造波抵抗理論に関する覚書

（波の無い特異点分布と極小値問題について）

目次

別所正利

防衛大学校　機械科

昭和35年5月

1. 緒論

与えられた排水量に対して造波抵抗が極小となる船型を求める問題は、従来 G. Weinblum 等によって試みられて来たが、此の問題には或る種の不安定性が伴う[1] 事は著者等も経験した。[2]

此の事実は極小抵抗船型の存在を疑わせるに充分である。

一方最近乾教授が提唱されている[3] 様に waveless ship が存在するとすれば、極小抵抗船型は即ち抵抗の無い船型となって、上述の様な不安定性は予想しうる所である。実際2次元問題に関しては waveless pontoon として既に Lord Kelvin, Prof. Havelock が実例について論じている。

そこで先づ2次元問題について其等の例を検討し、且つ少しく一般化して取扱い、次いで3次元問題をとりあげて、此等の点を論じて見る事にした。そして最后に極小問題を検討して見る事にしよう。

2. 2次元問題

Lord Kelvin は2次元の圧力分布系による造波現象の研究に於て2つの系が丁度その速度の自由波の半波長の奇数倍となる時に後續波が消える事を述べている。[4]

さて2次元の圧力分布を考えよう。造波抵抗は[5]

$$R = \frac{K_0^2}{\rho g} |F(K_0)|^2 , \qquad (2.1)$$

$K_0 = g/U^2$, g は重力常数, U は速度, ρ は水の密度, 速度は特に指摘しない限り単位速度とする。又

$$F(K) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-iKx} dx , \qquad (2.2)$$

今 $p(x)$ が距離 $2l$ だけ離れた2つの系から成立っているとすれば、上式から

$$K(K) = \int_{-\infty}^{\infty} \{p(x+l) + p(x-l)\} e^{-iKx} dx = 2\cos Kl \, F(K) , \qquad (2.3)$$

よって

$$|K(K_0)|^2 = 4\cos^2 K_0 l \, |F(K_0)|^2 , \qquad (2.4)$$

となるから、F の如何に拘らず

$$K_0 l = (n + \tfrac{1}{2})\pi , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (2.5)$$

ならば常に抵抗は消える。Kelvin は圧力分布として無限に広く分布した型を取扱っているが、上式から見れば此の様な制限は必要なく集中分布でもよい訳である。

又一般に2次元対称分布では船首尾波の干渉から一定長の

船では抵抗がなくなる速度が存在するから、此の方式は一般性において幾分欠ける様に思われる。

さて抵抗が消える為には(2·1)，(2·2)から明らかな様に

$$F(K_0)=\int_{-\infty}^{\infty}P(x)e^{-iK_0x}dx=0\ ,\quad \cdots\quad (2\cdot 6)$$

であれば充分である。

此の式を函数空間における直交関係とみなしても問題の解を作りなす事は出来るが、もっと一般的に次の様な函数を考えよう。

$$\frac{d^2\mu(x)}{dx^2}+K_0^2\mu(x)=P(x)\ ,\quad (2\cdot 7)$$

此れを振動方程式と見れば上式を満足する解は任意の境界条件の下に容易に求まる。

今はPが前后対称と考えて(2·2)に(2·7)を入れて部分積分すれば

$$F(K)=2i\left(\frac{d}{dx}\mu(-l)\right)\sin Kl+iK\mu(-l)\cos Kl+(K_0^2-K^2)\int_{-l}^{l}\mu(x)e^{-iKx}dx$$
$$\cdots(2\cdot 8)$$

特に$K=K_0$とおいて，$\mu(-l)$を0とおけば

$$F(K_0)=2i\sin K_0l\,\frac{d\mu(-l)}{dx}\ ,\quad \cdots\quad (2\cdot 9)$$

となって(2·6)の条件は(2·7)を満足するμによって考えれば抵抗はその境界値のみに関係している。此の式でFの消える条件は

$$K_0l=n\pi,\quad n;\text{整数}\ ,\quad \cdots\quad (2,10)$$

$$\text{或いは}\quad [d\mu/dx]_{x=\pm l}=0\ ,\quad \cdots\quad (2\cdot 11)$$

(2·10)式は船首尾波の干渉によるものである。

後の式は前に考えて境界条件と合せ考えれば結局

$$\mu(\pm l)=\frac{d}{dx}\mu(\pm l)=0\ ,\quad \cdots\quad (2\cdot 11')$$

であれば，Fが消え従って抵抗がなくなる事を示す。

此の様なμは常に無数に無数に見出す事が出来るから，(2·7)から此れに対応する圧力分布も又無数に存在する事になる。

その最も簡単な例をFIG 1に示す。

此の時(2·7)を積分すれば(2·11')から

$$\int_{-l}^{l}P(x)dx=K_0^2\int_{-l}^{l}\mu(x)dx\ ,\quad \cdots\quad (2\cdot 12)$$

であるから全圧力が有限である様なものが与えられる。（3次元の場合は此の様にならない。後節参照）

さて(2·11')が満足される場合は(2·8)から

$$F(K)=(K_0^2-K^2)\phi(K)\ ,\quad \phi(K)=\int_{-l}^{l}\mu(x)e^{-iKx}dx\ ,\quad \cdots\quad (2\cdot 13)$$

の様な形になっている。

Havelock が考えた waveless system は[5)]

$$H(K) = (K-K_0)\phi(K), \quad \cdots \qquad (2\cdot14)$$

の形であって今考えたものと少し異なっていて、上に考えた形式は此の形に含まれてしまう。そこで此の形について少し考えて見よう。

さて複素面で水はyの負の半平面を占めているとしよう。水面の$(-l,l)$の間で実の$p(x)$、その外では零の様な境界値をとる正則な函数$P(z)$, $z=x+iy$, は

$$P(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-l}^{l}\frac{p(\xi)}{z-\xi}d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-iKz}H(K)\,dK, \quad y<0 \quad \cdots \qquad (2\cdot15)$$

但し

$$H(K)=\int_{-l}^{l}p(\xi)e^{iK\xi}d\xi, \quad \cdots \qquad (2\cdot16)$$

(2·14)を入れると$\Psi(z)$なる正則函数を導入すれば

$$P(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (K-K_0)\phi(K)e^{-iKz}dK = i\frac{d\Psi}{dz} - K_0\Psi(z), \quad \cdots \qquad (2\cdot17)$$

但し

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\phi(K)e^{-iKz}dK, \quad \cdots \qquad (2\cdot18)$$

今$\Psi(-i\infty)=0$として(2·17)をとけば

$$\Psi(z) = -ie^{-iK_0z}\int_{-i\infty}^{z}P(\zeta)e^{iK_0\zeta}d\zeta, \quad \mathcal{I}\{z\}>\mathcal{I}\{\zeta\}, \qquad (2\cdot19)$$

従って、若し $\Psi(\pm\infty)=0$ ならば

$$\Psi(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -ie^{-iK_0x}\int_{-l}^{l}p(\xi)e^{iK_0\xi}d\xi$$

であるから $H(K_0)=0$ となって waveless system である。

所で(2·17)を水面で考えると

$$\mathcal{R}\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial y}-K_0\Psi\right\}_{y=0} = \begin{cases}p(x), & l>x>-l\\ 0, & x>l,\ x<-l\end{cases} \quad \cdots \qquad (2\cdot20)$$

であるから此れはΨを表面変位と見れば、水面条件そのものである。従って$\Psi(\pm\infty)=0$と云う条件は後續波がないと云う事を其の儘意味している訳である。

逆に$\Psi(\pm\infty)=0$ならば常にϕが有限であるから、(2·17)によって(2·14)が成立つから(2·14)は波がない為の必要充分条件と云える。

さて更にもう一度(2·17)の微分方程式の随伴形式によって

$$\Psi(z) = -i\frac{d}{dz}M(z) - M(z), \qquad (2\cdot21)$$

なる$M(z)$を考えると(2·20)と組合せて

$$\mathcal{R}\left\{\frac{d^2}{dx^2}M(z) - K_0^2M(z)\right\}_{y=0} = p(x), \qquad (2\cdot22)$$

となって(2.7)の形となる。
又上述の事実から波なし系で考えて，(2.11)を満足する様な$\mu(x)$を境界函数として持つ函数$M(z)$は

$$M(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\mu(\xi)}{z-\xi}d\xi \quad \cdots\cdots \quad (2.23)$$

と与えられるから，(2.21)によって水面変位ζは

$$\zeta(x)=\Re\left\{-i\frac{d}{dz}M(z)-K_0M(z)\right\}=\Re\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\mu(\xi)d\xi\left\{\frac{1}{(z-\xi)^2}+\frac{iK_0}{z-\xi}\right\}$$

$$=-K_0\mu(x)+P.\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\mu(\xi)}{(x-\xi)^2}d\xi \quad ,\cdots \quad (2.24)$$

と与えられるからμが与えられば圧力分布は勿論表面変位も簡単に計算出来る事になる。又上式を与えられたζに関して解く事はζとpとの間の積分方程式をとく事よりは簡單であろう。[6)]

3. 垂直舷側船

次いで3次元の場合を考えるに，先ずKelvin型の干渉によって波を消す方式は略々不可能と思われる。[11)] そこでHavelock型のもののみが対象となる訳であるがその前に準備として垂直舷側船を考えると，その抵抗は

$$R=\frac{4\rho K_0^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}I_0^2\left|F(K_0\sec\theta)\right|^2\sec\theta d\theta, \quad \cdots\cdots \quad (3.1)$$

$$\left.\begin{aligned} I_0&=1-e^{-K_0T\sec^2\theta},\\ F(p)&=\int_{-1}^{1}\eta(x)e^{ipx}dx, \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (3.2)$$

但しηは船の半巾，Tは吃水，船長は2であるとする。
I_0は常に正であるから抵抗がなくなる為には結局

$$F(p)=\int_{-1}^{1}\eta(x)e^{ipx}dx=0, \quad \text{for } p\geq K_0, \cdots \quad (3.3)$$

であれば充分である。
即ち(3.3)が成立すれば吃水が無限であっても，又没水体であっても此の場合常に抵抗はない。
さて(3.3)のフーリエ変換をとれば

$$\eta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-K_0}^{K_0}F(p)e^{-ipx}dp, \quad \cdots\cdots \quad (3.4)$$

となり，もし$\eta(x)$が此の形に表わされるならばそのフーリエ変換$F(p)$について(3.3)が成立して抵抗はない事になる。
$F(p)$及びその逐次微係数が$(-K_0, K_0)$の区間で有限且つ連續と仮定すれば

$$\eta(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{i}{2\pi x}\left[F(p)e^{-ipx}\right]_{-K_0}^{K_0} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \cdots (3.5)$$

となるから $\eta(x)$ が $|x|>1$ の区間で恒等的に消える為には

$$F(\pm K_0) = \frac{d}{dp}F(\pm K_0) = \cdots\cdots = 0$$

即ち

$$F(p)=0, \quad for \quad K_0 > p > -K_0, \quad \cdots (3.6)$$

でなければならない。此の事は、Fに対する制限を少しゆるめて積分可能で且つ逐次微係数が連續であるとしても成立つだろう。そうすると結局有限な長さの船では抵抗のないものはありえないと云う事になるし、又同じ(3.5)式から $\eta(x)$ は必ず $\cos K_0x$、又は $\sin K_0x$ の様な因子を含むから、$\eta(x)$ が負でない様な波のない船型もない。

逆に $\eta(x)$ を連續に無限にのびた分布とし、且つ必ずしも正に限らなければ (3.4) の形に表わせさえすれば抵抗はない。

例えば

$$F(p) = 2\sqrt{\pi}\frac{\{\Gamma(\nu+1)\}^2}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left\{1-\left(\frac{p}{K_0}\right)^2\right\}^{\nu-\frac{1}{2}}, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad \cdots (3.7)$$ [7]

とおけば

$$\left.\begin{aligned} \eta(x) &= K_0\frac{\Gamma(\nu+1)}{(\frac{K_0x}{2})^\nu}J_\nu(K_0x) = K_0\Lambda_\nu(K_0x), \\ \int_{-\infty}^{\infty}\eta(x)\,dx &= \Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})/2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1), \end{aligned}\right\} \cdots (3.8)$$

或いは

$$F(p) = P_{2n}\left(\frac{p}{K_0}\right), \quad \text{ルジャンドル函数}, \quad \cdots (3.9)$$

とおけば

$$\left.\begin{aligned} \eta(x) &= (-)^n\sqrt{\frac{K_0}{2\pi x}}\,J_{2n+\frac{1}{2}}(K_0x), \\ \int_{-\infty}^{\infty}\eta(x)\,dx &= \Gamma(n+\tfrac{1}{2})/\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1), \end{aligned}\right\} \cdots (3.10)$$

等となる。特に前者は FIG. 3 に示す様に K_0 の大きい時には ν を適当に選んで正負に波打つ部分を随分小さくする事が出来る。又後者は x の $(-\infty, \infty)$ で対称な直交函数系となっているから、任意の函数を此の波のない系で近似する事が出来る事になる。従って項数を多くとればとる程、与えられた函数に近付くけれども恒等的に等しくなる事はないから、抵抗は勿論消えないし、又変らない筈である。逆に船の外側で η が零になる様な級数を作って抵抗を求めれば項数を多くすればする程抵抗は小さくなるだろうが此の時 η の形が一定なものに收斂するとは考えられない。

4. 点対称圧力分布系

此の場合抵抗は[8)]

$$R = \frac{K_0^2}{\pi\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |F(K_0\sec^2\theta, \theta)|^2 \sec^5\theta\, d\theta, \quad \cdots\cdots \quad (4.1)$$

$$F(K,\theta) = \iint p(x,y)e^{iK(x\cos\theta + y\sin\theta)}dxdy = \iint p(r)e^{iKr\cos(\theta-\varphi)} r dr d\theta, \quad \cdot \quad (4.2)$$

即ち F は θ に無関係に

$$F(K) = 2\pi\int_0^\infty p(r)J_0(Kr)r dr, \quad \cdots \quad (4.3)$$

逆に

$$p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(K)J_0(Kr)KdK, \quad \cdots\cdots \quad (4.4)$$

抵抗が消える為には

$$F(K) = 0 \quad for \quad K \geq K_0, \quad \cdots \quad (4.5)$$

でなければならないから

$$p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{K_0} F(K)J_0(Kr)KdK, \quad \cdots\cdots \quad (4.6)$$

の形の分布は常に波なしである事が容易に判る。

例えば

$$p(r) = \frac{\sin\alpha r}{r}, \quad \alpha < K_0, \quad \cdots \quad (4.7)$$

前節と殆ど同じ式が出て来たから，矢張此の場合も同じ論法で同じ結論が出て来る事は容易に判るだろう。

5. 矩形面上の圧力分布系

次いでもっと一般的に Havelock 型の分布について考えて見よう。

(4.1), (4.2) から 2次元の場合同様

$$P(x,y) = \left\{\frac{\partial^4}{\partial x^4} + K_0^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right\}\mu(x,y), \quad \cdots \quad (5.1)$$

となる様な $\mu(x,y)$ を考えて見よう。若し P が無限範囲の分布であって，上式を満足する様な $\mu(x,y)$ のフーリエ変換が存在すれば

$$G(p,q) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mu(x,y)e^{ipx+iqy}dxdy, \quad \cdots \quad (5.2)$$

そうすれば (5.1) から

$$F(p,q) = \iint_{-\infty}^{\infty} P(x,y)e^{ipx+iqy}dxdy = (p^4 - K_0^2p^2 - K_0^2q^2)G(p,q), \quad \cdot \quad (5.3)$$

(4.1) と (4.2) において抵抗が零となる為には

$$F(p,q) = 0, \quad for \quad p^4 = K_0^2(p^2+q^2), \quad \cdots \quad (5.4)$$

従って $\mu(x, y)$ が正則であれば此れに対応する圧力分布は常に渦がない事になる。

更に μ が有限な範囲,今はそれを矩形とする,に限られているとすると部分積分によって $p^4 = K_0^2(p^2+q^2)$ ならば

$$\overline{F}(p, q) = \int_{-b}^{b}\left[\left\{\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} - ip\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (K_0^2 - p^2)\frac{\partial}{\partial x} + ip^3\right)\mu\right\}e^{ipx}\right]_{x=-1}^{x=1} e^{iqy}\,dy$$

$$+ K_0^2\int_{-1}^{1}\left[\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y} - iq\right)\mu\right\}e^{iqy}\right]_{y=-b}^{b} e^{ipx}\,dx\,, \quad \cdots\cdots \quad (5.5)$$

となるから

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^3}{\partial x^3}\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mu = \frac{\partial}{\partial x}\mu = \mu = 0\,, && \text{for } x = \pm 1 \\ &\frac{\partial}{\partial y}\mu = \mu = 0\,, && \text{for } y = \pm b \end{aligned}\right\} \cdots (5.6)$$

ならば渦がない。或いは(5.1)の解としての $\mu(x, y)$ の境界値のみで抵抗値は定まる。

さて2節同様(5.1)を調和函数 $\Psi(x, y, z)$, $\mu(x, y)$ を境界値として持つ $M(x, y, z)$ を考えて分解して見よう。

$$P(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_0\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - K_0\frac{\partial}{\partial z}\right)M(x, y, z)\Big|_{z=0}$$

$$P(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_0\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi(x, y, 0)\,, \quad \cdots\cdots \quad (5.7)$$

$$\Psi(x, y, 0) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - K_0\frac{\partial}{\partial z}\right)M(x, y, 0)\,, \quad \cdots\cdots \quad (5.8)$$

$$M(x, y, 0) = \mu(x, y)\,.$$

此の上式は水面条件を現わしている。

即ち Ψ は速度ポテンシャルの x に関する積分,従って水面変位の2回積分となっている。

2次元の場合と同様に若し μ が与えられゝば此れから水面変位と圧力分布を計算する事は容易である。

さて最后にある分布系が渦無しであるとすれば(5.6)から(5.1)を積分して

$$\iint P(x, y)\,dx\,dy = 0\,, \quad \cdots\cdots \quad (5.9)$$

即ち全圧力の和は零である。

若し此の和が零でないものを求めるならばそれは前節の例の様なものになる訳である。

6. ミッチェル船型

次にミッチェル船型(此處ではある面の特異点分布の意味でこう呼ぶ)を考えよう。

$$R = \frac{4\rho g^4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| F(K_0\sec^2\theta, K_0\sec\theta)\right|^2 \sec^5\theta\, d\theta. \quad \cdots \quad (6.1)$$

$$F(K,p) = \iint \eta(x,z)\, e^{Kz-ipx}\, dx\, dz \quad , \quad - \quad (6.2)$$

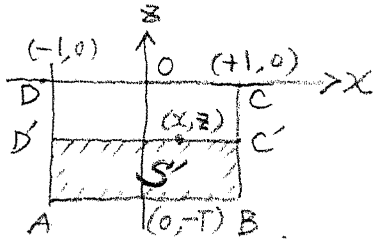
ηは半巾とする。
波無し条件は

$$F\left(\frac{p^2}{K_0}, p\right) = 0 \quad , \ \text{for} \ p > K_0 \ . \quad - \quad (6.3)$$

であるから前節同様

$$\eta(x,z) = \left(K_0\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma(x,z) \quad , \quad - \ - \quad (6.4)$$

なる式即ち一般化された熱伝導の方程式を考えよう。
そう考えるとηは熱源，σは温度，zは時間，$1/K_0$は熱伝導度と見做す事が出来る。



(6.4)の解は[9]

$$\sigma(x,z) = \int_{BC'+AD'} \sigma(\xi,\zeta)\frac{\partial T}{\partial \xi}\, d\zeta + \iint_{S'} T\, \eta(\xi,\zeta)\, d\xi\, d\zeta, \quad - \ - \ (6.5)$$

但し境界条件は

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(x,z)\big|_{AB} = 0 \\ &\frac{\partial \sigma}{\partial x}\Big|_{AD', BC'} = 0 \end{aligned}\right\} \quad - \ - \quad (6.6)$$

又

$$T = \frac{1}{2}\left\{K_0\pi(z-\zeta)\right\}^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{K_0(x-\xi)^2}{z-\zeta}\right\},$$

となる。若しABを無限に延長すれば

$$\sigma(x,z) = \iint_{S'} T\, \eta(\xi,\zeta)\, d\xi\, d\zeta \ , \quad - \quad (6.5')$$

さて(6.2)をσで表わす為に部分積分すれば

$$F\left(\frac{p^2}{K_0}, p\right) = K_0\int_{-1}^{1}\left[\sigma e^{\frac{p^2 z}{K_0}}\right]_{z=-T}^{0} e^{-ipx}\, dx - \int_{-T}^{0}\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x} + ip\sigma\right)e^{-ipx}\right]_{x=-1}^{x=1} e^{\frac{p^2}{K_0}z}\, dz,$$

(6.6)の境界条件を入れれば

$$F\left(\frac{p^2}{K_0}, p\right) = K_0\int_{-1}^{1}\sigma(x,0)\, e^{-ipx}\, dx - ip\int_{-T}^{0}\left[\sigma e^{-ipx}\right]_{x=-1}^{x=1} e^{\frac{p^2}{K_0}z}\, dz, \quad \cdots \quad (6.7)$$

或いは又(6.5')に対応して

$$F\left(\frac{p^2}{K_0}, p\right) = K_0\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(x,0)\, e^{-ipx}\, dx, \quad - \ - \ - \ - \quad (6.8)$$

の様になって矢張σの境界値によって抵抗が決まってしまう。
又特に後の式によれば抵抗がもとの分布に等しい様な$\sigma(x,0)$を常に求める事が出来る訳である。
さて波が消える為には(6.7)から(6.6)を合せて

$$\sigma(x,-T) = \sigma(x,0) = \sigma(\pm 1,z) = \frac{\partial}{\partial x}\sigma(\pm 1,z) = 0, \qquad (6.9)$$

であればよい。そして此の時(6.4)を積分すれば

$$\int_{-1}^{1}\int_{-T}^{0}\eta(x,z)\,dx\,dz = \kappa_0\int_{-1}^{1}\sigma(x,0)\,dx = 0, \quad \cdots \qquad (6.10)$$

即ち排水量が零となる。その最も簡単な例をFig.4に示した。又左の方の等式は(6.6)の境界条件は初めに温度零で両端から熱が逃げないと云う事であるから、当然総熱量の等式である。

次に(6.8)の表現は(3.3)と同型式であるから3節の結論はすべて当はまる。即ちσは無限にのびていて且つ負の部分を持たなければ波は消えない。

所でσは(6.5')で表わされ且つTは常に正であるから、ηが正ならばσは正、従ってηが負値をとらなければσも負値をとりえず、従って波は消えないし、又ηが有限範囲分布ならばσの逐次微係数の中で不連続なものが出てくるから、それから波が出て来る故ηも無限範囲の分布でなければならない。

さて排水量が零であったとしても、Fig.4の様な波なし分布は非常に有用であろう。即ち此の様な波無し分布を幾つ重ね合わせても抵抗値は変らないから、抵抗が同じ値に保たれる様に可成自由に船型を変える事が出来る訳である。

7. 極小値問題

最初に造波抵抗の極小値問題を考えよう。

(6.1), (6.2)において(x,z)点に集中して左右対称にΔVだけの体積変化があったとすると、それによってFは次の量だけ変る。

$$\Delta F = e^{\kappa z - ipx}(\Delta\eta\,\Delta x\,\Delta z) = \frac{\Delta V}{2}e^{\kappa z - ipx},$$

よって

$$\frac{\Delta R}{\Delta V} = G(x,z) = \frac{4\rho g^4}{\pi}\,\mathcal{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\kappa,p)\,e^{\kappa z + ipx}\sec^5\theta\,d\theta, \quad 但し\begin{cases}\kappa = \kappa_0\sec^2\theta\\ p = \kappa_0\sec\theta\end{cases}$$

(6.2)から $\eta(x,z) = \eta(-x,z)$ ならばFは実数値をとるから

$$G(x,z) = \frac{4\rho g^4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\kappa,p)\,e^{\kappa z}\cos px\,\sec^5\theta\,d\theta, \quad \cdots \qquad (7.1)$$

一方排水量は

$$V = 2\iint_{-1}^{1}\eta(x,z)\,dx\,dz, \quad \cdots\cdots \qquad (7.2)$$

従って排水量一定でRを極小にする問題はラグランジュの方法による未定係数をλとして、(7.2)の他に

$$G(x,z) = -\lambda, \quad \cdots \qquad (7.3)$$

の様な式が成立すればよい。

(7.1)を書き直せば

$$G(x,z)=\frac{4\rho}{\pi}\int_{K_0}^{\infty}F\left(\frac{p^2}{K_0},p\right)e^{\frac{z}{K_0}p^2}\cos(px)\frac{p^4dp}{\sqrt{p^2-K_0^2}}\quad,\quad\cdots(7.1')$$

となるが、此れが常数に等しくなる事は、(3.6)を導いたのと同じ論法で

$$\lambda=0\quad,\quad F\left(\frac{p^2}{K_0},p\right)=0\quad,\quad\cdots\quad(7.4)$$

以外にはありえないだろう。所が此れは(6.3)即ちR_Wが消えるという条件である。

抵抗は明らかに負ではありえないから、此れは確かに極小値である。

3節の最后にも少々ふれたが、造波抵抗は一般に云って特異点の不連続から生ずるものであるから、それを少くすればする程減って来て最后に零に収斂して行く事は当然だとも考えられる。

然し実際にはある許容函数を選べば殆ど常に極小値が存在する(解が求まらない例もある[2])から此の問題を考える事は無意味ではない。

問題はむしろ許容函数の選び方であって、例えばあまり高巾の級数で近似する様な事は実際上からも、かえって好ましくないと考えられる。

8. 附録

(3.7)を半巾の若しくは、横切面積曲線の方程式とみなせばTaylorの標準系列のそれによく似た曲線群を得るので、以下少し考察して見る。

(3.1), (3.2)において半巾$\eta(x)$の替りに横切面積$A(x)$、吃水をTとして、

$$\eta(x)=\frac{A(x)}{2T}=\frac{A_{\otimes}}{2T}\left\{1-\left(\frac{2x}{L}\right)^2\right\}^{\nu-\frac{1}{2}},\quad\nu>-\frac{1}{2}\quad,\quad\cdots(8.1)$$

$A_{\otimes}$；中央横切面積、

で表わされる垂直舷側船を考えると、吃水があまり深くなければその船型と抵抗は殆ど変らないと考えられる。

そうすると、

$$F(\gamma\sec\theta)=\frac{LA_{\otimes}}{2T}\int_0^1(1-\xi^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{i\gamma\xi\sec\theta}d\xi=F(0)\Lambda_\nu(\gamma\sec\theta)=F(0)\frac{\Gamma(\nu+1)J_\nu(\gamma\sec\theta)}{\left(\frac{\gamma\sec\theta}{2}\right)^\nu}$$

但し

$$F(0)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}A(x)dx=\frac{\nabla}{2T}=\frac{LA_{\otimes}}{2T}C_p\quad,\qquad\Big\}(8.2)$$

$$C_p=\frac{\nabla}{LA_{\otimes}}=\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)/2\Gamma(\nu+1)\quad,$$

$\gamma=gL/2U^2$, ∇；排水容積

故に (8.1) から

$$\frac{R}{\rho g \nabla} = \frac{8\gamma^3}{\pi}\left(\frac{\nabla}{L^3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-e^{-K_0T\sec^2\theta}}{K_0T}\right)^2 \Lambda_\nu^2(\gamma\sec\theta)\sec\theta\, d\theta, \qquad (8.3)$$

此処で

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1-e^{-K_0T\sec^2\theta}}{K_0T}\right)^2 &\xrightarrow[K_0T\ll 1]{} \sec^4\theta\,(1 - K_0T\sec^2\theta + \cdots)\\ &\xrightarrow[K_0T\gg 1]{} \frac{1}{(K_0T)^2} + \cdots\end{aligned}\right\} \qquad (8.4)$$

吃水があまり深くなく、造波抵抗が問題になる様な速度では普通前者の式が略々当てはまる。又此の値は常に1より小さい。 次に γ が充分大きく、且つ ν よりも又大きい場合は

$$\Lambda_\nu(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}}\cos\left(x - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから上式に入れて、定常点法を使えば

$$\frac{R}{\rho g \nabla} \xrightarrow[\gamma\to\infty]{} \frac{8}{\pi}\left(\frac{\nabla}{L^3}\right)\frac{\Gamma(2\nu+1)}{\gamma^{2\nu-2}}\left(\frac{1-e^{-K_0T}}{K_0T}\right)^2\left\{1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\gamma}\,C_p}\sin\left(2\gamma + \frac{\pi}{4} - \nu\pi\right)\right\}$$

$$\nu > 1, \text{ 或いは } (C_p < .786) \quad \cdots\cdots \quad (8.5)$$

此の式によって見れば、ν は (8.2) の最后の式から C_p の函数であるから単位排水量当りの抵抗は (∇/L^3), T, C_p の3つの要素の比較的簡単な函数である。

即ち単位排水量当りの抵抗は (∇/L^3) に比例し、吃水が深ければ小さくなる。又第2項は ν が1より大きいと略々

$$\Gamma(2\nu+1)/\gamma^{2\nu-2} \xrightarrow[\nu\gg 1]{} 8\sqrt{\pi}\,\nu^{\frac{5}{2}}e^{-2\nu}\left(\frac{2\nu}{\gamma}\right)^{2\nu-2}$$

だから $\gamma > 2\nu$ ならば一定速度において、ν が大きくなれば（C_p が小さくなれば）急激に抵抗は小さくなるが、$2\nu > \gamma$ となれば逆に大きくなり始める。即ち抵抗最小の C_p がある。もっとも此の C_p の値はあまり実際的な値ではないが定性的には事実に合致する訳である。

次にハンプ、ホロウ即ち (8.5) の中括弧の中の第2項は次の様な速度である。

$$\left.\begin{aligned}\text{ハンプ}\ ;&\quad 2\gamma - \nu\pi = \left(2n + \tfrac{1}{4}\right)\pi, \quad n:\text{整数}\\ \text{ホロウ}\ ;&\quad 2\gamma - \nu\pi = \left(2n - \tfrac{3}{4}\right)\pi, \quad 〃 \quad 〃\end{aligned}\right\} \qquad (8.6)$$

の様に与えられて ν（従って C_p）によって位相がずれる様子がよく判る。又此の項の絶対値はフルード数に比例し C_p に逆比例する。例えば[illegible]で C_p の大きい船はハンプホロウが小さいと云う訳である。

以上の様に此の様な簡単なモデルから系統試験結果を

少くとも定性的には可成うまく表現出来る。

FIG.2 に ν と Cp の関係を示し,此のグラフから Taylor の系列に該当する Cp の値に対する ν をよみとって(8.1)の横切面積を FIG.4 に実線で描き。此れに対応する Taylor 系列のものを点線で示した。[10] 後半部のみを描き込んだが肥えた船型ではむしろ前半の方がよく一致する様に見える。

9. 結論

以上要約すれば

i) 2次元圧力分布では常に全圧有限で,負圧にならない,波のない分布がある。

3次元問題では

ii) 造波抵抗の極小値は零である。

iii) 然し抵抗のない船型は半巾が負になる事を許さなければ存在しない。

iv) 半巾が負になる事を許せば,抵抗のない系が無数に考えられるが,此の時船長が有限ならば排水量は零である。

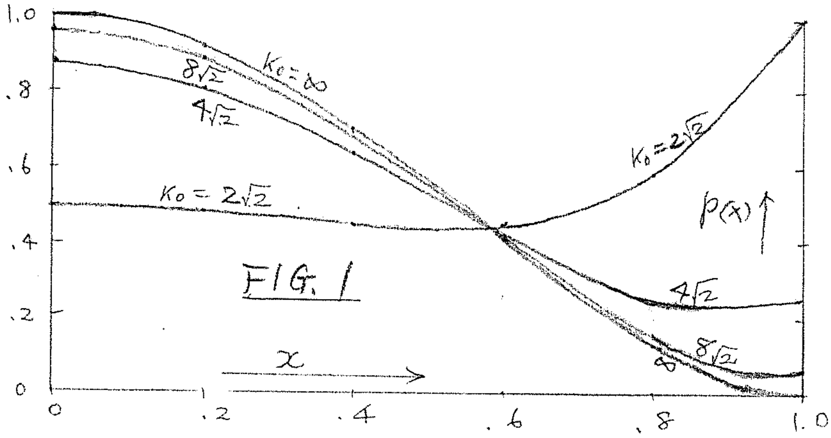
v) 若し排水量を有限に保つならば船長は無限大となる。

以上の事は圧力分布についても全く同じである。

以上

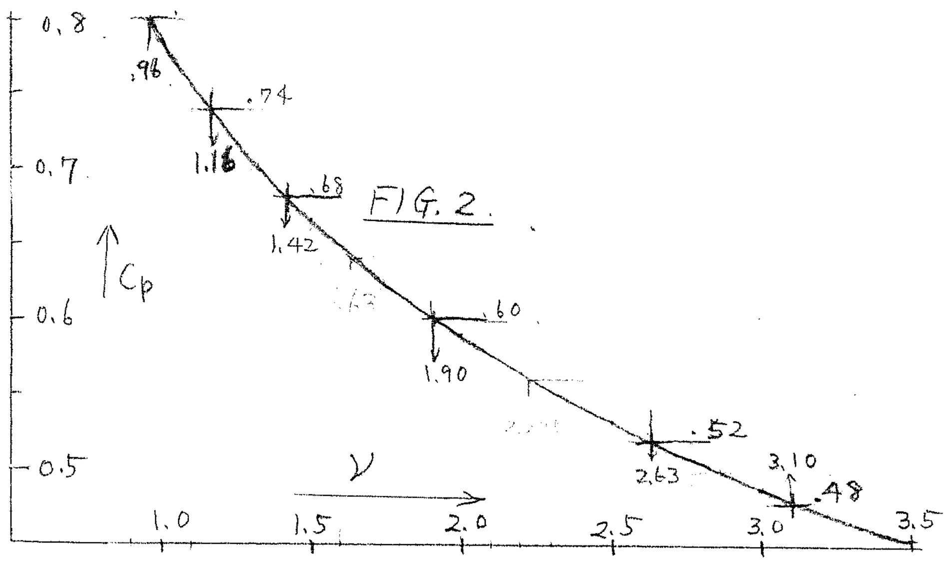
註)

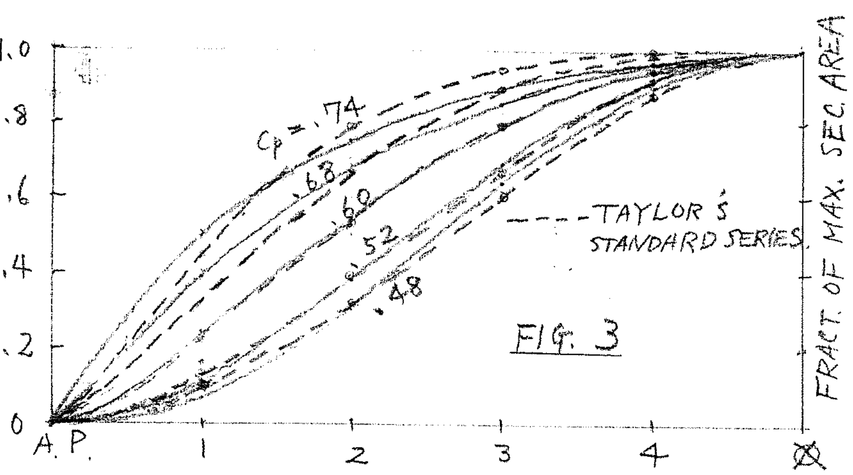
1) G. Weinblum and anders; Jahrb. d. Schiffbau. Ges. (1957)
2) 著者未刊パンフレット,防衛技研 目黒水槽 宍田氏の計算に負う。
3) 乾 他; 造船協会講演会発表予定 昭和35年秋.
4) W. Thomson; Math. and Phisical Papers vol. 4, p. 387 (1910)
5) T. H. Havelock; P. R. S. vol. 93 (1917)
6) 著者; "定常造波抵抗理論について" (第3章) (未発表)
7) E. C. Titchmarsh; "Introduction to the Theory of Fourier Integrals" 2nd. Ed. p. 352 (1948).
8) T. H. Havelock; P. R. S. vol. 138 (1932).
9) H. Bateman; "Partial differential equation of mathematical Phisics" p. 129 (1932)
10) D. W. Taylor; "Speed and Powers of Ships" (1933)
11) T. H. Havelock; P. R. S. vol 95 (1919)

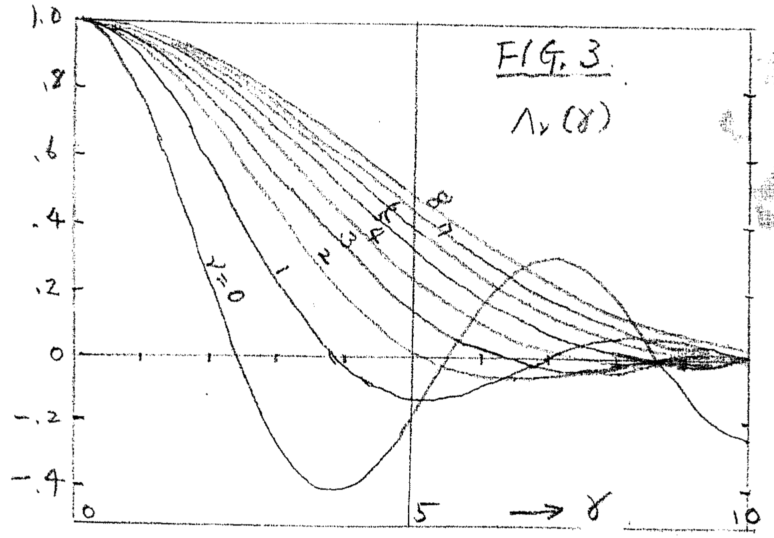


$$\mu(x) = \frac{1}{K_0^2}(1-x^2)^2.$$

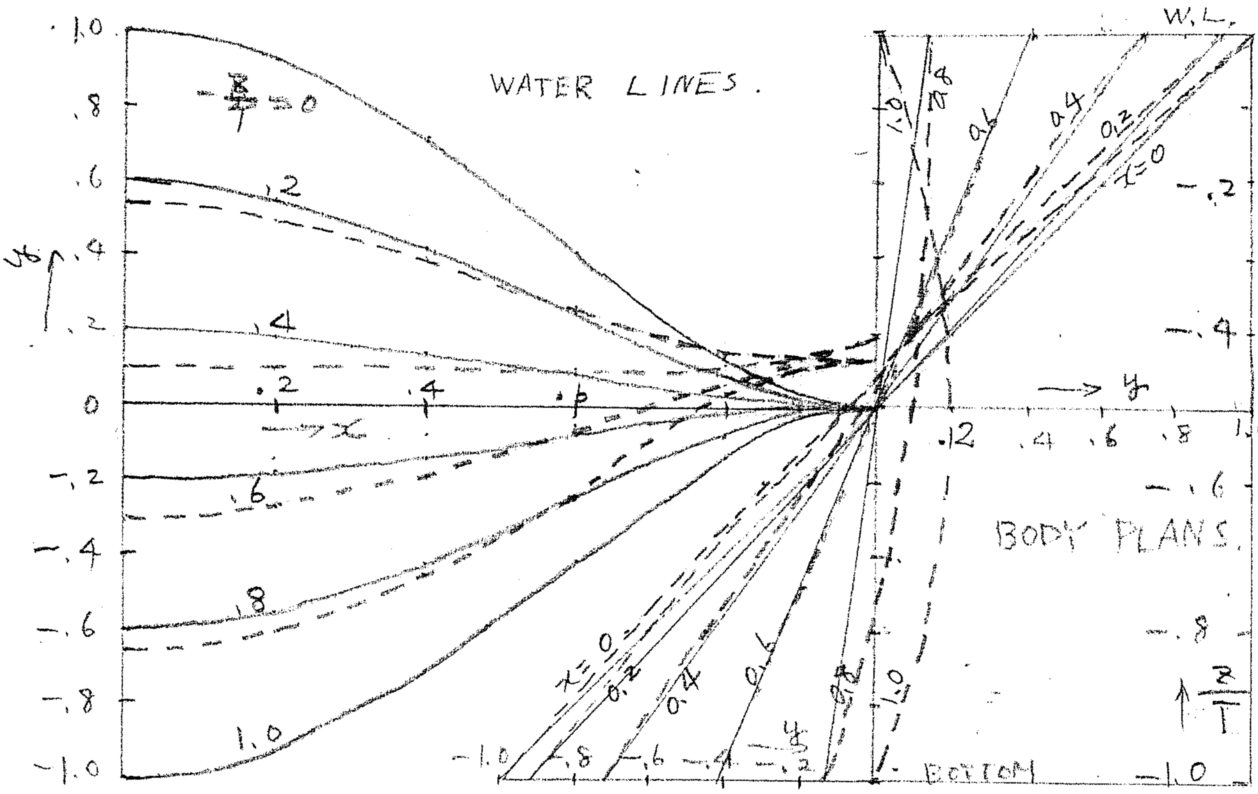
$$p(x) = (1-x^2)^2 + \frac{4}{K_0^2}(3x^2-1),$$







$$\Lambda_\nu(\gamma) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{(\frac{\gamma}{2})^\nu} J_\nu(\gamma),$$



DOTTED LINE $\gamma = 1$, $\frac{T}{L} = 20$
FULL LINE $\gamma = \infty$;

FIG. 4. $\sigma(x,z) = \frac{1}{\gamma}(1-x^2)^2\, z\,(1+\frac{z}{T})$,

$$\eta(x) = (1-x^2)^2(1+\frac{2z}{T}) + \frac{4}{\gamma} z (1+\frac{z}{T})(1-3x^2),$$