

# 過渡応答の Laguerre 多項式による展開

別所

## 目次

	頁
概要	0
1. ラゲール多項式による展開とフーリエ変換	1
2. 周波数応答の型	4
3. 発散性の応答	7
4. 楕円応答	10
5. 時間定数の決め方	13-15

附録 A. ラゲール多項式

B. フレネル積分

58.6.12

注) 頁 8, 12 に誤りあり

5

## 概要

船を押えて離れた時の船自体運動と船から離れた所の発散波の計測によつて船の周波数応答を求めるとき、解析法として直接フーリエ積分を実行するF.F.T.を使う方法が考えられ、共に充分有用であると認められ、おしる実験法特に反射波が問題であると考えられる。  
水槽端からの

解析法上の問題点としては有限時間で打ち切る事に対する打ち切り修正があげられる。

本覚書はその為には半無限領域における直交周波数系であるラゲール多項式に展開しようと提案である。

ラゲール多項式そのものが過渡応答に似た関数であるので大変適当な方法であるように思われ、またその展開係数が周波数応答(ラプラス変換)が簡単な形であらわされ、また周波数応答の三角波数展開形が与えられるなど有用な知見が多くえられる。

## 1. ラゲール多項式による展開とフーリエ変換

今時刻  $t$  の関数  $f(t)$  が ラゲール多項式 により

$$f(t) = e^{-\frac{t}{T}\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{t}{T}\right), \quad (1.1)$$

2.12  $\tau = t/T$  とし,  $T$  は定数で定める。(A.3) により  $a_n$  は次のように求められる。

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{t}{T}\alpha} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{t}{T}\right) dt = T a_n \frac{(n+\alpha)!}{n!}, \quad (1.2)$$

特に  $L_0^{(\alpha)}(\tau) = 1$  であるから

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{t}{T}\alpha} dt = T \alpha! a_0, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f^2(t) e^{-\frac{t}{T}\alpha} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha)!}{n!} a_n^2 \\ &= T^{\alpha-1} \int_0^{\infty} f(t) \frac{dt}{t^\alpha} \end{aligned} \quad (1.4)$$

フーリエ変換は

$$\bar{F}(i\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt, \quad (1.6)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \bar{F}(i\omega) d\omega, \quad (1.7)$$

よって定義より (A.5) より

$$\bar{F}(i\omega) = T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha)!}{n!} \frac{\left(\frac{1}{2}\omega T + \frac{1}{2}\right)^n a_n}{\left(i\omega T + \frac{1}{2}\right)^{n+\alpha+1}}, \quad (1.8)$$

すなわち

$$F(0) = T z^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha)!}{n!} (-1)^n a_n, \quad \dots (1.9)$$

$$\bar{F}(i\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{T}{(i\omega)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha)!}{n!} a_n, \quad (1.10)$$

一般に  $\bar{F}(i\omega)$  の  $\omega \rightarrow \infty$  の漸近形は  $\alpha > 2$  だと考  
 考えられるので、すなわち  $\alpha$  の値が決められる。

また (1.6), (1.7) から

$$\int_0^{\infty} f(t) f(t-t') dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(i\omega) \overline{F(i\omega)} e^{i\omega t'} d\omega, \quad (1.11)$$

また (1.8) によれば  $a_n$  は実数であるから

$$\overline{F(i\omega)} = F(-i\omega), \quad \dots (1.12)$$

今

$$u = \frac{\frac{1}{2} - i\omega T}{\frac{1}{2} + i\omega T}, \quad \omega T = \frac{(1-u)}{2i(1+u)}, \quad (1.13)$$

とすれば

$$\omega T = \frac{1}{2} \tan(\theta/2), \quad \dots (1.14)$$

とすれば

$$u = e^{-i\theta}. \quad \dots (1.15)$$

となる  $\omega$ -plane の実軸は  $u$ -plane の単位円

に写像される、(1.8) は

$$\bar{F}(i\omega) = T \left( \frac{e^{i\theta/2}}{2 \cos(\theta/2)} \right)^{-1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+\alpha)!}{n!} a_n e^{-in\theta}, \quad (1.16)$$

これらの式は  $F(i\omega)$  は  $\omega$  の下半面で正則、 $u$ -plane の単位円の内部で正則であり、 $u^n$  で中級数展開できることを示している。

さて (1.13) から

$$T d\omega = \frac{i du}{(1+u)^2} = \frac{d\theta}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad (1.17)$$

これを (1.16) に代入して

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(i\omega) \frac{e^{\frac{j\theta}{2}(\alpha+1) + i'n\theta}}{(2 \cos \frac{\theta}{2})^{2n+1}} d\omega = (-1)^n \frac{(n+\alpha)!}{n!} a_n \quad (1.18)$$

従って  $a_n$  は  $F(i\omega)$  からほのよりに決められる。

また (1.6) から  $a_n$  が実数であることを考えると

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} [F(i\omega)] &= T (2 \cos \frac{\theta}{2})^{2n+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+\alpha)!}{n!} a_n \left\{ \begin{array}{l} \cos(n + \frac{1+\alpha}{2})\theta \\ -\sin(n + \frac{1+\alpha}{2})\theta \end{array} \right\} \\ \operatorname{Im} [F(i\omega)] &= T (2 \cos \frac{\theta}{2})^{2n+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+\alpha)!}{n!} a_n \left\{ \begin{array}{l} \sin(n + \frac{1+\alpha}{2})\theta \\ \cos(n + \frac{1+\alpha}{2})\theta \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

のように実部と虚部がわかる。

又この式から実部がわかれば虚部がわかり、虚部がわかれば実部がわかる。これは Kramer-Kronig の関係からも言える事である。

この事は又この関数の対数をとっても言える (この関係は  $F$  が  $\omega$  の上半面で正則な事から出て来る。この関数の対数もやはり上半面で正則だから) から 振幅ゲインがわかれば位相が、位相がわかればゲインがわかるという事である。

## 2. 周波数応答の型

実際の周波数応答の  $\omega \rightarrow 0$  又は  $\infty$  の性質等の型を考えるには それぞれの係数の、周波数依存性を細かく考える必要はないので以下これを無視して運動方程式を考え極値を調べる。

i) 上下動変位  $y(t)$ , 過渡応答.

$$M\ddot{y} + N\dot{y} + \delta A_{\omega} y = 0, \quad \dots (2.1)$$

$t=0$  で  $y=y_0$ ,  $\dot{y}=0$  の周波数応答は.

$$\frac{Y(\omega)}{y_0} = \frac{i\omega M}{\delta A_{\omega} - \omega^2 M + i\omega N}, \quad \dots (2.2)$$

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \dots (2.3)$$

$$Y(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{i\omega M y_0}{\delta A_{\omega}} \rightarrow 0, \quad \dots (2.4)$$

$$Y(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{y_0}{i\omega}, \quad \dots (2.5)$$

それ故 (1.10) より, この場合は

$$\alpha = 0, \quad \dots (2.6)$$

極値れども  $t=0$  で  $\theta=0$  ならば"同様にして

に式のように  $\alpha=0$  である。

(2.4), (2.5) と (1.9), (1.10) からとると

$$Y(0) = 2T \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_n = 0, \quad \dots (2.7)$$

$$i\omega Y(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} y_0 = T \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad (2.8)$$

$$\frac{dY}{d\omega} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega + \frac{i}{2T})^{n+1}}{(\omega - \frac{i}{2T})^{n+2}} (\omega + \frac{2n+1}{2T} i) a_n \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{4T^2}{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n (2n+1) a_n,$$

↑ (2.4) から

(2.9)

$$\frac{M y_0}{\delta A \omega} = -4T^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n (2n+1) a_n, \quad \dots (2.10)$$

↑ 2.9  
 したがって上下中では  $M \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \infty$  のとき上式右辺の級数は収束しないと考えられる。

次に (2.2) の右辺を部分分数展開すると

$$\frac{Y(\omega)}{y_0} = \left( \frac{\sigma_1}{i\omega + \sigma_1} - \frac{\sigma_2}{i\omega + \sigma_2} \right) \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad \dots (2.11)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{N}{M}, \quad \sigma_1 \sigma_2 = \frac{\delta A \omega}{M}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{N}{2M} \left[ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4M\delta A \omega}{N^2}} \right] \quad (2.12)$$

for  $N^2 > 4\delta A \omega M$ ,

極の中では  $\sigma$  が虚数係数となるかどうかが常に静電容量で論ずる。

(2.11) のフーリエ変換はよく知られているように

$$y(t)/y_0 = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} [\sigma_1 e^{-\sigma_1 t} - \sigma_2 e^{-\sigma_2 t}] \quad (2.13)$$

この式から考えると  $T \equiv 1/\sigma_1$  とすればよいように見えるが勿論、 $\sigma_1$  そのものが実験結果から求められるべき値であらかじめ与えられてはいない。

ii) 初期条件が  $y = \dot{y} = 0$  で  $t=0$  での ~~重根~~<sup>P</sup> 解のせる場合 (前の場合は  $t=0$  まで上向きかかっていたとすれば、今は逆か)

$$\frac{Y(\omega)}{P} = \frac{P}{i\omega [\gamma A_{11} - \omega^2 M + i\omega N]} \quad (2.14)$$

$$Y(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{P}{i\omega \gamma A_{11}} \quad (2.15)$$

$$Y(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{(i\omega)^3 M} \quad (2.16)$$

(1.8) の周波数応答は (2.15) のような性質はもっていないから、この場合は  $Y(\omega)$  そのものについて考える

$$\frac{Y^*(\omega)}{P} = \frac{Y(\omega)}{P} - \frac{1}{i\omega \gamma A_{11}} = \frac{i\omega M + N}{\gamma A_{11} - \omega^2 M + i\omega N} \quad (2.17)$$

結局について考えるとやはり  $\alpha = 0$  とよい。



## 3. 発散波の応答

前節 i) 項の上下ゆれによる発散波  $\eta(x, t)$  は  $x$  の充分

大きい 場合では

$$\eta(x, t) \xrightarrow{x \gg 1} \frac{B\gamma_0}{2\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} M_2^*(\omega) e^{-\frac{i\omega|\omega|x + i\omega t}{g}} d\omega, \quad (3.1)$$

$$M_2^*(\omega) = \frac{-\alpha\omega D_2^+(\omega^2/g)}{\gamma B - \omega^2(M + P(\omega))}, \quad (3.2)$$

ゆれ

$$\int_0^{\infty} \eta(x, t) e^{-i\omega t} d\omega \rightarrow H(x, \omega) = \frac{B\gamma_0 M_2^*(\omega) e^{-\frac{i\omega|\omega|x}{g}}}{g}, \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_2^*(\omega) &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \alpha Y(\omega) \\ &\xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \end{aligned} \right\} \dots (3.4)$$

となるので  $\alpha = 4$  とすべきである。

なお 横ゆれと左右ゆれでは  $\alpha = 2$  とすべきである。

(3.3) のフーリエ変換は  $\omega$  の大きい所で <sup>実際 =</sup> かなり精度よく

おこなうようなので あまり問題もないと考えられるが、

$e^{-\frac{i\omega|\omega|x}{g}}$  なる因子の為に  $\eta(x, t)$  の記録は見た目にかなり不規則であるので 不安感がある。

そこでこれを一度前処理してから フーリエ変換を

する事を考えよう。

さて一般に  $a(t), b(t)$  のフーリエ変換を  $A(\omega), B(\omega)$  とすると (  $a, b$  は  $t=0$  から始まる過渡現象として )

$$\int_0^t a(\tau)b(t-\tau)d\tau = C(t), \quad (3.5)$$

$$\int_0^\infty C(t)e^{-i\omega t} dt = A(\omega)B(\omega), \quad (3.6)$$
$$C(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty A(\omega)B(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

互換関係があるから (3.1) において、新しく

$$\eta^*(t) = \frac{By_0}{2\pi g} \int_{-\infty}^\infty M_2^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.7)$$

$$\frac{By_0}{g} M_2^*(\omega) = \int_0^\infty \eta^*(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$e^{-\frac{i\omega|x|}{g}x} = \int_0^\infty W(x,t) e^{-i\omega t} dt, \quad x > 0, \quad (3.8)$$
$$W(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{i\omega|x|}{g}x + i\omega t} d\omega,$$
$$W(x,t) \stackrel{\neq}{=} 0 \quad \text{for } t < 0$$

(c.f. 附録 B)

とみると

$$\eta^*(t) = \int_0^t \eta(x,\tau) W(x,t-\tau) d\tau, \quad (3.9)$$

となり、これは  $x$  に関係しないから便利であると考えられる。

あるいは又  $e^{-i\omega t}$  は  $x$  点におけるパルス波による波の  
(4.029)  
 フーリエ変換と考えるとよりから (3.1) は その波による船体  
 上下ゆれと考えるも良い。

そう考えると  $\eta^*(t)$  は 船の中心における  $x=0$  のパルス波  
 による船体運動と考えられる。

あるいはこれは 竹沢の過渡水波による応答に  
 等しい事になる。

判明としては得られた記録を (3.9) によって  $\eta^*(t)$   
 に変換する。

この時2点での記録があれば check になる。

$\eta^*(t)$  は  $M_2^*(\omega)$  のフーリエ変換であるから,  $\eta(x, t)$   
 程不規則な変動はしないと考えられ 解析の  
 容易ではなからうか。

## 4. 横ゆれの応答

横ゆれでは揺れ数が多いのでフーリエ変換は大変困難である。

また1節のような方法では結局周波数応答を(1.8)の形に展開するわけであるが、横ゆれでは実軸の近くに極がある形になっているのでこの展開型はうまくない。

そこで古典的な方法では<sup>周期を求め</sup>減減曲線を描いて減衰を求めます。

この時の理論模型は

$$I \ddot{\theta} + N \dot{\theta} + W_m \theta = 0, \quad (4.1)$$

$$t=0 \text{ で } \theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0 \quad \text{と仮定} \quad N \rightarrow 0 \text{ として}$$

$$\theta(t) \doteq \theta_0 e^{-\mu t} \cos \omega_0 t, \quad (4.2)$$

$$\omega_0 = W_m / I,$$

$$\mu = \frac{N}{2I}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_0 = W_m / I, \\ \mu = \frac{N}{2I} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

とするのであつた。

フーリエ変換法ではこれは(4.2)から

$$\Theta(\omega) = \int_0^{\infty} \theta(t) e^{-i\omega t} dt \doteq \frac{i\omega \theta_0}{2i\mu\omega - (\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad (4.4)$$

つまり (4.4) では  $\omega - \mu l$  の

$$\omega = \mu l \pm \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \quad , \quad \dots \quad (4.5)$$

に pole がある。

④(ω) からこの分だけ差引いた後は滑らかな  
函数になると考えられるから、それを1節の方法でフーリエ  
変換しようという方法が考えられる。

そこでまず

$$\Theta^*(\omega) = \frac{i\omega\theta_0^*}{2i\mu^*\omega - (\omega^2 - \omega_0^2)} \quad , \quad \dots \quad (4.6)$$

2. に  $\theta_0^*$  は  $\theta_0$  とは実数なり、 $\mu^*$ 、 $\omega_0$  は定数とする。

(4.6) を時間領域に変換すると次のようになる。

$$\theta^*(t) = \frac{\theta_0^*}{\cos \varepsilon} e^{-\mu^* t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu_0^2} t - \varepsilon) \quad , \quad (4.7)$$

$$\tan \varepsilon = \frac{\mu_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \mu_0^2}} \quad ,$$

そこでまず従来の方法により減衰曲線を描き、周期と  $\mu$  を求める。

この時最初の数ゆれはさて、なるべく  
線の方で信用出来るデータからとるようにする。

次に (4.7) と 実際の記録  $\theta(t)$  と

最初の方を除いて後の方では一致するように (4.7)

の  $\theta$  と  $\theta^*$  を決める。

次に  $\theta$  を使って

$$\theta(t) - \theta^*(t) = \theta_a(t), \quad (4.8)$$

を算出してそのフーリエ変換  $\Theta_a(\omega)$  を求める。

最後に求めるフーリエ変換は

$$\Theta(\omega) = \Theta_a(\omega) + \Theta^*(\omega), \quad (4.9)$$

と求まる。

この方法では  $\theta$  から  $\theta_a(t)$  はもはや振動項は少くかつ  $t \rightarrow \infty$  で 0 となるので問題はなからう。

しかしこの方法では従来減衰の非線型性として処理されていた量がすべて流体力の  $\omega$ -依存性として処理されてしまうことになる。

よってこの点に関する検討を重ねる必要がある。

## 5. 時間定数の決め方

1節 (1.1) の展開は 時間定数  $T$  を決めなければ "定まらない" が これを定める 適当な基準がない。

そこで具体的に考えてみよう。

まず

$$f(t) = a_0 e^{-\frac{t}{T}} L_0^{(0)}(\tau) = a_0 e^{-\frac{t}{T}}, \quad \dots (5.1)$$

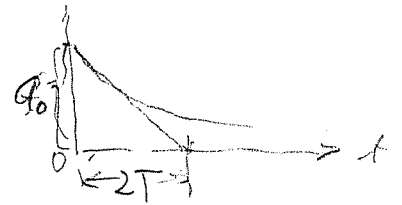
これは

$$\text{Max } f(t) = f(0) = a_0, \quad \dots (5.2)$$

$$\left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=0} = -\frac{a_0}{T} \quad (5.3)$$

であるから右図の 5.3 に なる。

$T$  は 所謂 時間定数の 半分である。



次に

$$f(t) = a_0 t^\alpha e^{-\frac{t}{T}} L_0^{(\alpha)}(\tau) = a_0 t^\alpha e^{-\frac{t}{T}}, \quad (5.4)$$

とすると

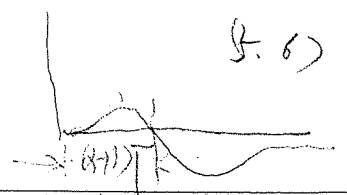
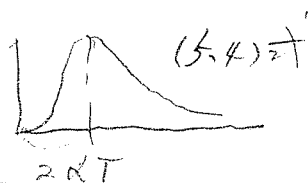
$$\text{Max } \{f(t)\} = a_0 (2\alpha)^\alpha e^{-\alpha}, \quad \text{at } t = 2\alpha T. \quad (5.5)$$

次に

$$f(t) = a_1 t^\alpha e^{-\frac{t}{T}} L_1^{(\alpha)}(\tau) = a_1 t^\alpha e^{-\frac{t}{T}} [(\alpha+1) - \tau], \quad (5.6)$$

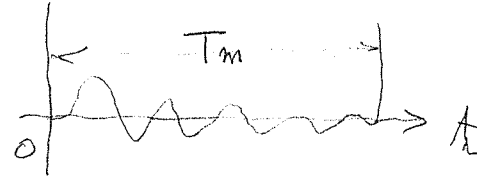
とすると

$$f((\alpha+1)T) = 0, \quad \dots (5.7)$$



一般に  $L_n^{(\alpha)}(t)$  の最大の根は

$t \approx 3n$  であるから、右図のよう



$T_m$  までの記録をとる事とし、これを

最大  $n$  次のラゲール多項式で近似するとすれば

$$T \ll \frac{T_m}{3n}, \quad \dots \quad (5.8)$$

であればよからう。

これらの事情を考慮して適当に  $T$  を選ぶのでは  
ないまい。なのでこのように決めるのも一法である。

解ち

$$T^{1-\alpha} = \int_0^\infty f(t)^2 \frac{dt}{t^\alpha} / [\text{Max} f(t)]^2, \quad \dots \quad (5.9)$$

よって  $T$  を決める方法である (  $\alpha$  は大体 1 程度から、  
 ( の場合も考えたい ) )

これは (5.4) によって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha)!}{n!} a_n^2 = [\text{Max} f(t)]^2, \quad \dots \quad (5.10)$$

のように  $a_n$  を規格化する事に等しい。

$f(t)$  が (5.1) ならばこれは自明である。



最後に  $T$  を  $T'$  に変換する事を考えておこう。

$$\text{今 } T' = (1+\gamma)T, \quad \gamma \ll 1, \quad (5.11)$$

$$\text{とおき } \tau' = \frac{t}{T'}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad (5.12)$$

とおく

$$\tau = \frac{t}{T}(1+\gamma) = \tau'(1+\gamma), \quad \dots (5.13)$$

$f(t)$  は  $\tau$  に対して (1.1) のように展開すれば,  $\tau'$  に対して

$$f(t) = e^{-\frac{T'}{2}} (\tau')^\alpha \sum a'_n L_n^{(\alpha)}(\tau'), \quad (5.14)$$

のように展開せぬとすると  $a'_n$  は (1.2) と同じである。

$$\frac{(n+\alpha)!}{n!} a'_n = \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{T'}{2}} L_n^{(\alpha)}(\tau') d\tau', \quad (5.15)$$

右辺の  $f(t)$  に (1.1) を代入すると

$$a'_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot C_m^n \quad (5.16)$$

$$\stackrel{(5.16)}{=} \frac{n!}{(n+\alpha)!} \int_0^\infty e^{-\frac{T'}{2}} \tau'^{-\alpha} L_m^{(\alpha)}(\tau) L_n^{(\alpha)}(\tau') d\tau'$$

$$= \frac{n!}{(n+\alpha)!} (1+\gamma)^\alpha \int_0^\infty e^{-\tau'(1+\frac{\gamma}{2})} (\tau')^\alpha L_n^{(\alpha)}(\tau') L_m^{(\alpha)}(1+\gamma)\tau' d\tau',$$

$$= \frac{n!}{(n+\alpha)!} (1+\gamma)^\alpha \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^m (-1)^{\mu+\nu} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \binom{m+\alpha}{m-\mu} \frac{(1+\gamma)^\mu}{\nu! \mu!} \frac{(5.17)}{(1+\frac{\gamma}{2})^{\mu+\nu+\alpha+1}}$$

附錄 A Lagere 多項式 (Mogulm & Oberhaltungs)

定義式

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{-x} x^{-\alpha}}{n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \left( e^{-x} x^{n+\alpha} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!} \quad (A.1)$$

2.12

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! m!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1) \Gamma(m+1)}$$

特に  $n=0, 1, 2, 3$

$$\left. \begin{aligned} L_0(x) &= 1, \quad L_1(x) = 1-x \\ L_2(x) &= 1-2x + \frac{x^2}{2} \\ L_3(x) &= 1-3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} \end{aligned} \right\} (A.2)$$

直交関係

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ \frac{(n+\alpha)!}{n!} & \text{for } n = m \end{cases} \quad (A.3)$$

母函数

$$\frac{e^{-x} t}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n, \dots (A.4)$$

ラプラス変換

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \left[ e^{-\lambda x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) \right] dx = \frac{(n+\alpha)!}{n!} \frac{(p+\lambda-1)^n}{(p+\lambda)^{n+\alpha+1}} \quad (A.5)$$

左辺

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx &= \bar{H}(p) \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \bar{H}(p) dp \end{aligned} \right\} \dots (A.6)$$

微分方程式

$$x y'' + (\alpha + 1 - x) y' + \alpha y = 0, \quad \dots (A.7)$$

漸化式

$$n L_n^{(\alpha)}(x) = (-x + 2n + \alpha - 1) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1) L_{n-2}^{(\alpha)}(x), \quad (A.8)$$

$$x \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = n L_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (A.9)$$

for  $n \geq 2$

与  $\alpha = \frac{1}{2}$  はエルミート多項式である。

加法定理

$$L_n^{(\alpha)}(x+y) = e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k y^k}{k!} L_n^{(\alpha+k)}(x), \quad \dots (A.10)$$

# 附録 B フレネル積分

$$C(x) + i S(x) = \int_0^x e^{\frac{\pi i t^2}{2}} dt, \quad (B.1)$$

$$C_1(x) + i S_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{i t^2} dt, \quad (B.2)$$

$$C(x) = C_1\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right), \quad S(x) = S_1\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right), \quad (B.3)$$

$$C(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \quad S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \quad (B.4)$$

$$\left. \begin{aligned} C(x) &\xrightarrow{x \gg 1} \frac{1}{2} \\ C_1(x) &\xrightarrow{x \gg 1} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} S(x) &\xrightarrow{x \gg 1} \frac{1}{2} \\ S_1(x) &\xrightarrow{x \gg 1} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \quad (B.5)$$

$$W(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \left[ \frac{\omega^2 x}{g} + i\omega t \right]} d\omega, \quad \dots$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\omega^2 x}{g} - \omega t\right) d\omega, \quad \dots (B.6)$$

$$\frac{\omega^2 x}{g} - \omega t = \left(\omega\sqrt{\frac{x}{g}} - \frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{g t^2}{4x},$$

$$\zeta = \omega\sqrt{\frac{x}{g}} - \frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{x}}, \quad d\zeta = \sqrt{\frac{x}{g}} d\omega, \quad (B.7)$$

$$W(x, t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{x}} \int_{-\frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{x}}}^{\infty} \cos\left(\zeta^2 - \frac{g t^2}{4x}\right) d\zeta, \quad (B.8)$$

$$= \sqrt{\frac{g}{2\pi x}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-a}^{\infty} \cos(\zeta^2 - a^2) d\zeta$$

$$W(x, t) = \sqrt{\frac{g}{2\pi x}} \cdot \left[ \left\{ \frac{1}{2} + C_1(a) \right\} \cos a^2 + \left\{ \frac{1}{2} + S_1(a) \right\} \sin a^2 \right], \quad (B-9)$$

$$a = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{x}} t,$$

また

$$W(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{g}{2\pi x}} [\cos a^2 + \sin a^2] \rightarrow (B-10)$$

$$= \sqrt{\frac{g}{\pi x}} \cos(a^2 - \frac{\pi}{4})$$

なお定義から

$$W(x, t) = 0 \quad \text{for } t < 0, \quad (B-11)$$

また  $x$  は正とする。

$$W(x, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{2\pi x}} [\cos a^2 + \sin a^2], \quad (B-12)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{\pi x}} \cos(a^2 - \frac{\pi}{4}),$$