M-47-1
船水委(I) 51.10.26

昭和50年8月15日

2次元流体力の計算に関する覚書

別所正利

内容

	頁
概要	0
1. 自由表面のない場合	1
2. 動揺問題	6
3. 物体の僅かな変形の影響	9 − 13

昭和　　年　　月　　日

概要

動揺問題において実用上2次元流体力を計算する事は大変重要な問題であり現在 Ursell・田才方式が主として使われている。

しかしこの方法は等角写像関数がわからないと実行出来ない点が不便であるが実際上はストリップ法の精度から考えてルイス・フォーム近似で充分である。

もう一つの方法は任意形状特にルイス・フォームで困難な場合に吹出し分布で表現する方法が考えられている。

これらの従来の方法では圧力を求めるには得られた解からポテンシャルを計算し直さなければならない。

そこで始めから物体上の特異点が圧力そのものもしくは類似のものになれば大変便利になるだろう。

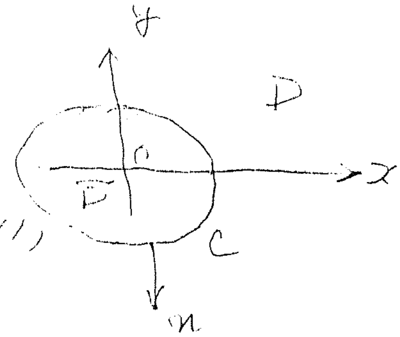
特に最近のように水圧分布をも必要とする際は大変魅力的である。

以下1, 2節についてその方法を説明する。3節では少し観点を変えて物体形状の僅かな変化が速度ポテンシャルにおよぼす影響について考察する。

と言うのはそれがわかると例えばルイス・フォーム近似と正解との差も見積れるし又船は船種が同じなら大体似た形になっているので船型の相違による流体力の変化も見積れるからである。

1. 自由表面のない場合

固体 D の運動による外側の水の速度ポテンシャル $\phi(x,y)$ は



$$\phi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\phi(x',y')\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}-\frac{\partial\phi}{\partial n}\log\frac{1}{r}\right]ds, \quad (1)$$

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2$$

と表わされる。

境界条件としては法線速度が与えられるので(1)において (x,y) が C 上に来れば doublet potential の特性を考慮すると

$$\frac{1}{2}\phi(x,y)\Big|_C=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\Big|_C-\frac{\partial\phi}{\partial n}\log\frac{1}{r}\right]ds, \quad (2)$$

は与えられた $\partial\phi/\partial n$ に対して ϕ に関する Fredholm の第1種の積分方程式である*。

それ故解は一義的に定まる。又第1種であるから解の収束も速くかつ安定であると考えられる。

この解法における計算上の難点は核の法線微分であるが、この点に関しては $\log r$ の共役関数 θ を

$$(x-x')+i(y-y')=re^{i\theta}, \quad (3)$$

によって導入すると

$$\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}=-\frac{\partial\theta}{\partial s},\quad \frac{\partial\theta}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial s}\log\frac{1}{r}, \quad (4)$$

なる関係がある故この第1式を(2)に代入すれば特に分布が部分区間で一定の場合積分は大変簡単に実行出来る。

---

* Ursell

又流線速度を計算する手間を省くためには境界条件を流れ関数ψで指定すればよい。
ψについても(1)と同様の表現が出来て

$$\psi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\psi(x',y')\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}-\frac{\partial\psi}{\partial n}\log\frac{1}{r}\right]ds, \qquad (5)$$

となる故 与えられたψに対しては(2)と同様

$$\frac{1}{2}\psi(x,y)\Big|_C=\frac{1}{2\pi}\int_C\psi(x',y')\frac{\partial\theta}{\partial s}ds-\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial\psi}{\partial n}\log\frac{1}{r}ds, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=-\frac{\partial\phi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial s}. \qquad (7)$$

なる第1種積分方程式を得る。
(2)の場合未知関数はφであったが今度は$\partial\phi/\partial s$であるのでその物理的意味は明白である。
流れ関数の表現(5)において(4)と(7)により部分積分を実行すると（ポテンシャルは一価とする）。

$$\psi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\phi(x',y')\frac{\partial\theta}{\partial n}-\frac{\partial\phi}{\partial n}\theta\right]ds, \qquad (8)$$

を得る。
これを少し書き変えて

$$\psi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_C\phi(x',y')\frac{\partial}{\partial s}\log r\,ds-\frac{1}{2\pi}\int\psi(x',y')\frac{\partial\theta}{\partial s}ds. \qquad (9)$$

とするとこれはφに関する積分方程式になる。

従来慣用されるのは吹出し吸込み，又は2重吹出し分布による表現であるが，それを導く為にDで正則な調和関数ϕ_iを導入すると，

$$\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\phi_i(x',y')\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}-\frac{\partial\phi_i}{\partial n}\log\frac{1}{r}\right]ds=0,\quad (x,y)\ \mathrm{in}\ D,\qquad(10)$$

であるから，今

$$\phi(x,y)=\phi_i(x,y)\quad \mathrm{on}\ C,\qquad(11)$$

とすると(1)と(10)の引算によって

$$\phi(x,y)=+\frac{1}{2\pi}\int_C\sigma\log\frac{1}{r}\,ds,\qquad(12)$$

$$\sigma=\frac{\partial}{\partial n}(\phi_i-\phi)\Big|_C,\qquad(13)$$

又

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_i=\frac{\partial}{\partial n}\phi,\qquad(14)$$

とおくと

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_C\mu\,\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,ds,\qquad(15)$$

$$\mu=\phi-\phi_i\Big|_C\qquad(16)$$

を得る。[+]

(15)を(4)を使って部分積分すると

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_C\gamma(s)\,\theta\,ds,\qquad(17)$$

$$\gamma=\frac{\partial}{\partial s}\mu,\qquad(18)$$

Lamb,

昭和　　年　　月　　日

となって circulation による表現となる。

つまり吹出し，2重吹出し，circulation 夫々単独の特異点分布による表現があるが この内(18)があるので circulation と二重吹出しは互に一方から他を導ける。

なお今迄は一価のポテンシャルを想定して来たが circulation 分布ではその制限はないので揚力のある場合有利である。

この時 Kutta の条件は $\gamma=0$ と指定すればよい。

特に一様流れの場合（今は x 方向の単位速度流れとする）で二重吹出しでは大変簡潔になる。

と言うのは $\bar{D}$ で[illegible]で与えられた法線速度

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n} \qquad (19)$$

を持つ調和関数は明らかに

$$\phi = -x \quad \text{in } D \qquad (20)$$

で与えられる故 (16)は

$$\mu = (1)\phi \qquad (21)$$

又 circulation では

$$\gamma = \frac{\partial \mu}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(x+\phi) \qquad (22)$$

となるが この γ は明らかに その点の切線速度である。

それ故 μ もしくは γ による表現で μ, γ を求めると得られた特異点強さが直接速度が求まると言う利点がある。

しかし吹出し分布では σ は(11), (13)からわかるように C 上で $\phi=\phi_c$ なる調和関数 ϕ_c の法線微分と与えられた境界条件で与えられるので直接物理量を表現していない。

この関係は調和関数の第2境界値問題に特有の事であって第1問題になると今度はφの方が物理量に関係して来る。

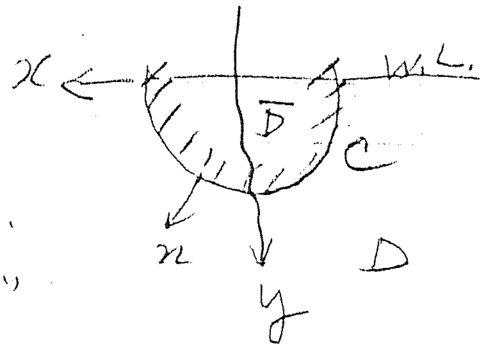
従来第1問題では2重吹出分布 第2問題では吹出分布による表現を慣用しているけれどこの観点に立てばむしろ逆の方が特異点と物理量の関係がつけやすい訳になる。

なお(20)のような簡単な内部ポテンシャルφiが求まるのは一様流れの場合だけで例えば物体の回転による流れではφiを求める事自体が元の問題と同じ程度の問題であるので3種の表現の間で優劣はない事になる。

従ってその時は元の表現(1)もしくは(5)をかえるのが今考えているような意味では有利である。

2. 動揺問題

この問題ではφは圧力に比例するが最もよく用いられる所謂 Ursell, 田才法や湧出しで表現する方法では積分方程式を解いた後で圧力を計算しなおさなければならない。



しかし前節の考察によればφを直接未知関数として問題を解きうるのでこの方が便利である。

さて右図のように座標軸をとるものとすれば一般に

$$\phi(P) = \int_C \left[\phi(Q)\frac{\partial}{\partial n}S(P,Q) - \frac{\partial\phi}{\partial n}S\right] ds(Q), \qquad (1)$$

$$P = (x, y), \quad Q = (x', y')$$

$$S(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}\cos k(x-x')}{k - K + \mu i}\,dk, \qquad (2)$$

$$(x-x') + i(y-y') = r_1 e^{i\theta_1}, \quad (x-x') + i(y+y') = r_2 e^{i\theta_2},$$

Sに共役な関数

$$T = \frac{1}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}\sin k(x-x')}{k - K + \mu i}\,dk, \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}S &= \frac{\partial T}{\partial y}, & \frac{\partial S}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial x}T \\ \frac{\partial}{\partial n}S &= \frac{\partial}{\partial s}T, & \frac{\partial S}{\partial s} &= -\frac{\partial}{\partial n}T \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

を導入すると (1) は

$$\phi(p) = \int_C \phi(Q)\frac{\partial}{\partial s}T(p,Q)\,ds - \int \frac{\partial\psi}{\partial s} S\,ds$$

$$= \int_C \phi\frac{\partial}{\partial s}T\,ds + \Big[\psi, S\Big]_{A,7}^{\text{FP}} + \int \psi\frac{\partial}{\partial s}S\,ds, \quad (5)$$

と書ける。

今 heaving では

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial s}, \quad \psi = x, \quad (6)$$

であり、

$$0 = \pi \int_{-1}^{1} S(p,Q)\,dx' + \int_C \left[y'\frac{\partial}{\partial n}S(p,Q) - \frac{\partial y'}{\partial n}S\right] ds(Q), \quad P \in D, \quad (7)$$

であるから (1) と差引いて

$$\phi(p) = \int_C (\phi + y')\frac{\partial}{\partial n'}S(p,Q)\,ds + \int_{-1}^{1} S(p,x')\,dx', \quad (8)$$

又 左右動では

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n}, \quad (9)$$

だが

$$\int_C \left(x'\frac{\partial}{\partial n}S - \frac{\partial x'}{\partial n}S\right) ds - \int_{-1}^{1} x'\frac{\partial}{\partial y'}S\,dx' = 0. \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y'}S + KS = 0\right)$$

故に

$$\phi(p) = \int_C (\phi + x')\frac{\partial}{\partial n}S\,ds - \int_{-1}^{1} x'\frac{\partial}{\partial y'}S\,dx', \quad (11)$$

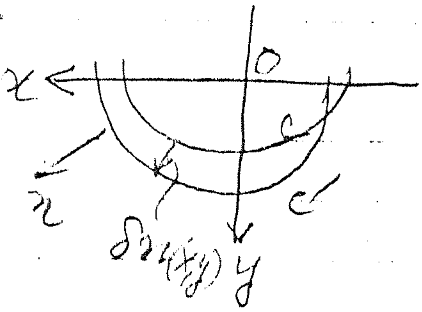
昭和　年　月　日

これらの式をとけば*直接圧力がもとめられる。
　従って力の計算も直ちに実行出来る。
特に(5)の形で区間を等分し p, q を矩形分布とすれば計算は大変簡単になる。
　なお下記文献におけるポテンシャルの分離には逆時間ポテンシャル(元の複素共役値)を導入するとよく理解出来る。**

* 別刷　防大理工紀要　3巻1号　昭和40年5月
** 〃　関西造船協会　昭和50年秋期講演会

3. 物体の僅かな変形の影響

応用面の問題として物体形状が僅かに原形から変形したような場合の圧力等の変化に関する知識は重要であると考えられる。



この問題は前に少し触れた事があるが、こゝでは少し詳しく述べて見よう。

その為にはノイマン関数 $N(P,Q)$ を次のように導入するのが便利である。

即ち $A(P,Q)$ なる D で正則な関数を考えて

$$N(P,Q)=S(P,Q)+A(P,Q), \quad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}N(P,Q)\Big|_C=0$$

となるものをノイマン関数と呼ぶ。*

前節の考察により $A(P,Q)$ は

$$A(P,Q)=\int_C\left[A(R,Q)\frac{\partial}{\partial n}S(P,R)-S(P,R)\frac{\partial}{\partial n}A\right]ds(R), \quad (2)$$

と表わされ、境界条件は (1) より

$$\frac{\partial}{\partial n_P}A(P,Q)=-\frac{\partial}{\partial n_P}S(P,Q), \quad \cdots (3)$$

であるから これから一義的に定まる。

N が求めると前節 (1) の S のかわりに代入して (1) を使えば

$$\phi(P)=-\int_C\frac{\partial\phi}{\partial n}(Q)\,N(P,Q)\,ds, \quad \cdots (4)$$

---

* Bessho; M.D.A. vol.8 No.1, 1968

今Cが僅かに法線方向にδnだけ変形したとし、C'に対するノイマン関数をN'としよう。

そして
$$N'(P,Q) - N(P,Q) = \delta N(P,Q), \qquad (5)$$
と記すと$P=Q$における特異性は消えるからδNはDの中で正則となる。

又
$$\frac{\partial}{\partial n}\delta N(P,Q)\Big|_C = \frac{\partial}{\partial n}N'\Big|_C - \frac{\partial}{\partial n}N\Big|_C = \frac{\partial}{\partial n}N', \qquad (6)$$
となるから(4)によって
$$\delta N(P,Q) = -\int_C \frac{\partial}{\partial n_R}N'(Q,R)\,N(P,R)\,ds(R), \qquad (7)$$
を得る。

ところがグリーンの定理により
$$\delta N(P,Q) = \iint \nabla N'(Q,R)\nabla N(P,R)\,d\tau$$
となるが面積要素$d\tau$は
$$d\tau = \delta n\,ds, \qquad (8)$$
と書けるし、又 $N' \fallingdotseq N$ であるから高次の項を省略して
$$\delta N(P,Q) = \int_C \nabla N(Q,R)\nabla N(P,R)\,\delta n\,ds, \qquad (9)$$
なる表示を得る。

昭和　　年　　月　　日

以上の方法をφに適用するとC'に対するφ'との差δφは

$$\delta\Phi(P) = \int_C \nabla\Phi(Q)\,\nabla N(P,Q)\,\delta n\, ds, \qquad (10)$$

を得る。ただし　$\Phi(P) = \phi(P) + \chi_3(P)$*, $\frac{\partial}{\partial n}\Phi(P)\Big|_C = 0$, (10').
所でNの境界条件により

$$\nabla\Phi\,\nabla N = \frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}N, \qquad (11)$$

であるから(10)を部分積分すると

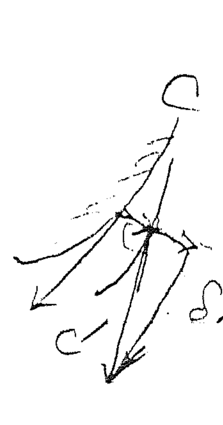
$$\delta\Phi(P) = N(P,Q)\frac{\partial\Phi(Q)}{\partial s}\delta n(Q)\Big|_{AP}^{FP} - \int_C N(P,Q)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\delta n\right)ds, \qquad (12)$$

を得る。
それ故

$$\frac{\partial}{\partial n}\Phi\Big|_C = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\delta n\right), \qquad (13)$$

となる。

この境界条件は線が右図のように僅かに変形した時の法線方向速度の変化分の近似値であるから容易に理解出来る。



しかし(13)を考えただけでは(12)のδφの右辺第2項だけしか出て来ないで右辺第1項が抜けてしまう。

右辺第1項は水線の幅が変る影響を表わしているがこの項の法線速度は明らかに0である。

---

* $x_1 = z$, $x_2 = y$; χ_3 は $\frac{\partial\chi_3}{\partial n} = y\frac{\partial x}{\partial n} - x\frac{\partial y}{\partial n}$ となるような D において正則な関数とする。いずれにしても $\partial\Phi/\partial n = 0$ となる事が大切である。

解は唯一であるからD内で正則な関数ならば法線速度が0になると恒等的に0となるが、この関数は明らかに水面における交点で対数的特異性を有するので恒等的に0にはならないで見る通りノイマン関数そのものとなっている。

この解を特異第2次解となずけよう。
今はそれが水面と物体の交点に特異点を有するノイマン関数に一致する。

$$\delta\Phi(P) = \Phi_c(P,Q)\frac{\partial\Phi}{\partial s}\delta n\Big|_{A.P.}^{F.P.}$$

$$-\int_C N(P,Q)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\delta n\right)ds, \quad (14)$$

$$\Phi_c(P,Q) = N(P,Q), \quad Q \equiv A.P.\ \text{or}\ F.P. \quad (15)$$

実際上の計算には一般的にノイマン関数を計算するのは大変であるから前節のような極限で境界値問題を解く事になるがその際(14)右辺第2項は全く前節の手法で処理出来る。

第2次解もしくはノイマン関数についてもそれを(1)のように別けて正則部分$A(P,Q)$に関する(2)の表示を使えば全く同じ手法が使える事は前述の通りである。

力についても同様の式が得られ*

$$\delta\int_C \phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n}ds = \int_C\left[\nabla\chi_i\nabla\chi_j - \nabla\Phi_i\nabla\Phi_j\right]\delta\nu\, ds, \quad (16)$$

となり $\partial\Phi/\partial n = 0$ とするから部分積分によって

*別所 前述

$$\delta\int_C \phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} ds = \int_C \nabla x_i \nabla x_j \delta n\, ds - \int_C \frac{\partial \Phi_i}{\partial s}\frac{\partial \Phi_j}{\partial s}\delta\nu\, ds$$

$$= \int_C \nabla x_i \nabla x_j \delta n\, ds - \left[\Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial s}\delta\nu\right]_{A.P}^{F.P.}$$

$$+ \int \Phi_i \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\partial \Phi_j}{\partial s}\delta\nu\right\} ds \quad , \quad (17)$$

となるがこの右辺で i と j を入れかえても同じである。
波の強制力もしくは波振幅については

$$H(K) = -\int_C \Phi_d \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \, , \quad (18)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_d = \phi_0 + \phi_d , \quad \phi_0 = e^{-Ky + iKx} \\ &\frac{\partial}{\partial n}\Phi_d = 0 \end{aligned}\right\} (19)$$

$$\delta H = \int_C \nabla\Phi \nabla\Phi_d \delta n\, ds$$

$$= \Phi_d(P)\frac{\partial \Phi}{\partial s}\delta n \Big|_{A.P}^{F.P.} - \int_C \Phi_d \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial s}\delta n\right\} ds , (20)$$

このようにして水面幅の変化の影響はかなり大きいものと考えられる。

なお $x_1 \equiv x$，$x_2 \equiv y$ であるからこの場合は簡単であるが x_3 については新しく内部問題をといておかねばならないのが面倒である。