概要

動揺しながら前進する物体に働く流体力については古くから研究されているにも拘わらず確かな計算例は少ない。理論上でも幾つかの難点を有する。

即ち i) 速度ポテンシャルに所謂線積分項を含み、定常造波理論におけると同様その性格がよくわかっていない。

ii) 境界条件に定常流れ成分を含み、その取扱いが大変で、薄い船、細長い船に取扱いが限られて来る。

iii) 圧力にも定常流れ成分を考えなければならず、力およびモーメント積分をどうとるかについて疑念が残る。しかしこれは1次の周期的力についてであって、かえって2次の定常力についてはエネルギー、運動量定理によって疑問が解消する。しかしこの際も積分表示には線積分項が残る。

以上の難点に対し、本論では次の考えに従って問題を提起する。

i) ポテンシャルの線積分項については定常造波問題における鈴木の研究に従い、物体と水面の交点で水面変位が0となる条件を附加して問題の不定性を排除する。この事はそこでポテンシャルを0とする条件と alternative である。

ii) 境界条件に鏡像近似定常流れの成分を導入する。(これは物体による攪乱速度を無視した条件と定性的には同じだが量的には大きくなる)

この事から例えば対称物体の上下ゆれに対し、前進速度がなければ境界条件は左右対称であるが、前進速度によって反対称成分が出て来る。

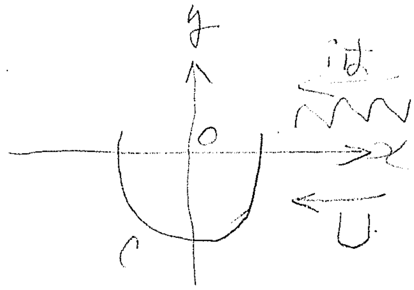
iii) 力およびモーメントの積分にはラグランジアンを採用する。その理由は前述のような線積分の困難は解析的なものであるから、ここで力学的観点を導入し、水の運動をハミルトンの変分原理に従って解く、つまり仮想仕事の原理によりラグランジアンの変分係数が力およびモーメントとすれば力学的難点が救われるからである。

以上の方針で2次元問題を整理したものであるが
こゝでは前進速度は臨界速度より小さいとした
すなわち($g > 4\omega U$) であるがそれより前進速度が
大きい場合はもう少し簡単で発散の K_3, K_4 項が
なくなるだけである。

i)〜iii)の問題点の内特にi)の線積分の取扱い
については理論的疑問が多い所でまた物理的
にも不明であるが、とにかくどちらかの条件を指定
しなければ数学的には問題が不定である。

現象的にはこの条件は物体が水面を貫通して
いる、没水していないと言う条件と考えられるが
どちらの条件がより良いかは
少し計算の結果をまたなければなるまい。

1. 速度ポテンシャルと変位ポテンシャル



$e^{i\omega t}$なる因子を省略して、

速度ポテンシャルを $\phi(x,y)$ とおくと

水面条件は 水面変位を η として

$$i\omega\phi(x,0) - U\phi_x(x,0) - g\eta(x) = 0, \qquad (1.1)$$

$$\phi_y(x,0) = -\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\eta(x), \qquad (1.2)$$

それ故

$$\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\phi(x,0) + g\phi_y(x,0) = 0, \qquad (1.3)$$

ここで変位ポテンシャルを次のように導入する。

$$\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x,y) = \phi(x,y). \qquad (1.4)$$

変位ポテンシャルの微分は流体粒子の軌跡の変位となり、特に

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,0) = -\eta(x), \qquad (1.5)$$

それ故 水面条件は (1.3) と同型である。

一方圧力 p は

$$\frac{p(x,y)}{\rho} = \left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x,y)$$

$$= \left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Phi(x,y), \qquad (1.6)$$

また入射波の振幅を a とすると

$$\eta_a(x) = ae^{ikx} = \frac{1}{g}\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_0(x,0), \qquad (1.7)$$

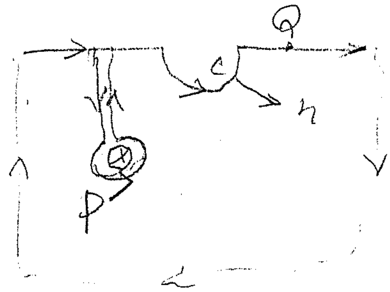
$$\Phi_0(x,y) = \frac{ga}{i\omega_0} e^{Ky+iKx}, \qquad (1.8)$$

$$\omega_0 = \omega - KU, \quad K = \omega_0^2/g. \qquad (1.9)$$

$$\overline{\Phi}_0(x,y) = -\frac{a}{K} e^{Ky+iKx}, \qquad (1.10)$$

今附録Aの核関数を使って積分路を図のようにとり

$$\int \left[\overline{\Phi}(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P,Q) - G(P,Q) \frac{\partial \overline{\Phi}(Q)}{\partial n} \right] ds,$$



なる積分を考えると図のようにP点が領域の中にあれば

$$\overline{\Phi}(P) = \int_C \left[G(P,Q) \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n_Q} - \overline{\Phi}(Q) \frac{\partial G}{\partial n_Q} \right] ds$$

$$+ \int_{\overline{H}} \left[\overline{\Phi}(Q) \frac{\partial}{\partial y'} G(P,Q) - \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y'} G(P,Q) \right] dx', \qquad (1.11)$$

Cは物体のContour，$\overline{H}$は自由表面とする。

自由表面上の積分の部分I）は(1.3), (A.6)により

$$I = \frac{1}{g} \int_{\overline{H}} \overline{\Phi}(x')(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x'})^2 G\, dx' = -\frac{1}{g} \int \overline{\Phi}(x',0) \left(-\omega^2 + 2i\omega U \frac{\partial}{\partial x'} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)$$

$$= +\frac{1}{g} \left[2i\omega U \overline{\Phi} G + U^2 \overline{\Phi} G_{x'} - U^2 \overline{\Phi}_{x'} G \right]_{x=-B}^{x=B}$$

$$+ \frac{1}{g} \int \left(-\omega^2 - 2i\omega U \frac{\partial}{\partial x'} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) \overline{\Phi} \times G\, dx', \qquad (1.12)$$

$(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x'})^2$

それ故 (1.11)を

$$\Phi(P)=\Phi_c(P)+\Phi_L(P), \quad \cdots \quad (1.13)$$

で

$$\Phi_c(P)=\int_C\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n_Q}G(P,Q)-\Phi(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}G(P,Q)\right]ds, \quad (1.14)$$

と書くと、

$$\Phi_L(P)=\frac{U}{g}\left[\phi(x',0)G(P,Q)+\Phi(Q)S(P,Q)\right]_{Q=x'=-B}^{x'=+B}, \quad (1.15)$$

但し

$$\left.\begin{aligned}(i\omega-U\frac{\partial}{\partial x})\Phi(x,y)&=\phi(x,y)\\(i\omega+U\frac{\partial}{\partial x'})G(P,Q)&=S(P,Q),\end{aligned}\right\}\quad(1.16)$$

Φ_Lは所謂線積分項である。

P点がCと自由表面で囲まれた領域にあれば(1.13)の右辺は0であるからいつものように引算をして、

$$\Phi(P)=\Phi_c(P)+\Phi_L(P), \quad \cdots \quad (1.17)$$

$$\Phi_c(P)=\int_C\sigma(Q)G(P,Q)\,ds_Q, \quad (1.18)$$

$$\Phi_L(P)=\frac{U}{g}\Big[[\phi(Q)]G(P,Q)\Big]_{x'=-B}^{x'=+B}, \quad (1.19)$$

$[\phi]$はCの内外の差を意味する。

つまり速度ポテンシャルはC上の吹出し分布σと端点($x=\pm B$)の点吹出しで表わされる。

速度ポテンシャルも同型であるから全く同じで

又 $$\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x,y) = g\eta(x), \quad \cdots (1.1)$$

であるから(1.15)の中の所に $g\eta$ を入れればよい。

さて(1.14)のような集中特異点があると

ここで端点を除いて $\frac{\partial \eta}{\partial n}$ 又は $\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0$ なる

解がある。

(吹出しと吸込みがある時吹出しから吸込みに流れ込む流線を物体におきかえれば自明)

それ故この項は解の不定さを示しており、例えば水線と物体の交点の正則性を指定するなどの方法で定めなければならない。

ここでは物理的に

$$\eta(\pm B)=0, \text{ or } \frac{\partial \Phi(\pm B,0)}{\partial y}=0, \quad (1.20)$$

と指定する事にする。

なお散乱ポテンシャルでは

$$\eta_s(\pm B) = -\eta_0(\pm B) \quad (1.20')$$

無限遠方では(A.11)なる関係があるから (1.13) ~(1.15)

では (以下線型ポテンシャルで考える)

$$\phi \xrightarrow[x \ll -1]{} \frac{-i\gamma}{K_2-K_1}\left[H^-(K_2)e^{K_2(y+ix)} - H^-(K_1)e^{K_1(y+ix)}\right]$$

$$+\frac{i\gamma}{K_4-K_3}\left[H^+(K_4)e^{K_4(y-ix)}\right],$$

$$\xrightarrow[x \gg 1]{} \frac{-i\gamma}{K_4-K_3}H^+(K_3)e^{K_3(y-ix)}, \qquad (1.21)$$

$$H^{\pm}(K_j) = \int_c \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{K_j(y\pm ix)}dx$$

$$+U\left[\left(\eta + i\frac{\omega_j}{gU}\phi\right)e^{K_j(y\pm ix)}\right]_{x=-B}^{x=B}, \qquad (1.22)$$

(但し ω_2 だけは$(-\omega_2)$とする。)

(1.18), (1.19) では

$$H^{\pm}(K_j) = \int_c \sigma e^{K_j(y\pm ix)}dx$$

$$+U\left[\langle\eta\rangle e^{K_j(y\pm ix)}\right]_{x=-B}^{x=B}, \qquad (1.23)$$

$$\eta \xrightarrow[x \ll -1]{} \frac{-1}{(K_2-K_1)U^2}\left[\omega_2 H^-(K_2)e^{iK_2x} + \omega_1 H^-(K_1)e^{iK_1x}\right]$$

$$+\frac{\omega_4}{(K_4-K_3)U^2}H^+(K_4)e^{-iK_4x},$$

$$\eta \xrightarrow[x \gg 1]{} \frac{-\omega_3}{(K_4-K_3)U^2}H^+(K_3)e^{-iK_3x}, \qquad (1.24)$$

(1.24)をさらに

$$\eta \xrightarrow[x \ll -1]{} A(k_1)e^{ik_1x} + A(k_2)e^{ik_2x} + A(k_4)e^{-ik_4x},$$

$$\xrightarrow[x \gg 1]{} A(k_3)e^{-ik_3x}. \qquad (1.25)$$

とおけば

$$A(k_1) = -\frac{\omega_1}{(k_2-k_1)U^2}H^-(k_1)$$

$$A(k_2) = -\frac{\omega_2}{(k_2-k_1)U^2}H^-(k_2)$$

$$A(k_3) = -\frac{\omega_3}{(k_4-k_3)U^2}H^+(k_3) \qquad (1.26)$$

$$A(k_4) = \frac{\omega_4}{(k_4-k_3)U^2}H^+(k_4)$$

となり (1.21)は

$$\phi \xrightarrow[x \ll -1]{} -\frac{ig}{\omega_1}A(k_1)e^{k_1(y+ix)} + \frac{ig}{\omega_2}A(k_2)e^{k_2(y+ix)}$$

$$-\frac{ig}{\omega_4}A(k_4)e^{k_4(y-ix)},$$

$$\xrightarrow[x \gg 1]{} -\frac{ig}{\omega_3}A(k_3)e^{k_3(y-ix)}. \qquad (1.27)$$

$(g/\omega_j = c_j)$

2. 境界条件

細長い船，薄い船では変位ポテンシャルに対し

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = - X_j \frac{\partial x_j}{\partial n} \quad , ;$$

$$\left.\begin{array}{l} j=1,\ \text{前後ゆれ},\ X_1 \text{振巾},\quad x_1 \equiv x. \\ j=2,\ \text{上下ゆれ},\ X_2 \text{振巾},\quad x_2 \equiv y \\ j=3,\ \text{縦ゆれ},\ X_3 \text{振巾},\ \frac{\partial x_3}{\partial n} = x\frac{\partial y}{\partial n} - y\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{r^2}{2}\right) \end{array}\right\} \quad (2.1)$$

でよいと考えられるが，今の場合は定常流れの変動分を無視出来ないと考えられる。

その時は Timman + Newman により

$$-\frac{\partial \phi}{\partial n} = i\omega(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{n}) + [(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}]\cdot\boldsymbol{n} \quad , \qquad (2.2)$$

ここに
$$\boldsymbol{\alpha} = (X_1 - yX_3,\ X_2 + xX_3),$$

$\boldsymbol{V}$は定常流れの速度ベクトルで

$$\boldsymbol{V} = \left(-q\frac{\partial x}{\partial s},\ -q\frac{\partial y}{\partial s}\right), \quad q = |\boldsymbol{V}|,$$

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial x}{\partial n}, \frac{\partial y}{\partial n}\right)$$

それ故
$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{n}) = X_1\frac{\partial x}{\partial n} + X_2\frac{\partial y}{\partial n} + X_3\frac{\partial x_3}{\partial n},$$

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\alpha} = \left(-q\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} - q\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y}\right)(X_1 - yX_3,\ X_2 + xX_3)$$

$$= +X_3 q\left(\frac{\partial y}{\partial s}, -\frac{\partial x}{\partial s}\right) = X_3 q\boldsymbol{n}$$

$$[(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\alpha}]\cdot\boldsymbol{n} = X_3 q \quad /// \qquad (2.3)$$

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n} = \left[(X_1 - yX_3)\frac{\partial}{\partial x} + (X_2 + xX_3)\frac{\partial}{\partial y}\right]\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$= X_1\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}\cdot\boldsymbol{n} + X_2\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}\cdot\boldsymbol{n} + X_3\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}$$

$u_y = -v_x$
$u_x + v_y = 0.$

今 $\quad V = -\nabla\phi_0 = (u, v)$, $\quad u_n = \frac{\partial x}{\partial n} u_x + y_n u_y = -y_s v_y - x_s v_x$

とおくと $\quad \frac{\partial V}{\partial x}\cdot n = (\nabla u \cdot n) = \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}$

$$\frac{\partial V}{\partial y}\cdot n = (\nabla v \cdot n) = \frac{\partial v}{\partial n} = +\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\left[\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)V\right]\cdot n = x\frac{\partial v}{\partial n} - y\frac{\partial u}{\partial n} = x\frac{\partial u}{\partial s} + y\frac{\partial v}{\partial s}.$$

$$\therefore (\alpha\cdot\nabla)V\cdot n = -X_1\frac{\partial v}{\partial s} + X_2\frac{\partial u}{\partial s} + X_3\left(x\frac{\partial u}{\partial s} + y\frac{\partial v}{\partial s}\right), \quad (2.4)$$

$$\therefore [(V\cdot\nabla)\alpha - (\alpha\cdot\nabla)V]\cdot n = +X_1\frac{\partial v}{\partial s} - X_2\frac{\partial u}{\partial s} - X_3\frac{\partial}{\partial s}(xu + yv), \quad (2.5)$$

$$\because \quad u = -g\frac{\partial x}{\partial s}, \quad v = -g\frac{\partial y}{\partial s}, \quad -g = \left(u\frac{\partial x}{\partial s} + v\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$xu + yv = -g\left(x\frac{\partial x}{\partial s} + y\frac{\partial y}{\partial s}\right) = -\frac{g}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial s},$$

それ故

i) 前後ゆれ (X_1) に対し

$$-\frac{\partial\phi}{\partial n} = X_1\left[i\omega\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s}\left(g\frac{\partial y}{\partial s}\right)\right], \quad (2.6)$$

ii) 上下ゆれ (X_2) に対し.

$$-\frac{\partial\phi}{\partial n} = X_2\left[i\omega\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial s}\left(g\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right], \quad (2.7)$$

iii) 縦ゆれ に対し.

$$-\frac{\partial\phi}{\partial n} = X_3\left[-i\omega\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{r^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{g}{2}\frac{\partial(r^2)}{\partial s}\right)\right], \quad (2.8).$$

流れ関数 ψ に対しては

i) 前後ゆれ

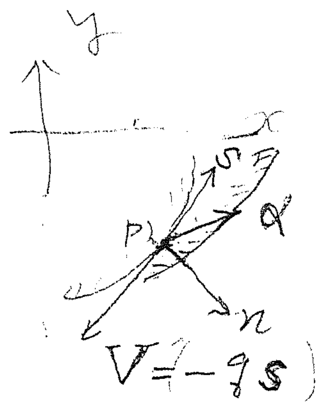
$$-\psi = X_1\left[i\omega y - q\frac{\partial y}{\partial s}\right],$$

ii) 上下ゆれ

$$-\psi = X_2\left[-i\omega x + q\frac{\partial x}{\partial s}\right],$$

iii) 縦ゆれ

$$-\psi = X_3\left[-\frac{i\omega}{2}r^2 + \frac{q}{2}\frac{\partial r^2}{\partial s}\right], \qquad (2.9)$$



右辺第2項は右図において単位ベクトル α，法線ベクトル n，定常速度ベクトル V とする時（切線ベクトル s）物体の新位置と旧位置の間を流れる流量は $q(\alpha\cdot n)$ であるから，これを排除する為の条件と考えれば容易に理解出来よう。

さて q としては定常造波問題を解いて与えるのが最も正当な考えであるが，計算は面倒である。

そこで次に考えられるのは低速であるから鏡像解を用いる方法が次善の策である。

最も簡単な方法としては q を前進速度 U の切線成分

$$q = +U\frac{\partial x}{\partial s}, \quad \cdots \quad (2.10)$$

と採る方法であるが、例えば円(半径)柱ではこれは鏡像近似の半分になる。

鏡像近似解は Lewis Form では簡単で、

$$z = c\zeta + \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta^3} \qquad (2.11)$$

とおくと複素速度ポテンシャルは

$$w(z) = cU\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \qquad (2.12)$$

$$\frac{dw}{dz} = cU\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)\frac{d\zeta}{dz}, \quad q = \left|\frac{dw}{dz}\right|_{r=1}, \qquad (2.13)$$

このように前後対称な物体では (2.9) 右辺第2項は例えば前縁中心の場合 右辺第1項が左右対称なのに対し第2項は反対称である。

その為に複素速度ポテンシャルも前後対称であり けれど更に対称性が崩れてこの場合では上下方向の力が出て来る事になると考えられる。

3. 力について

圧力は(1.6)で与えられるとすると 力及びモーメントは

$$F_{ij}' = -\int_c p_i \frac{\partial X_i}{\partial n} ds = -\rho \oint_c (i\omega - U\frac{\partial}{\partial x})\phi_i \frac{\partial X_i}{\partial n} ds, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \frac{\partial X_3}{\partial n} = x\frac{\partial y}{\partial n} - y\frac{\partial x}{\partial n},$$

Timman & Newman によれば右辺第2項は定常流れ成分を加えて

$$F_{ij} = -\rho \oint_c (i\omega + \nabla\phi_0 \cdot \nabla)\phi_i \frac{\partial X_i}{\partial n} ds, \quad \cdots \quad (3.2)$$

とすべきであると言う。

仮想仕事の原理から力を誘導すると

$$F_{ij}^* = -\rho \oint_c \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} ds, \quad (3.3)$$

こゝに(~)印は逆流れを意味し$\S 5$に定義する。

これは又線積分項を除きTuckの定理に一致する。

今 $\Delta F_{ij} = F_{ij} - F_{ij}^*$ ······ (3.4)

とすると (2.6)〜(2.8)をX_iで割って書き直すと

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -i\omega \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}(\frac{\partial}{\partial x}\phi_0),$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} = -i\omega \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}(\frac{\partial \phi_0}{\partial y}), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial n} = -i\omega (x\frac{\partial y}{\partial n} - y\frac{\partial x}{\partial n}) - \frac{\partial}{\partial n}(x\frac{\partial \phi_0}{\partial y} - y\frac{\partial \phi_0}{\partial x}),$$

となり，逆流れでは右辺第2項の符号を変るだけであるから

$$\frac{\Delta F_{ij}}{\rho X_i} = \int_C \left[\phi_i \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x_j}\right) - \nabla\phi_0 \nabla\phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n}\right] ds, \quad \cdots (3\cdot 6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \equiv x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x},$$

上式を

$$\frac{\Delta F_{ij}}{\rho X_i} = \int_C \left[\left\{\phi_i \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial \phi_0}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_i}{\partial n}\right\} + \left\{\frac{\partial \phi_0}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \overbrace{+ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_0}{\partial n}} - \nabla\phi_0\nabla\phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n}\right\}\right] ds.$$

と置くと　$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0$ on C なので右辺の中括弧の中は

共にグリーンの定理によって自由表面上の積分に変えられる。

$$\frac{\Delta F_{ij}}{\rho X_i} = \int_F \left[\left\{\frac{\partial \phi_0}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_i}{\partial y} - \phi_i \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y \partial x_j}\right\} - \left\{\frac{\partial \phi_0}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_0}{\partial y} - \nabla\phi_0\nabla\phi_i \frac{\partial x_j}{\partial y}\right\}\right] dx$$

それ故

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta F_{i1}}{\rho X_i} &= -\int_F \left(\phi_i \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_0}{\partial y}\right) dx = \left[\phi_i \frac{\partial \phi_0}{\partial y}\right]_{x=-B}^{x=B} \\
\frac{\Delta F_{i2}}{\rho X_i} &= -\int_F \left(\phi_i \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_0}{\partial y} - \nabla\phi_0\nabla\phi_i\right) dx \\
&= \int_F \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \phi_i \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}\right) dx = -\left[\phi_i \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right]_{x=-B}^{x=B}
\end{aligned}\right\} (3\cdot 7)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta F_{i3}}{\rho X_i} &= -\int_F \left[\phi_i \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial \phi_0}{\partial y} - y\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial \phi_0}{\partial y}\left(x\frac{\partial \phi_i}{\partial y}\right) - x\nabla\phi_0\nabla\phi_i\right] dx \\
&= -\int_F \left[\cancel{x}\left(\phi_i \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right) - \phi_i \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right] dx \\
&= \int_C \left[x\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_i \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right) + \phi_i \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right] dx = \left[x\phi_i \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right]_{x=-B}^{x=B}
\end{aligned}$$

それなら $\phi_i(\pm B, 0) = 0$

又は $\frac{\partial \phi_0}{\partial x}, \frac{\partial \phi_0}{\partial y} = 0$ for $x = \pm B,\ y = 0$ (3.8)

ならば $\Delta F_{ij} = 0$ (3.9)

となって両式は一致する。

(3.8)の条件の内下の条件が常に成立つようにも思える。

(ϕ_0が全ポテンシャルならばそうだがそうだとすると(3.7)に変形する時無限遠方の検査面上の積分も考えなければならなくなり，怪しくなって来る)

(3.8)の上の条件ならば他の場合も線積分項が消えて具合が良く，(1.20)の条件と alternative である。

波強制力については

$$E_j = -\rho\int_C (\phi_I + \phi_d)\frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n}\,ds \quad , \qquad (3.10)$$

となり $\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I}{\partial n}$, (3.11)

相反定理より

$$\int_C \phi_d \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n}\,ds = \int_C \tilde{\phi}_j \frac{\partial \phi_d}{\partial n}\,ds - U[\eta_d \tilde{\phi}_j] , \qquad (3.12)$$

$$\therefore\ E_j = -\rho\int_C \left(\phi_I \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} - \tilde{\phi}_j \frac{\partial \phi_I}{\partial n}\right) ds + \rho U[\eta_0 \tilde{\phi}_j] . \qquad (3.13)$$

但し $\eta_0 + \eta_d = 0$ for $x = \pm B$

(1.22) より

$$E_j(K_i) = \mp \frac{i g a}{\omega_i} \tilde{H}_j(K_i) \quad (3.14)$$

sign 変動あり

但し $\varphi_I^{(i)}(x, y) = \pm \frac{ga}{i\omega_i} e^{K_i(y+ix)}$ (3.18)

$\zeta_I(x, y) = a e^{iK_i x}$

4. 解法について

以上の議論は薄い物体に対する理論であって
ブラントな物体については§2の速度ポテンシャルの
境界条件の中にも定常流れの成分がはいって
来るなど問題は大変多い。

そのような事情を考えると高位ポテンシャルでは
線型的に首尾整っており、境界条件も簡単で
魅力的であるが、一方力およびモーメントを
計算する段階ではそれを微分して速度ポテン
シャルを求めねばならないので計算上は
必ずしも有利でない。

そこで結局の所速度ポテンシャルで計算するとして
表現としては(1.17)〜(1.19)により、§2の境界
条件と(1.20)の条件を使えばよい。

その時流れ関数を使えば便利である。

それをまとめて書くと

$$\psi(P) = \int_C \sigma(Q)\, T(P,Q)\, ds + \Big[m(Q)\, T(P,Q) \Big]_{Q=-B}^{+B} , \quad (4.1)$$

$$g\,\eta(x) = \int_C \sigma(Q)\, S(P,Q)\, ds + \Big[m\, S(P,Q) \Big]_{x'=-B}^{x'=+B} , \quad (4.2)$$

境界条件は

$$\eta(\pm B) = 0 , \quad (4.3)$$

と

i) 左右ゆれについては (2.1) から

$$-\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} = i\omega\left(\cos\theta - \frac{U}{i\omega}\sin^2\theta \frac{d\theta}{ds}\right) , \quad (2.1)$$

であるから

$$-\psi = i\omega y - \frac{U}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + \mathrm{Const} , \quad (4.4)$$

これはまた $i\omega X_1$ で規格化するとすれば更に $i\omega$ で割っておけばよい（前進速度のない場合に合せるためには）

ii) 上下ゆれについては (2.6) から

$$-\psi = i\omega\left(-x + \frac{U}{2i\omega}\cos 2\theta\right) , \quad (4.5)$$

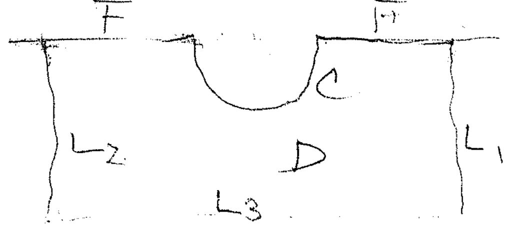
iii) 横ゆれについては (2.9) から

$$-\psi = i\omega\left[-\frac{r^2}{2} + \frac{U}{i\omega}\int^s r\cos(\theta-\alpha)\sin\theta \frac{d\theta}{ds}\, ds\right] , \quad (4.6)$$

もう一つの方法は Yeung, 経験に従って

ϕはD内で調和関数であるから

L_1, L_2, L_3が充分遠いとして



$$\phi(P) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial n}\log r - \phi_m \frac{\partial}{\partial n}\log r\right) ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{F_1+F_2} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial y'}\log r - \phi_m \frac{\partial}{\partial y'}\log r\right) dx'$$

$$+ \sum_{j=0}^{3} m_j \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^j G(x';y,0) \quad , \qquad (4.7)$$

のようにおく。 $\phi_m = \phi - \sum m_j \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^j G, \quad (4.8)$

C上の境界条件は §2の通りとする。

F上では ϕ_yは (1.3) で与えられるが

$$g\int \phi_{y'} \log r\, dx' = \int \left(-\omega^2 \phi - 2i\omega U \phi_{x'} + U^2 \phi_{x'x'}\right) \log r\, dx'$$

$$= \left[-2i\omega U \phi \log r + U^2\left(\phi_{x'} \log r - \phi \frac{\partial}{\partial x'}\log r\right)\right]_{x=-B}^{B}$$

$$+ \int \phi\left[-\omega^2 \log r + 2i\omega U \frac{\partial}{\partial x'}\log r + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\log r\right] dx' \qquad (4.9)$$

となって ϕでおきかえられるが $x=\pm B$ で ϕ_xが与えられないと定まらない。 そのためにも (4.3) の条件は必要である。

もう一つの条件は(4.7)右辺最後の項の係数値が中の係数値に一致すると言う条件で，中の係数値は一方では(1.22)のように表現出来るから，その条件を書くのは容易であろう。

5, 逆流れ，逆時間ポテンシャルと相反定理

一様流速を逆にしたものを逆流れと呼び(~)印で示す事にする。

計算のために　　　　　　　　　　　　運動が等しければ

~~物体が~~ y 軸に関し対称とし，境界条件は

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial n}(x,y) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}(-x,y)\,, \quad \text{上下ゆれ}, \qquad (5.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial n}(x,y) = -\frac{\partial \Phi_j}{\partial n}(-x,y)\,, \quad \text{前後, 回転}, \qquad (5.2)$$

それなら

$$\tilde{\Phi}_2(x,y) = +\Phi_2(-x,y)\,, \qquad (5.3)$$

$$\tilde{\Phi}_j(x,y) = -\Phi_j(-x,y)\,, \quad j=1,3, \qquad (5.4)$$

従って (3.8) において

$$\tilde{f}_{ij} = -\rho\int_c \Phi_i \frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial n}\, ds = -\rho(-1)^{i+j}\int_c \tilde{\Phi}_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n}\, ds$$

$$= -\rho\int_c \tilde{\Phi}_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial n}\, ds\,, \qquad (5.5)$$

また (1.22), (1.23), (3.12) 等において

$$\tilde{H}^{\pm}(K_j) = (-)^j\, H^{\mp}(K_j)\,, \quad \cdots \qquad (5.6)$$

次に逆時間運動は複素共役値をとればよい(上棒で)

境界条件は§2の最後に示すように規準化すれば、

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} \quad , \; - - - \qquad (5.7)$$

さて modified Lagrangean を次のように定義しよう。

$$\frac{2}{\rho}\tilde{L}_{ij} = \iint_D \nabla\phi_i \nabla\tilde{\phi}_j \, dxdy + g\int_F \zeta_i \tilde{\zeta}_j \, dx \, , \qquad (5.8)$$

グリーンの定理により

$$\frac{2}{\rho}\tilde{L}_{ij} = -\int_C \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} ds + \int_F \left(\phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial y} + g \zeta_i \tilde{\zeta}_j \right) dx ,$$

(1.1), (1.2)より右辺第2項は、

$$-\int_C \left(+ \phi_i \left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\zeta}_j - \left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_i \tilde{\zeta}_j \right) dx$$

$$= +U \left[\phi_i \tilde{\zeta}_j \right]_{x=-B}^{x=B}$$

となるから

$$\frac{2}{\rho}\tilde{L}_{ij} = -\int_C \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} ds + U[\phi_i \tilde{\zeta}_j] \quad , \qquad (5.9)$$

(5.8)の定義式から明らかに、

$$\frac{2}{\rho}\tilde{L}_{ij} = -\int_C \tilde{\phi}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds + U[\tilde{\phi}_j \zeta_i] \, , \qquad (5.10)$$

特に(1.20)が成立つならば

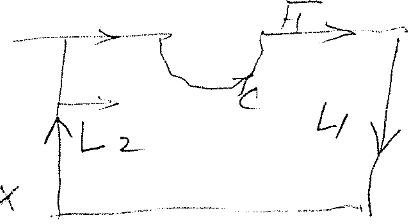
$$\int_C \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} ds = \int_C \tilde{\phi}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds \quad , \qquad (5.11)$$

次に

$$\frac{2}{\rho}L_{ij} = \iint_D \nabla\phi_i \nabla\bar{\phi}_j\,dxdy - g\int_F \eta_i\bar{\eta}_j\,dx , \qquad (5.12)$$

とおくと、$i=j$ の時二次形 Lagrangean である。

この場合は L_1, L_2 上の積分が出てきて



$$\frac{2}{\rho}L_{ij} = -\int_C \phi_i \frac{\partial\bar{\phi}_j}{\partial n}ds + \int_F\left(\phi_i\frac{\partial\bar{\phi}_j}{\partial y} - g\eta_i\bar{\eta}_j\right)dx$$

$$-\int_{-\infty}^{0} \phi_i \frac{\partial\bar{\phi}_j}{\partial x}\Big|_{L_2} dy + \int_{0}^{-\infty}\phi_i\frac{\partial\bar{\phi}_j}{\partial x}dy ,$$

となり 第2項は

$$\int_F\left[\phi_i\left(i\omega+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{\eta}_j - \bar{\eta}_j\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_i\right]dx$$

$$= -U\left[\phi_i\bar{\eta}_j\right]_{x=-B}^{x=B} + U\left[\phi_i\bar{\eta}_j\right]_{x=L_2}^{x=L_1}$$

(1.25), (1.27) を使えば

$$-U\left[\phi_i\bar{\eta}_j\right]_{x=L_2} - \int_{-\infty}^{0} \phi_i\frac{\partial\bar{\phi}_j}{\partial x}\Big|_{L_2}dy = +\frac{igU}{\omega_1}A_i(k_1)\bar{A}_j(k_1)$$

$$-\frac{igU}{\omega_2}A_i(k_2)\bar{A}_j(k_2) + \frac{igU}{\omega_4}A_i(k_4)\bar{A}_j(k_4)$$

$$+i\left(\frac{g}{\omega_1}\right)^2\frac{A_i(k_1)\bar{A}_j(k_1)}{2} + i\left(\frac{g}{\omega_2}\right)^2\frac{A_i(k_2)\bar{A}_j(k_2)}{2} + i\left(\frac{g}{\omega_4}\right)^2\frac{A_i(k_4)\bar{A}_j(k_4)}{2}$$

$$= i\Big[c_1\left(U+\frac{c_1}{2}\right)A_i(k_1)\bar{A}_j(k_1) - c_2\left(U-\frac{c_2}{2}\right)A_i(k_2)\bar{A}_j(k_2)$$

$$+ c_4\left(U+\frac{c_4}{2}\right)A_i(k_4)\bar{A}_j(k_4)\Big]$$

$$\int_0^{\infty} e^{2ky}\,dy$$

$$U[\phi_i \bar{\eta}_j]_{x=L_1} - \int_0^{-\infty} \phi_i \bar{\phi}_{jx}\, dy$$

$$= -i c_3 U A_i(K_3)\bar{A}_j(K_3) + \frac{i}{2} c_3^2 A_i(K_3)\bar{A}_j(K_3)$$

$$= -i c_3 \left(U - \frac{c_3}{2}\right) A_i(K_3)\bar{A}_j(K_3)$$

$$\therefore \frac{2}{\rho} L_{ij} = -\int_C \phi_i \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} ds - U[\phi_i \bar{\eta}_j]_{x=-B}^{x=+B}$$

$$+ i\Big[c_1\left(U + \frac{c_1}{2}\right) A_i(K_1)\bar{A}_j(K_1) - c_2\left(U - \frac{c_2}{2}\right) A_i(K_2)\bar{A}_j(K_2)$$

$$- c_3\left(U - \frac{c_3}{2}\right) A_i(K_3)\bar{A}_j(K_3) + c_4\left(U - \frac{c_4}{2}\right) A_j(K_4)\bar{A}_j(K_4)\Big], \quad (5.13)$$

同様にして

$$\frac{2}{\rho} L_{ij} = -\int_C \bar{\phi}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds - U[\bar{\phi}_j \eta_i]_{x=-B}^{x=B}$$

$$- i\Big[\quad 〃 \quad \Big], \quad \cdots (5.14)$$

$$\therefore \int_C \left(\phi_i \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} - \bar{\phi}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n}\right) ds + U[\phi_i \bar{\eta}_j - \bar{\phi}_j \eta_i]_{x=-B}^{x=B}$$

$$= 2i\Big[\quad 〃 \quad \Big], \quad \cdots (5.15)$$

6. 漂流力

時間的平均の力とモーメントは運動量定理より

$$R_j = -\frac{\rho}{4}\int_C \left[\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial\bar\phi}{\partial n} + \frac{\partial\bar\phi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial n} - \nabla\phi\nabla\bar\phi\frac{\partial x_j}{\partial n}\right]ds \qquad (6.1)$$

で与えられるがこの内抵抗 R のみ考えよう。

$$R = \frac{\rho}{4}\int_C\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\bar\phi}{\partial n} + \frac{\partial\bar\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial n} - \nabla\phi\nabla\bar\phi\frac{\partial x}{\partial n}\right)ds\,, \qquad (6.2)$$

グリーンの定理により $\qquad L_2 \quad L_1$

$$R = +\frac{\rho}{4}\int_F\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\bar\phi}{\partial y} + \frac{\partial\bar\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dx\,, + \cdots$$

$$+ \frac{\rho}{2}\int_0^{-\infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\bar\phi}{\partial x} - \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla\bar\phi\right)dy + \frac{\rho}{2}\int_{-\infty}^0\left[\ \text{〃}\ \right]dy, \cdots)$$

となるが右辺第2, 3項の被積分関数は

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\bar\phi}{\partial x} - \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla\bar\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\bar\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\bar\phi}{\partial y}\right)$$

となり, L_1, L_2 上で ϕ が波の項だけとすると消えてしまう。

それ故

$$R = +\frac{\rho}{4}\int_F\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\bar\phi}{\partial y} + \frac{\partial\bar\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dx\,, \qquad (6.3)$$

(1.2) を代入すると

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\bar\phi}{\partial y} + \frac{\partial\bar\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} = \phi_x\left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar\zeta + \bar\phi_x\left(-i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta$$

$$\therefore\ R = +\frac{\rho}{4}U\left\{\left[\bar\zeta\phi_x + \zeta\bar\phi_x\right]_{x=B}^{x=L_1} + \left[\bar\zeta\phi_x + \zeta\bar\phi_x\right]_{x=-L_2}^{x=-B}\right\}$$

$$+ \frac{\rho g}{4}\int_F\frac{\partial}{\partial x}(\zeta\bar\zeta)\,dx$$

$$R = \frac{\rho}{4}\left\{ \left[U\eta\bar{\phi}_x + U\bar{\eta}\phi_x + g\eta\bar{\eta} \right]_{x=B}^{x=L_1} + \left[\qquad \right]_{x=-L_2}^{x=-B} \right\} \quad (6.4)$$

先ず入射波がなければ (1.27) より、
(ついで $\eta(\pm B)=0$ なる条件は必要である)

$$R = \frac{\rho g}{4}\left[\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}\,|A(k_3)|^2 - \left\{ \sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}\left\{|A(k_1)|^2 - |A(k_2)|^2\right\} - \sqrt{1-\frac{4\alpha}{\gamma}}\,|A(k_4)|^2 \right\} \right]$$

$$R = \frac{\rho g}{4}\left[-\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}\,|A(k_1)|^2 + \sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}\,|A(k_2)|^2 + \sqrt{1-\frac{4\alpha}{\gamma}}\left(|A(k_3)|^2 + |A(k_4)|^2\right) \right], \quad (6.5)$$

抵抗となるのは後方に出て行く k_1 波のみである。

次に入射波がある時を考えよう。

この時加えるべき項は 入射波を

$$\eta_I = a e^{ik_1 x}, \quad \phi_I = -ic_1 a e^{ik_1 x}$$

とし、新しく ϕ を散乱を含む攪乱ポテンシャルとして

$$\Delta R = \frac{\rho}{4}\left[U(\bar{\eta}_I \phi_x + \bar{\eta}\phi_{xI} + \eta_I \bar{\phi}_x + \eta\bar{\phi}_{xI}) + g(\eta_I\bar{\eta} + \eta\bar{\eta}_I) \right]_{x=-L_2}^{x=L_1}$$

$$= \frac{\rho a}{4}(2\omega_1 U + g)(A_1 + \bar{A}_1) = \frac{\rho g a}{4}\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}\left\{A(k_1) + \bar{A}(k_1)\right\}, \quad (6.6)$$

ここで船は入射波によって揺れ動き、系外に仕事をしないとすると船のなす仕事 W は 0 である。
所で入射波のない場合

$$W = \frac{i\rho\omega}{4}\int_C \left[p(\alpha, n) - \bar{p}(\alpha, n) \right] ds, \qquad (6.7)$$

であるが §3 の討論により

$$W = \frac{i\rho\omega}{4}\int_C \left[\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} - \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds, \qquad (6.8)$$

$$\left(\because \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)$$

(5.45) により

$$W = \pm\frac{\rho\omega}{2}\Big[c_1\left(U + \frac{c_1}{2}\right)|A(k_1)|^2 + c_3\left(\frac{c_3}{2} - U\right)|A(k_3)|^2 + c_2\left(U - \frac{c_2}{2}\right)|A(k_2)|^2 + c_4\left(U - \frac{c_4}{2}\right)|A(k_4)|^2 \Big], \qquad (6.9)$$

$$= \frac{\rho g\omega}{4}\Big[\frac{\sqrt{1+\frac{4\alpha}{g}}}{k_1}|A(k_1)|^2 - \frac{\sqrt{1+\frac{4\alpha}{g}}}{k_2}|A(k_2)|^2 + \frac{\sqrt{1-\frac{4\alpha}{g}}}{k_3}|A(k_3)|^2 + \frac{\sqrt{1-\frac{4\alpha}{g}}}{k_4}|A(k_4)|^2 \Big], \qquad (6.9')$$

入射のある時ふえる分は

$$\Delta W = \frac{i\rho\omega}{4}\left[U\left[\phi_I \bar{\eta} + \phi \bar{\eta}_I\right]_{x=-L_2}^{x=L_1} + \int_{-\infty}^{0}\left[\phi_I \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \phi \frac{\partial \bar{\phi}_I}{\partial x}\right]_{x=-L_2}^{L_1} dy \right] \qquad (6.10)$$

入射波が k_1 波ならば

$$\Delta W = \frac{\rho \omega g}{2}\left[C_1 \left(\bar{A}(k_1) + A(k_1)\right)\left(U + \frac{c_1}{2}\right) \right], \qquad (6.11)$$

$$= \frac{\rho g \omega a}{4 k_1} \left(\bar{A}(k_1) + A(k_1)\right)\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}, \quad \cdots \qquad (6.11')$$

$$W + \Delta W = 0 \qquad (6.12)$$

とすると

$$\Delta R = \frac{k_1}{\omega}\Delta W = \frac{\rho g}{4}\left[\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}\,|A(k_1)|^2 - \frac{k_1}{k_2}\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}\,|A(k_2)|^2 + \sqrt{1-\frac{4\alpha}{\gamma}}\left(\frac{k_1}{k_3}|A(k_3)|^2 + \frac{k_1}{k_4}|A(k_4)|^2 \right)\right], \qquad (6.13)$$

(6.5)に加えて最終的に波浪抵抗増加は

$$R_w = \rho g\left[\left(1-\frac{c_2}{2U}\right)^2 |A(k_2)|^2 + \frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{4\alpha}{\gamma}}\left\{ \left(1+\frac{k_1}{k_3}\right)|A(k_3)|^2 + \left(1+\frac{k_1}{k_4}\right)|A(k_4)|^2 \right\}\right], \qquad (6.14)$$

$$\because \left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}} = 4\left(1-\frac{c_2}{2U}\right)^2.$$

これは前進速度のない時の丸尾の公式の拡張である。

附録A　核関数

(x', y') 点に対数特異性を有し水面条件(1.3)

を満たすポテンシャルを求めよう。

$$\log r_1 = -\int_0^\infty e^{-k|y-y'|}\left(\cos k\overline{x-x'} - \cos k\right)\frac{dk}{k},$$

$$r_1 = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

$$\log r_2 = -\int_0^\infty e^{-k|y+y'|}\left(\cos k\overline{x-x'} - \cos k\right)\frac{dk}{k},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2},$$

(A.1)

$$\therefore \quad \log\frac{r_1}{r_2} = \int_0^\infty \left[e^{-k|y+y'|} - e^{-k|y-y'|}\right]\cos kx\frac{dk}{k}, \quad \text{(A.2)}$$

それ故

$$G(x-x', y, y') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{r_1}{r_2} + \frac{\gamma}{2\pi}\int_0^\infty e^{k(y+y')}\left[\frac{e^{ik(x-x')}}{A(k)} + \frac{e^{-ik(x-x')}}{B(k)}\right]dk, \quad \text{(A.3)}$$

$$\left.\begin{aligned} A(k) &= (k-\alpha)^2 - \gamma k \\ B(k) &= (k+\alpha)^2 - \gamma k \end{aligned}\right\} \quad \alpha = \frac{\omega}{U}, \quad \gamma = \frac{g}{U^2}, \quad \text{(A.4)}$$

とおけば水面条件を満たしている。

$$\left[\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + g\frac{\partial}{\partial y}\right] G(x-x'; y, y')\Big|_{y=0} = 0, \quad \text{(A.5)}$$

また 微分の条件を考えると

$$\left[\left(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 + g\frac{\partial}{\partial y'}\right] G(x-x', y, y')\Big|_{y'=0} = 0 \quad , (A\cdot 6)$$

さて 附録B の根を使って ($g > 4\omega$ として)

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{A(k)} &= \frac{1}{K_2-K_1}\left(\frac{1}{k-K_2} - \frac{1}{k-K_1}\right)\\ \frac{1}{B(k)} &= \frac{1}{K_4-K_3}\left(\frac{1}{k-K_4} - \frac{1}{k-K_3}\right)\end{aligned}\right\} (A\cdot 7)$$

と部分分数展開出来，さらに K_1, K_2, K_4 达は物体の後方にあり，K_3 のみは前方にある事を考えると積分路はそれぞれ各極の上下にとらねばならない。

その為に 正の小さい数 μ を導入し 次のようにとればよい

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{A(k)} &= \frac{1}{K_2-K_1}\left(\frac{1}{k-K_2+\mu i} - \frac{1}{k-K_1+\mu i}\right),\\ \frac{1}{B(k)} &= \frac{1}{K_4-K_3}\left(\frac{1}{k-K_4+\mu i} - \frac{1}{k-K_3+\mu i}\right),\end{aligned}\right\} (A\cdot 7')$$

今

$$E(Kx, Ky) = \int_0^\infty \frac{e^{ik(x+iy)}\,dk}{k-K+\mu i} \quad , \; x>0, \; y>0 \; , (A\cdot 8)$$

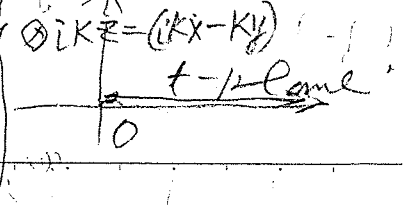
と定義しておこう。

$$E(Kx, Ky) = e^{iKz}\int_{iKz}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \quad (A\cdot 8')$$

$x, y > 0$

$$E(-Kx, Ky) = -2\pi i\, e^{iKz} + e^{iKz}\int_{iKz}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt, \quad (A\cdot 8'')$$

~~x,y~~ > 0



そうすると

$$G(x;y,y') = \frac{1}{2\pi}\log\frac{r_1}{r_2} + G'(x, y+y') \quad , \quad \cdots (A\cdot 9)$$

とおいて

$$G'(x,y) = \frac{\gamma}{2\pi}\Big[\frac{1}{K_2-K_1}\{E(K_2x, K_2|y|) - E(K_1x, K_1|y|)\}$$
$$+ \frac{1}{K_4-K_3}\{\overline{E}(K_4x, K_4|y|) - \overline{E}(K_3x, K_3|y|) - 2\pi i\, e^{-iK_3x - K_3|y|}\}\Big] \quad (A\cdot 10)$$

上棒は complex conjugate を意味する。

$|x| \gg 1$ では

$$\left.\begin{aligned} E(Kx, Ky) &\xrightarrow[x\gg 1]{} \frac{e^{iKz}}{iKz} \\ E(Kx, Ky) &\xrightarrow[-x\gg 1]{} -2\pi i\, e^{iKz} \end{aligned}\right\} \cdots (A\cdot 11)$$

$$\left.\begin{aligned} G \doteqdot G'(x,y) &\xrightarrow[-x\gg 1]{} \frac{-i\gamma}{K_2-K_1}\{e^{K_2(y+ix)} - e^{K_1(y+ix)}\} + \frac{i\gamma}{K_4-K_3}e^{K_4(y-ix)} , \\ G \doteqdot G'(x,y) &\xrightarrow[x\gg 1]{} \frac{-i\gamma}{K_4-K_3}e^{K_3(y-ix)} , \end{aligned}\right\} (A\cdot 11)$$

次に

$$S(x;y,y') = \left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)G(x;y,y'), \quad (A\text{-}12)$$

なる核を導入しよう。

(A.9)より

$$S \simeq \frac{1}{2\pi}\left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\log r_1/r_2 + S' \qquad (A.13)$$

$$S'(x;y,y') = \left(i\omega - U\frac{\partial}{\partial x}\right)G'$$

$$= \frac{i\gamma U}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{(\alpha-k)}{A(k)}e^{ikx} + \frac{(\alpha+k)}{B(k)}e^{-ikx}\right]e^{-k(y+y')}dk, \quad (A.15)$$

こうすると

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha-k}{A(k)} &\simeq \frac{1}{K_2-K_1}\left[\frac{\alpha-K_2}{k-K_2+\mu i} - \frac{\alpha-K_1}{k-K_1+\mu i}\right]\\ \frac{\alpha+k}{B} &= \frac{1}{K_4-K_3}\left[\frac{\alpha+K_4}{k-K_4-\mu i} - \frac{\alpha+K_3}{k-K_3+\mu i}\right]\end{aligned}\right\} (A.14)$$

であるから

$$S' = \frac{i\gamma U}{2\pi}\left[\frac{1}{K_2-K_1}\left\{(\alpha-K_2)\bar{E}(K_2x, K_2|y|) - (\alpha-K_1)\bar{E}(K_1x, K_1|y|)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{K_4-K_3}\left\{(\alpha+K_4)\bar{E}(K_4x, K_4y) - (\alpha+K_3)\left(\bar{E}(K_3x, K_3y) + 2\pi i e^{-i(K_3x+K_3y)}\right)\right\}\right]$$

(A.15)

特に必要な $S(x;0,y')$ では (A.13)の右辺第1項は消える。 また $y=0$ で $x\to 0$ とすると $S(0;0,0)=0$, (A-16)

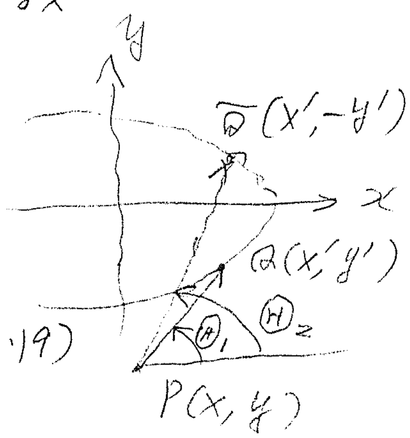
No. A-5

Date

最後に G の 共役関数を T とすると

$$\frac{\partial}{\partial x} G = \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (A\cdot 17)$$

$$T(x-x'; y, y') = \frac{1}{2\pi}(\Theta_1 - \Theta_2) + T', \quad (A\cdot 18)$$



$$T' = \frac{\pm i\gamma}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{e^{-ik(x-x')}}{A(k)} - \frac{e^{ik(x-x')}}{B(k)}\right] e^{k(|y|+y')} dk, \quad (A\cdot 19)$$

これやると

$$T' = \frac{i\gamma}{2\pi}\left[\frac{1}{K_2-K_1}\left\{\bar{E}(K_2x, K_2|y|) - \bar{E}(K_1x, K_1|y|)\right\} - \frac{1}{K_4-K_3}\left\{\bar{E}(K_4x, K_4|y|) - \bar{E}(K_3x, K_3|y|) - 2\pi i e^{-iK_3x - K_3|y|}\right\}\right], \quad (A\cdot 20)$$

となるから (A·10) と較べるとすぐわかるようにこれは G がわかれば実部と虚部を入れかえて符号を少し変えるだけである。

の分布

WQ

M.90

No.

Date 57.12.31
改58.1.8

動揺しながら漂流する2次元物体に働く流体力

別所正利

内容

附録B. 波速等

1) x軸の（見掛け上）負方向に進む波は $e^{ikx+i\sigma t}$ の形になるから

水面条件からその波数は次式の根で与えられる。

$$A(k)=(k-\alpha)^2-\gamma k=0, \qquad (B.1)$$

これは(1.9)の関係式と同じである。

今その根を

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix}K_1\\K_2\end{matrix}\right\} &= \alpha+\frac{\gamma}{2}\mp\sqrt{\gamma\alpha+\frac{\gamma^2}{4}}, \\ K_2=\alpha^2/K_1, &\quad K_1+K_2=\gamma+2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (B.2)$$

波速は

$$c_1=\sqrt{g/K_1}, \quad c_2=\sqrt{g/K_2}=\frac{\sqrt{gK_1}}{\alpha}, \qquad (B.3)$$

$$\frac{U}{c_1}=\sqrt{\frac{K_1}{\gamma}}=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}}{2}, \quad \frac{U}{c_2}=\sqrt{\frac{K_2}{\gamma}}=\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}}{2}$$

$$\frac{\omega_1}{U}=\sqrt{\gamma K_1}=\frac{\gamma}{2}(\sqrt{\ }-1)=\alpha-K_1, \quad \frac{\omega_2}{U}=\sqrt{\gamma K_2}=K_2-\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{1}{c_2}-\frac{1}{c_1}=\frac{1}{U}, \qquad (B.4)$$

K_2波は静止座標系ではxの正方向に進んでいる。

入射波の中でゆれている時は K_1波は向波の K_2波は追波の（波速がUより小さい）波数である。

ii) x軸の正方向に進む波は $e^{-i\omega t + ikx + ky}$ の形で

水面条件から その波数は二次式の根である。

$$B(k) = (k+\alpha)^2 - \gamma k \qquad (B.5)$$

これは入射波が追波の時の (1.9) と同じである。

その根は

$$\left.\begin{matrix} K_3 \\ K_4 \end{matrix}\right\} = \frac{\gamma}{2} - \alpha \mp \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \alpha\gamma}, \qquad K_4 = \alpha^2/K_3, \quad K_3 + K_4 = \gamma - 2\alpha \qquad \Bigg\} (B.6)$$

とえられ、 $\alpha > \frac{\gamma}{4}$ ならば進行波はない。

今は $\frac{\gamma}{4} > \alpha$ とすると、

$$C_3 = \sqrt{\frac{g}{K_3}}, \quad C_4 = \sqrt{\frac{g}{K_4}} = \frac{\sqrt{gK_3}}{\alpha}, \qquad (B.7)$$

(B.6) から

$$\frac{U}{C_3} = \sqrt{\frac{K_3}{\gamma}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\gamma}}}{2}, \quad \frac{U}{C_4} = \sqrt{\frac{K_4}{\gamma}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\gamma}}}{2}, \qquad (B.8)$$

$$\frac{\omega_3}{U} = \sqrt{\gamma K_3} = K_3 + \alpha, \quad \frac{\omega_4}{U} = K_4 + \alpha$$

$$\therefore \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{U}, \qquad (B.9)$$

(B.8) より

$$\frac{C_4}{2U} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\gamma}}}, \quad \frac{C_3}{2U} = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\gamma}}},$$

故

$$U > \frac{C_4}{2} > \frac{U}{2}, \quad \frac{C_3}{2} > U. \qquad \Bigg\} (B.10)$$

となるので C_4, つまり K_4波は後流にのみ存在する。
(群速度が U より小さい故)

$$2\omega_1 U + g = g\left(\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}} - 1\right) + g = g\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}$$

$$= 2U\sqrt{gK_1} + g = g\left(1 + 2U\sqrt{\frac{K_1}{g}}\right) = g\left(1 + \frac{2U}{C_1}\right).$$

$$-2\omega_2 U + g = -g\left(1+\sqrt{\quad}\right) + g = -g\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}} < 0$$

$$= -2U\sqrt{gK_2} + g = g\left(-\frac{2U}{C_2} + 1\right) = -g\left(\frac{2U}{C_2} - 1\right) < 0$$

$$-2\omega_3 U + g = -2U\sqrt{gK_3} + g = g\left(1 - \frac{2U}{C_3}\right)$$

$$= g\sqrt{1-\frac{4\alpha}{\gamma}}$$

$$-2\omega_4 U + g = -2U\sqrt{gK_4} + g = g\left(1 - \frac{2U}{C_4}\right) = -g\sqrt{1-\frac{4\alpha}{\gamma}} < 0$$

$$1 - \frac{K_1}{K_2} = \frac{K_2 - K_1}{K_2} = \frac{\gamma\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}}{K_2} = \frac{g\sqrt{\quad}}{g/C_2^2} = \left(\frac{C_2}{U}\right)^2 \frac{\sqrt{1+\frac{2U}{C_1}}}{\left(\frac{2U}{C_2} - 1\right)}$$

$$= \frac{2C_2}{U}\left(1 - \frac{C_2}{2U}\right)$$

$$\left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right)\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}} = \left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right)\left(\frac{2U}{C_2} - 1\right) = 4\left(1 - \frac{C_2}{2U}\right)^2$$

$$\left(1 + \frac{K}{K_3}\right)\sqrt{1-\frac{4\alpha}{\gamma}} =$$

$\eta_j = i(\omega - K_j U)\phi$ $\qquad \phi_j = B_j$

$$A_j = \frac{i(\omega - K_j U)}{g} B_j$$

$$\frac{\omega - K_1 U}{g} = \frac{\alpha - K_1}{U\gamma} = \frac{1}{\gamma U}\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\sqrt{1+\frac{4\alpha}{\gamma}}\right) = \frac{1}{2U}\left(\sqrt{} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{c_1} \quad , \quad A_1 = \frac{i}{c_1} B_1$$

$$\frac{\omega - K_2 U}{g} = \frac{\alpha - K_2}{U\gamma} = \frac{1}{\gamma U}\left(-\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2}\sqrt{}\right) = -\frac{1+\sqrt{}}{2U} = -\frac{1}{c_2}$$

$$A_2 = -\frac{i}{c_2} B_2$$

$$\frac{\omega + K_3 U}{g} = \frac{\alpha + K_3}{\gamma U} = \frac{1}{2U}\left(1 - \sqrt{1-\frac{4\alpha}{\gamma}}\right) = \frac{1}{c_3} = \frac{\omega_3}{g}$$

$$\frac{\omega + K_4 U}{g} = \frac{\alpha + K_4}{\gamma U} = \frac{1}{2U}\left(1 + \sqrt{}\right) = \frac{1}{c_4} = \frac{\omega_4}{g}$$

$$A_3 = \frac{i}{c_3} B_3 \qquad A_4 = \frac{i}{c_4} B_4$$

$$\frac{\omega}{K_1} = U + \frac{\omega_1}{K_1} = U + c_1 \ , \quad \frac{\omega}{K_2} = U - c_2 > 0$$

$$\frac{\omega}{K_3} = c_3 - U \ , \quad \frac{\omega}{K_4} = c_4 - U > 0 \ ,$$

$$c_j = \frac{\lambda_j}{T_j} = \frac{\omega_j}{K_j} = \frac{g}{\omega_j}$$