"造波抵抗の極小値と影響線"

別所正利

容積分布の造波抵抗は（速度を1として）.

$$R=\frac{4\rho}{\pi}K_0^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{E_r^2+E_i^2\}\sec^5\theta\,d\theta, \quad \text{------} \quad (1)$$

$$E_r+iE_i=\frac{1}{2}\iiint_V e^{K_0z\sec^2\theta+iK_0\varpi\sec^2\theta}\,d\tau, \quad \text{-}\ \varpi=x\cos\theta+y\sin\theta, \quad (2)$$

巾が狭いとすると体積要素dτはηを半巾として

$$d\tau=2\eta(x,z)\,dx\,dz, \quad \text{--------} \quad (3)$$

此の式から先づ極小抵抗を与える船型は

A) 前後対称である事

B) 水面下に沈む程抵抗は一般に小さくなる。従って吃水及び水面下の形について何等かの条件を与えておかないと極小問題の解は没水体になるであろう。

従って問題を簡単にする為に此処では垂直舷側の船を考える事にする。

C) (2),(3)式は第1近似的なものであるが，此れを(x,z)面におけるy方向向きの2重吹出し分布と見れば，(1)式は正確な表現であるから，逆に此の2重吹出しに対応する船型を計算する事も考えられる。

さて，(1)式に(2),(3)を代入してθについて先づ積分すれば

$$R=\frac{4\rho}{\pi}K_0^4\iint_S\eta(x,z)\,dx\,dz\iint_S\eta(x',z')\,dx'\,dz'\,P_{-5}(K_0\overline{x-x'},-K_0\overline{z+z'}), \quad \text{-}\ (4)$$

垂直舷側，吃水T（船長1とすれば

$$R=\frac{4\rho}{\pi}K_0^2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\eta(x)\,dx\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\eta(x')\,dx'\cdot K_{-1}(K_0\overline{x-x'},K_0T), \quad \text{---} \quad (5)$$

但し

$$K_n(K_0\overline{x-x'},K_0T)=P_n(K_0\overline{x-x'},0)-2P_n(K_0\overline{x-x'},K_0T)+P_n(K_0\overline{x-x'},2K_0T), \quad \text{-}\ (6)$$

部分積分すれば

$$\frac{\pi R}{4\rho}=-(\eta_0^2+\eta_{2n}^2)K_1(0)+2\eta_0\eta_{2n}K_1(K_0)+2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\eta'(x)\,dx\left\{\eta_{2n}K_1(K_0\overline{x-\tfrac{1}{2}})-\eta_0K_1(K_0\overline{x+\tfrac{1}{2}})\right\}$$
$$-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\eta'(x)\,dx\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\eta'(x')\,dx'\,K_1(K_0\overline{x-x'}). \quad \text{----} \quad (7)$$

但し上の K_1 は $K_1(k_0\overline{x-x'}, k_0T)$ の意味にとり，又船長を $2n$ 等分して船尾から $0, 1, 2, \cdots 2n$ の番号を附け，i 番目の半巾を η_i と表わす。

此の式を

$$\left.\begin{cases} \eta_i' \doteqdot n(\eta_{i+1}-\eta_{i-1}) \\ \eta_0' \doteqdot n(-3\eta_0+4\eta_1-\eta_2) \\ \eta_{2n}' \doteqdot n(\eta_{2n-2}-4\eta_{2n-1}+3\eta_{2n}) \end{cases}\right\} \quad \cdots\cdots (8)$$

と考えてシムプソン則で積分すれば附録の式になり結局

$$R = \sum_{i,j=0}^{2n} \eta_i\eta_j M_{ij} \,, \quad \cdots\cdots (9) \qquad \begin{cases} M_{i,j}=M_{j,i} \\ =M_{2n-i,2n-j} \end{cases}$$

の形に書ける。

そこで排水量一定の下で極小な抵抗をもつ船型を求める問題を考えるに，λ を不定常数として

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \eta_i}\Big[R + \lambda\Big\{2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\eta\,dx - V\Big\}\Big] = 0 \\ &2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\eta\,dx = V \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (10)$$

今

$$2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\eta\,dx = 2\sum_{i=0}^{2n} m_i\eta_i = V \,, \quad \cdots\cdots (11)$$

の様に積分すれば，(10)式は (9)を考えて

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2n}\eta_j M_{ij} + \lambda m_i = 0 \,, \quad i=0,\cdots\cdots 2n \\ &2\sum_{j=0}^{2n} m_j\eta_j = V \end{aligned}\right\} \quad \cdots (12)$$

此の聯立方程式の解 η_i は極小抵抗を与える。

又半巾が $\Delta\eta_i$ だけ変化した時の抵抗変化は (9)から

$$\Delta R \doteqdot \frac{\partial R}{\partial \eta_i}\Delta\eta_i = 2\sum_{j=0}^{2n}\eta_j M_{ij}(\Delta\eta_i) \quad \cdots\cdots (13)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \eta_i} = 2\sum_{j=0}^{2n}\eta_j M_{ij} \,, \quad \cdots\cdots (14)$$

此の(14)式と同じ様な式は次の様に考えても得られる。

即ち (4)式において点 (x, z) において

$$\Delta\eta\,\Delta x\,\Delta z = \frac{1}{2}\Delta V \,, \quad \cdots\cdots (15)$$

の様な僅かな変形があったと考えると抵抗変化は垂直舷側船の場合は

$$\frac{\Delta R}{\Delta D} = -\frac{4\rho}{\pi} K_0^3 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \eta(x')dx' \left[P_{-3}(k_0\overline{x-x'}, -k_0 z) - P_{-3}(k_0\overline{x-x'}, k_0\overline{T-z}) \right], \quad ---(16)$$

又喫水方向に一様に変形するとすれば

$$\frac{\Delta R}{\Delta \eta \Delta x} = \frac{8\rho}{\pi} K_0^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \eta(x') K_{-1}(k_0\overline{x-x'}, k_0 T) dx', \quad ----(17).$$

(16), (17)を影響線と呼ぶ事にすると此の(17)式は(14)式と略々同じ内容を持っている事は誘導の過程から明らかであろう。又(16)と(17)は一般には略々相似な曲線となる様に思われる。

附録 1. M_{ij} の計算

$$\frac{9\pi}{\rho} R = 36 K_0^2 \int \eta dx \int \eta(x') dx' K_{-1}(k_0\overline{x-x'}).$$

$$= 4\eta_0 E_0 + 2\eta_1 \mathcal{E}_1 + 4\eta_2 E_2 + 2\eta_3 \mathcal{E}_3 + \cdots + 2\eta_{2n-1}\mathcal{E}_{2n-1} + 4\eta_{2n} E_{2n}$$
$$-(\eta_0 - 2\eta_1 + \eta_2)L_0 + (\eta_{2n} - 2\eta_{2n-1} + \eta_{2n-2})L_{2n}, \quad --(A.1)$$

但し $E_i = L_i - L_{i+1}$, $\mathcal{E}_i = L_{i-1} - L_{i+1}$, $---(A.2)$

$$L_j = 4\eta_0 \Delta_{-j} + 2\eta_1 \delta_{1-j} + 4\eta_2 \delta_{2-j} + \cdots + 2\eta_{2n-1}\delta_{2n-1-j} + 4\eta_{2n}\Delta_{2n-1-j}$$
$$+(\eta_0 - 2\eta_1 + \eta_2)K_1(-j) - (\eta_{2n} - 2\eta_{2n-1} + \eta_{2n-2})K_1(2n-j), \quad --(A.3)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{-j} &= -\Delta_{j-1} = K_1(1-j) - K_1(-j) \\ \delta_{-j} &= -\delta_j = K_1(1-j) - K_1(-1-j). \end{aligned}\right\} K_1(j) = K_1\left(\frac{k_0 j}{2n}, k_0 T\right), \quad --(A.4)$$

従って K_1 の数表が出来れば此れから Δ, δ を計算して L が求まる。此れから更に階差をとって $E, \mathcal{E}$ が出て来る。此のマトリックスの成分が M_{ij} である。此の際対称性に注意して表を作って計算すれば可成簡単な計算になる。

附録 2. $K_1(k_0 x, k_0 T)$ の計算

$$K_1(x,t) = P_1(x,0) - 2P_1(x,t) + P_1(x,2t)$$

$$P_1(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{4t}}\{P_1(x+v)+P_1(x-v)\}\,dv, \quad \cdots\cdots \quad (B.1)$$

$$\left.\begin{aligned} &P_0(x)=-\frac{\pi}{2}\int_0^x Y_0(x)\,dx, \quad P_{-2}(x)=\frac{\pi}{2}Y_1(x) \\ &P_1(-x)=P_1(x)=x(P_0+P_{-2})=\frac{\pi}{2}x\left\{Y_1(x)-\int_0^x Y_0(x)\,dx\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (B.2)$$

$P_1(x)$ の数表から (B.1)式 によって数値積分すればよい。
x が充分大きければ漸近的に

$$K_1(x,t) \underset{x\gg 1}{\doteqdot} (1-e^{-t})^2 P_1(x), \quad \cdots\cdots \quad (B.3)$$

(B.1) による計算と此の式による近似値が実際的に一致する所からは此の近似値でよい訳である。

附録 3. 線型における近似.

K_0 が充分大きいときには上述の方法はあまりうまい方法ではないと考えられる。
此の時は、本文の各積分は部分積分して
線型を、$q_0, q_0', q_0'', q_0''', \cdots q_{2n}, q_{2n}', q_{2n}'', \cdots\cdots$
等で代表させてやる方がよいと思われる。
此の様に考えれば問題は又よりの意味で可成簡単化する事が出来よう。
只此の場合は K_n を計算する必要が出てくる点が面倒になる。

— · —

Feb. 11, 1960.