) (7) より、(2) の R^* の部分は

$$K \{ R^*(x, 1) - R^*(x, -1) \} = \frac{P_0(x)}{P_0(1)}$$

$$= \frac{1}{P_0(1)} \{ z P_{12}(x) - P_{1K}(x) - P_1(x) \}, \quad (15)$$

となって上下移り、横軸の両端が"直ちに計算出来る。"

なお 左右方向の力は 0 と見なすことができているが、減算に依りては出てゆく、§4 (4) で与えられるので直ちに計算出来る。

又 (4) は §4 (9) (13) により

$$H^* = \frac{iKT}{P_0(1)} h_0(K)$$

$$= \frac{T}{P_0(1)} \{ z h_1 + K \frac{d}{dx} h_1 \}, \quad (16)$$

なる 1 箇係があるので $P_0(x)$ を ^{直接} 求める必要もない。

又 (4) は §3 (18) により

$$H^* = 2T \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n+1} v_{2n+1}(1), \quad (17)$$

であるが §2 (25) により h_{2n+1} の位相図はすべて h_1 に等しいので結局 H^* は h_1 と同位相である。

なお右部分に働く力 Y^ε は 有限に $x=1$ の形では

$$Y^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1-\varepsilon}^1 a / p_0(x) dx \rightarrow a, \quad \dots (6)$$

となりこれは 静水圧の 変動分のみである。

つまり $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると 結果より ずっと 小さく 存在 したう から どのように 近似 しても よい だろう。

逆に 考えると $1 < \varepsilon \ll 1$ と 仮定 しなければ ならない。 その ような 時は この 節の 近似 は 成り 立たない。

出 来 事 項 は f_3 (22) より、

$$H' = \int_{-1}^1 p(x) e^{ikx} dx = a / p_0(1) + b / p_0(-1), \quad \dots (7)$$

これで f_4 の 関係 を 利用 すると この 場合 p_0 と p_1 の 知識 で 解ける 事 になる。

この 応用 として a, b を 適当 に 定めて 板に 働く 力 の 大きさを 変える 問題 を 考え よう。

波の 強さ と エネルギー は f_2 (18) に より 入射 波 の 振幅 を 単位 とし (4), (5) は f_3 に だけ 関係 している から 互換 させ

$$F_{a0} = \int_{-1}^1 p_0(x) dx = \sqrt{2} \int_{-1}^1 p_0 v_0 dx = \sqrt{2} h_0, \quad (8)$$

$$F_{a1} = \int_{-1}^1 p_1(x) dx = \sqrt{3} h_1, \quad \dots (9)$$

となる。

さ くら かに (4), (5) と 打 消 し 合う 為 に は

$$\left. \begin{aligned} a + b &= -h_0 / p_0(1) \\ a - b &= -h_1 / p_1(1) \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

が 求め ば よい。

昭和 年 月 日

§4 の関係式 (15), (16) 等を参照して、この関係からは常に一対の a, b が定まるように思われる。しかし物理的に考えれば、わかるように $V \rightarrow 0$ では、実際困難なことが知られる。

さてこのように a, b を選ぶと、途中の部分に働く力はなくなるから、その部分は動かないであろう。

この時、出て行く波は (7) に (10) を代入して

$$H^+ = -\frac{P_2(\omega)}{P_0(\omega)} h_0 - \frac{P_2(-\omega)}{P_1(\omega)} h_1, \dots \quad (11)$$

一方では Haskeima の関係よりこれは強制力に等しい筈であり、途中の部分のそれは 0 である故、結局これは端部や動部に働く力と見なされる。

しかし端部に働く力 (6) は (4)(5) に含まれているし、又 波の力 (8)(9) にも含まれていると考えられるのでこれは 0 になるのではあるまいか？

そうすると、反射波がなくなる事に、§4 の関係からは今の所証明出来ないう。

9. 水線幅が僅かに変化する場合

§5で考察した左側が外向に傾斜している場合を考えよう。

そのような場合は水線幅が変化すると考えられるがここで考えないように水線幅が変化すると考えると近似的に端部で§5(4)型と与えられる容積を排除するポテンシャルを加えればよからう。

§5で同式では時間的関係を無視したのが相当は $P(x)$ は §2(1) のようになっているので正確には排除すべき容積 ΔA は

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{1}{2\alpha\rho g} \left[P_c(t) \cos \omega t - P_s(t) \sin \omega t \right]^2 \\ &= \frac{1}{2\alpha\rho g} \left[\frac{1}{2} P_c^2(t) + \frac{1}{2} P_s^2(t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (P_c^2(t) - P_s^2(t)) \cos 2\omega t - P_c(t) P_s(t) \sin 2\omega t \right] \end{aligned} \quad (1)$$

となる。

この内右辺の初めの2項は定常成分である。

今上下部の圧力分布を $\rho g Y P_c(x)$ (Y は振幅) とすると

(1) は

$$\frac{\Delta A}{Y^2} = \frac{1}{2\alpha} \left[|P_c(t)|^2 + \operatorname{Re} \left\{ P_c(t)^2 e^{2i\omega t} \right\} \right], \quad (2)$$

となる。

定常成分による上下力の増分 ΔF_s は直ちに

$$\Delta F_s = \rho g \Delta A = \frac{\rho g Y^2}{2\alpha} |P_c(t)|^2, \quad (3)$$

と与えられる。

昭和 年 月 日

倍周波数成分について(2)の形からその圧力分布は 2ω (K は4倍)に因する解環で与えられるから

$$p(x) = \frac{P_0^2(1,K)}{2\alpha} \{ p(x,1;4K) + p(x,-1;4K) \}, \quad (4)$$

よって 2ω による力の増分 ΔF_D は

$$\int p(x) dx = \frac{P_0^2(1,K)}{2\alpha} P_R(1,4K), \quad \dots (5)$$

であるから

$$\Delta F_D = \frac{\rho g Y^2}{2\alpha} \operatorname{Re} \left\{ P_0^2(1,K) P_R(1,4K) e^{2i\omega t} \right\}, \quad (6)$$

となつて近似的には定常成分と倍周波成分が増えるだけと考えられる。

特に $K \rightarrow 0$ では $P_R \doteq 1$ と考えられるから(3)は水層が変化しないとした時の静水圧分の補正項である事は直ちにわかるだろう。

揺動れについてはその圧力分布を $\rho g \theta P_0(x)$ とすると対称性からモーメントの増分は0になる*。

しかし上下力の増分はあつて

$$\Delta F_S = \frac{\rho g \theta^2}{2\alpha} |P_0(1)|^2, \quad (7)$$

$$\Delta F_D = \frac{\rho g \theta^2}{2\alpha} \operatorname{Re} \left\{ P_0^2(1,K) P_R(1,4K) e^{2i\omega t} \right\}, \quad (8)$$

と与えられる。

又入射は θ がある時も同様にして圧力分布を $\rho g a P_0(x)$ とすると力、モーメントの増分は夫々

* 復元モーメントの変化分は θ^3 に比例するので θ^2 のオーダーではこうなる。

$$\left. \begin{array}{l} \Delta F_3 \\ \Delta M_3 \end{array} \right\} = \frac{\rho g a^2}{4\alpha} \left\{ |P_a(\omega)|^2 \pm |P_a(-\omega)|^2 \right\}, \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta F_D \\ \Delta M_D \end{array} \right\} = \frac{\rho g a^2}{4\alpha} \operatorname{Re} \left[\left\{ \begin{array}{l} P_a(1,4K) P_a(1,4K) + P_a(-1,4K) P_a(-1,4K) \\ P_a(1,4K) P_a(-1,4K) \end{array} \right\} e^{2i\omega t} \right], \quad (10)$$

と与えられる。

しかしこれらの式はすべて夫々の運動のみが純粋にある場合で合成した運動では違つた形になる。

つまり、合成成分は(1)で与えられるが(1)の圧力はすべての運動のその合成圧力であるから一般には

$$\Delta A = \frac{1}{4\alpha} \left\{ \left| \sum_j x_j P_j(\omega) \right|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \left(\sum_j x_j P_j(\omega) \right)^2 e^{2i\omega t} \right\} \right\}, \quad (11)$$

となるべきである。

従つて力およびモーメントの成分は

$$\left. \begin{array}{l} \Delta F_3 \\ \Delta M_3 \end{array} \right\} = \frac{1}{4\alpha} \left\{ \left| \sum_j x_j P_j(\omega) \right|^2 \pm \left| \sum_j x_j P_j(-\omega) \right|^2 \right\}, \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta F_D \\ \Delta M_D \end{array} \right\} = \frac{\rho g}{4\alpha} \left[\left\{ \left(\sum_j x_j P_j(\omega) \right)^2 + \left(\sum_j x_j P_j(-\omega) \right)^2 \right\} P_0(1,4K) e^{2i\omega t} \right], \quad (13)$$

$$\Delta M_D = \frac{\rho g}{4\alpha} \left[\left\{ \left(\sum_j x_j P_j(\omega) \right)^2 - \left(\sum_j x_j P_j(-\omega) \right)^2 \right\} P_0(1,4K) e^{2i\omega t} \right], \quad (14)$$

等々となつて夫々他の運動が相互に干渉し合う事になる。

しかしながら一方これらの増分は定常部分と倍周波数成分であるから運動方程式は基本周波数成分と別になる。

従ってこのよう近似では先ず基本周波数成分について運動方程式をたて、夫々の運動の振幅をおめ、それを上の式に代入して力の増分をおめ、それを使って定常、倍周波数に対する運動方程式を解けば、夫々に対応する振幅成分が求められる。

この方法では力の増分を逐次近似的に計算しているのので、この手順を反復して繰返すのは無意味である。

(例えば ρ_0 は先端部で対数的に無限大となるので上の手順はきれない)

つまりあくまでも基本周波数成分は補正項として扱おう立場である。

いづれにしても上の式から明らかのようにそれらは振幅の自乗に比例する事になる。