"極小造波抵抗問題に関する覚書"

別所正利

昭和36年10月18日

目次

A4×100

1. 緒言

造波抵抗の極小値を求める問題は実際的にも重要な問題であるが、理論的には、かなり多くの数学的困難があって、従来の多くの試みにも拘らず、特に低速の範囲で充分満足のゆく結論が出ていない状態である。

此の覚書きでは、最近の研究結果*をもとにして、著者自身の考えを述べて見る。

尚此処では一応問題をミッチェル、ハブロック型の排水量型船に限る事にする。

2. 定式化

水面船体中央に原点をとり、船首方向を正としてx-軸、鉛直上方にz-軸をもつ右手座標系をとり、船長(L)を2、船巾(B)を2b、吃水(d)をt、排水容積(∇)をδ、船速(V)を1、此の単位系の重力の常数をgとする。

そうすると、

$$b=\frac{B}{L},\quad t=\frac{2d}{L},\quad \delta=\frac{8\nabla}{L^3},\quad F_r=\frac{1}{\sqrt{2g}}$$ 等となる。

今造波抵抗Rは$\eta(x,z)$を船体半巾とすれば次式で与えられる。

$$R=\frac{4\rho g^4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\bar{F}(g\sec^2\theta,\theta)\right|^2\sec^5\theta\,d\theta, \qquad (2.1)$$

但し

$$\bar{F}(k,\theta)=\int_{-t}^{0}\int_{-1}^{1}\eta(x,z)\,e^{kz-ikx\cos\theta}\,dx\,dz, \qquad (2.2)$$

又ρは水の密度とする。

今

$$\left.\begin{aligned}P_{2n}(x,t)&=(-)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-t\sec^2\theta}\sin(x\sec\theta)\cos^{2n}\theta\,d\theta,\\ P_{2n+1}(x,t)&=(-)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-t\sec^2\theta}\cos(x\sec\theta)\cos^{2n+1}\theta\,d\theta,\end{aligned}\right\}\qquad (2.3)$$

の様な函数を導入して、(2.1)の積分順序を変換すれば

* S. Karp, J. Kotik and J. Lurye; Man. & Abs. of 3rd Sympo. on Nav. Hydro. (Sep. 1960)
及び G. Weinblum und andere; J. S. T. G. Bd. 51 (1957) ss. 175～214

$$R = \rho g \int_{-t}^{0}\int_{-1}^{1} G(gx, gz)\,\eta(x,z)\,dx\,dz, \qquad (2.4)$$

但し

$$G(gx, gz) = \frac{4g^3}{\pi}\int_{-t}^{0}\int_{-1}^{1} \eta(\xi,\zeta)\,R_s(g\,\overline{x-\xi}, -g\,\overline{z+\zeta})\,d\xi\,d\zeta,$$

$$\text{or} \quad = \frac{4g^3}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} F(g\sec^2\theta, \theta)\,e^{gz\sec^2\theta + igx\sec\theta}\sec^5\theta\,d\theta, \qquad (2.5)$$

此の G を以下影響函数と呼ぶ事にしよう。

さて (2.3) から直ぐ判る様に R_s は次の熱伝導の微分方程式を満足する。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + f\frac{\partial}{\partial z}\right) R_s(gx, -gz) = 0, \quad z<0, \qquad (2.6)$$

従って、(2.5) から G も矢張り同じ方程式を満足する。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + f\frac{\partial}{\partial z}\right) G(gx, gz) = 0, \qquad (2.7)$$

さて問題は或る与えられた速度と排水量の下で R を極小にする $\eta(x,z)$ は如何な形であるかと云う事であるが、実際問題として、理論的には或る R に対して無限に多くの η が対応している*ので、先ず此の点で困難に遭遇する。

此の点をさける為に少し問題を変形して見よう。

先ず、(2.6), (2.7) の随伴形式によって、補助函数 σ を導入する。即ち

$$\eta(x,z) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma(x,z), \qquad (2.8)$$

そうすると此れは矢張り熱伝導の方程式であるから、σ の任意の初期値及び境界値を与えると、σ と η は1対1に対応するから、以後 η の替りに σ で問題を考える事が出来る。それを今

$$\sigma(x,-t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\sigma(\pm 1, z) = 0, \qquad (2.9)$$

* 著者；防大紀要 昭和37年4月刊行予定、以下の議論も此の文参照

の様に決めておく。

参照文献で示した様に抵抗を変えない様なσの変化はすべて、他の境界上でσが零になるのでその替りにσを考えれば上述の困難はさけられる事になる。

さて (2.8), (2.9) を (2.1) に代入して $K = g\sec^2\theta$ とおくと

$$\overline{H}(g\sec^2\theta, \theta) = \int_{-1}^{1} \sigma(x,0) e^{-igx\sec\theta} dx - i\sec\theta \int_{-t}^{0} \left[\sigma(x,z) e^{-igx\sec\theta}\right]_{x=-1}^{x=1} e^{gz\sec^2\theta} dz, \quad \cdots (2.10)$$

となり、又 (2.5) に代入すると、

$$G(gx, gz) = \frac{4g^3}{\pi}\left[\int_{-1}^{1} \sigma(\xi,0) P_5(g\overline{x-\xi}, -gz)\, d\xi - \int_{-t}^{0} \left[\sigma(\xi,\zeta) P_6(g\overline{x-\xi}, -g\overline{z+\zeta})\right]_{\xi=-1}^{\xi=1} d\zeta\right], \quad \cdots (2.11)$$

又 (2.4) に代入すると、

$$\frac{R}{\rho g} = \int_{-1}^{1} \sigma(x,0)\, G(gx,0)\, dx + \frac{1}{g}\int_{-t}^{0} \left[\sigma(x,z) \frac{\partial}{\partial x} G(gx,gz)\right]_{x=-1}^{x=1} dz, \quad \cdots (2.12)$$

の様になって、すべての量がσによって書き現わされた。

一方排水量は、(2.8), (2.9) から

$$\frac{\delta}{2} = \int_{-t}^{0}\int_{-1}^{1} \eta(x,z)\, dx\, dz = \int_{-1}^{1} \sigma(x,0)\, dx, \quad \cdots \quad (2.13)$$

となる。

所で、R は (2.11), (2.12) から見る如く、$\sigma(x,0)$ 及び $\sigma(\pm 1, z)$ の値で決まるにも拘らず、条件式 (2.13) は $\sigma(x,0)$ の總和しか規定していない。

此れは、問題として不完全だと考えられる。
此の辺は今後検討すべき問題が残っている様に思われるが、いづれにしろ現在の所は実用的な観点から Weinblum 等の様に肋骨線を一定の型に限れば、上の困難はさけられる。

尚 (2.11), (2.12) は (2.7), (2.8), (2.9) 等を考慮して部分積分し次の様に書きかえておいた方が便利であろう。

今

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G^{(2)}(gx, gz) = G(gx, gz), \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g\frac{\partial}{\partial z}\right) G^{(2)}(gx, gz), \quad \cdots (2.14)$$

の様な $G^{(2)}$ を考えれば

$$\frac{R}{\rho g} = \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma(x,0) \right\} G^{(2)}(gx, 0)\, dx + \int_{-t}^{0} \left[\frac{\partial \eta(x,z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} G^{(2)}(gx, gz) \right]_{x=-1}^{x=1} dz, \quad \cdots (2.15)$$

$$\left(\frac{\pi g}{4}\right) G^{(2)}(gx, gz) = \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{\partial^2 \sigma(\xi,0)}{\partial \xi^2} \right\} P_{-1}(g\,\overline{x-\xi}, -gz)\, d\xi - \int_{-t}^{0} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} P_{-2}(g\,\overline{x-\xi}, -g\,\overline{z+\zeta}) \right]_{\xi=-1}^{\xi=1} d\zeta, \quad \cdots (2.16)$$

さて，最も簡単な場合として $\eta(x,z)$ が吃水方向に一定である場合の問題を更めて考えよう。

此の場合 (2.1) 等から

$$R = \rho g \int_{-1}^{1} \eta(x)\, \Gamma(gx, gt)\, dx, \quad \cdots (2.17)$$

$$\Gamma(gx, gt) = \frac{4g}{\pi} \int_{-1}^{1} \eta(\xi)\, K_{-1}(g\,\overline{x-\xi}, gt)\, d\xi, \quad \cdots (2.18)$$

但し

$$K_{-1}(u, \tau) = P_{-1}(u, 0) - 2P_{-1}(u, \tau) + P_{-1}(u, 2\tau), \quad \cdots (2.19)$$

(2.13) の条件は

$$\frac{\delta}{2t} = \int_{-1}^{1} \eta(x)\, dx, \quad \cdots (2.20)$$

今 η が $\delta\eta$ だけ変化すると，(2.17), (2.18) から R も δR だけ変化して，2次の項を無視すると

$$\delta R = 2\rho g\, \Gamma(gx, gt) \{\delta\eta(x)\}, \quad \cdots (2.21)$$

となり，(2.20) から

$$\int_{-1}^{1} \delta\eta(x)\, dx = 0, \quad \cdots (2.22)$$

であるから $\qquad \delta R = 0, \quad \text{for } -1 \leq x \leq 1 \qquad (2.23)$

となる為には $\qquad \Gamma(gx, gt) = \lambda$; 常数, $\quad \cdots (2.24)$

であれば充分である。

そうすると (2.17) から

$$R = \rho g \frac{\lambda\delta}{2t}, \quad \text{or} \quad \frac{R}{\rho g \delta} = \frac{\lambda}{2t}, \qquad (2.25)$$

となる。

3. 無限吃水の場合の解の吟味

吃水が無限の時は (2.19) 式は

$$K_{-1}(u,\infty) = B_1(u,0) = -\frac{\pi}{2}Y_0(u), \qquad (3.1)$$

となるので

$$\Gamma(gx,\infty) = \Gamma(gx) = -2g\int_{-1}^{1}\eta(\xi)Y_0(g\,\overline{x-\xi})\,d\xi, \qquad (3.2)$$

$$R = \rho g\int_{-1}^{1}\eta(x)\Gamma(gx)\,dx, \qquad (3.3)$$

となり、排水量一定の条件は水線面積一定と考えるから、

$$\int_{-1}^{1}\eta(x)\,dx = \alpha, \qquad (3.4)$$

とおけば R を極小にする問題は (2.24) によって

$$\Gamma(gx) = C;\ 常数, \qquad (3.5)$$

となればよい。

此れを(3.2)に代入すれば特異積分方程式が得られその解は J. Dörr* によって与えられているが、此處ではそれと値が異る証明法を記しておこう。

極小値を与える η は偶函数である事はよく知られているから以下そう考えておこう。

さて　$x = -\cos\theta$, $\xi = -\cos\vartheta$ とおいて

$$\eta(-\cos\theta) = \frac{\varphi(\theta)}{\sin\theta}, \quad \Gamma(-g\cos\theta) = \frac{4g}{\pi}G(\theta), \qquad (3.6)$$

とおき、マシウ函数**によって

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\,ce_{2n}(\theta), \qquad (3.7)$$

と展開出来るとすると、(3.2) から

$$G(\theta) = \mathcal{R}e.\int_0^{\pi}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta\cdot\int_0^{\infty}e^{ig(\cos\vartheta-\cos\theta)\cosh u}\,du, \qquad (3.8)$$

となる。

** 記号、式等すべて、N.W. McLachlan の Text. に従う。

* Z.A.M.P. Bd.3, SS.427~439, (1952)

茲で

$$\left.\begin{aligned} Fey_{2n}(z,q) &= -\frac{2\,ce_{2n}(\frac{\pi}{2},q)}{\pi A_0^{(2n)}}\int_0^\infty \cos(2k\cosh z\cosh u)\,Ce_{2n}(u,q)\,du, \\ Ce_{2n}(z,q) &= \frac{ce_{2n}(\frac{\pi}{2},q)}{\pi A_0^{(2n)}}\int_0^\pi \cos(2k\cos u\cosh z)\,ce_{2n}(u,q)\,du, \end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

但し
$$ce_{2n}(\theta,q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}\cos 2r\theta, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(\theta,q) = 1, \quad \cdots \quad (3.10)$$

又
$$Re.\,Fey_{2n}(-i\theta,q) = \frac{Fey_{2n}(0,q)}{ce_{2n}(0,q)}\,ce_{2n}(\theta,q), \quad (3.11)$$

等の関係があるから
$$g = 2k = 2\sqrt{q}, \quad (3.12)$$

とおくと結局
$$-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi Y_0(g\,|\cos\theta - \cos\vartheta|)\,ce_{2n}(\vartheta)\,d\vartheta = \lambda_{2n}\,ce_{2n}(\theta), \quad (3.13)$$

$$\lambda_{2n} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(\frac{\pi}{2})}\right\}^2 \frac{Fey_{2n}(0)}{ce_{2n}(0)} = -\frac{\pi^2}{2\,ce_{2n}(\frac{\pi}{2})}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r A_{2r}^{(2n)} J_r(k)Y_r(k), \quad \cdots (3.14)$$

となる。 従って (3.8) は
$$G(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{2n}\,a_{2n}\,ce_{2n}(\theta), \quad (3.15)$$

となるが，一方
$$1 = 2\sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)}\,ce_{2n}(\theta), \quad (3.16)$$

の様な展開が出来るので，(3.5)，(3.6) から
$$C = \Gamma(gx) = \frac{4g}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{2n}\,a_{2n}\,ce_{2n}(\theta)$$

において
$$a_{2n} = \frac{\pi C}{2g}\cdot\frac{A_0^{(2n)}}{\lambda_{2n}}, \quad \cdots \quad (3.17)$$

でなければならない。

又 (3.4) からは，
$$\alpha = \int_0^\pi \varphi(\theta)\,d\theta = \pi\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}A_0^{(2n)}, \quad \cdots \quad (3.18)$$

であるから，(3.17) を代入すると，常数が決まって，
$$C = \frac{2g\alpha}{\pi^2}\Big/\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A_0^{(2n)})^2}{\lambda_{2n}}\right\}, \quad (3.19)$$

従って
$$R = \rho g\alpha C = \frac{2\rho g^2\alpha^2}{\pi^2}\Big/\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A_0^{(2n)})^2}{\lambda_{2n}}\right\}, \quad q = \frac{g^2}{4}, \quad (3.20)$$

一般に，(3·15), (3·6), (3·7), (3·3)から

$$R = 2\rho g^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2n} (a_{2n})^2, \qquad (3.21)$$

の形になるから，マミウ函数に展開しておく事は便利であるけれども，その数表に関する調査はまだしていない。

いずれにしても実用面から考えて，すべての点で有利とは云えない様である。

4. 三角級数による解の表現

そこで(3·6)の $\varphi(\theta)$ を次の三角級数で展開して見よう。

$$\varphi(-\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta, \qquad (4.1)$$

とおき

$$R_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\vartheta \, K_{-1}(g\,\overline{\cos\theta - \cos\vartheta}, gt)\, d\theta\, d\vartheta, \qquad (4.2)$$

の様な函数を定義すると (2·17), (2·18)から

$$R = 4\pi\rho g^2 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n a_m R_{n,m}, \qquad (4.3)$$

$$P(-g\cos\theta, gt) = 4g \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m\theta \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_{n,m}, \qquad (4.4)$$

となる。又 (2·20) の条件は

$$\frac{\delta}{2t} = \pi a_0, \qquad (4.5)$$

又極値条件は (4·4) から

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_{n,0} = \frac{\lambda}{4g}, \quad \lambda\ \text{常数} \\ &\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_{n,m} = 0, \quad \text{for } m \geq 1, \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

となる。従って (4·5), (4·6) から a_n, λ をきめればよい。

此処で更に興味ある問題として，C_b も与えて R の極小値をもとめる問題を少し考えて見よう。

さて，此の条件は $\quad C_b = \dfrac{\delta}{4bt}, \qquad (4.7)$

となるから，逆に考えれば，b を決めておく事になる。
即ち(4.1)によって

$$b = \frac{\delta}{4tC_b} = \eta(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_{2n}, \quad \cdots (4.8)$$

此の場合も，ラグランジュの未定係数で極値条件は

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\rho g}\frac{\partial R}{\partial a_n} - \frac{\lambda_1}{2t}\frac{\partial \delta}{\partial a_n} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial a_n} b = 0 \\ &b = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_{2n}, \\ &\delta = 2\pi t a_0, \end{aligned}\right\} \quad (4.9)$$

となるから矢張偶函数のみ考えて，此の第1式は

$$\left.\begin{aligned} &8\pi g \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} R_{2n,2m} = (-)^n \lambda_2, \quad n \geq 1 \\ &8\pi g \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} R_{0,2m} = \pi\lambda_1 + \lambda_2, \end{aligned}\right\} \quad (4.10)$$

と書ける。　従って(4.4)は此の場合

$$P(-\xi\cos\theta, gt) = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-)^n \cos 2n\theta, \quad \cdots (4.11)$$

$(\varepsilon_0 = 1, \ \varepsilon_n = 2 \text{ for } n \geq 1)$

従って

$$R/\rho g = \frac{\pi}{2}\lambda_1 a_0 + \frac{1}{2}\lambda_2 b, \quad \cdots (4.12)$$

となる。

所で(4.11)式中

$$\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n (-)^n \cos 2n\theta = \frac{(-)^N \cos(2N+1)\theta}{\cos\theta}, \quad \cdots (4.13)$$

となるから，Nを大きくしてゆく，即ちηを段々多くの項で近似してゆく時此の函数は単調な函数に收斂しないで段々変化が激しくなってゆく。

所が(4.10)の条件は(4.11)の条件でa_{2n}を決める事であるから，結局Nのとり方で，解はかなり異って来る事になる。

Weinblum 等が実際級数の選び方でかなり異る解を得ているのは，此の意味における解の不安定さに起因するのではなかろうか。

そういう点で数学的にはC_b一定の条件を入れる事は

適当でないと云う事になる。

然しながら実用的には最も重要な問題の一つであり、然も此の面から考えれば、解が不安定である事は、ある範囲内で多様性を持っているという事であるから、むしろ便利な点と考えられはしないだろうか。

5. $R_{n,m}$ の解析的性質

(4.2) から

$$R_{n,m}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\vartheta\,K_{-1}(g\,\overline{\cos\theta-\cos\vartheta},\,gt)\,d\theta\,d\vartheta$$

で $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{ig\sec u\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta=\pi i^n J_n(g\sec u)$ であるから

$$R_{n,m}=\mathcal{R}e.\ i^{n-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}J_n(g\sec\theta)J_m(g\sec\theta)\left(1-e^{-gt\sec\theta}\right)^2\sec\theta\,d\theta, \qquad (5.1)$$

となるから　　$R_{n,m}=0$ for $(n-m)$: odd,　　(5.2)

となって $(n-m)$ が偶数のもののみ考えればよい。
以下順をおってその性質を考えてゆこう。

i) 漸近展開

今 g が、n,m より大きい場合は

$$\left.\begin{aligned}&J_n(x)\fallingdotseq\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\,\overline{n+\tfrac{1}{2}}\right)-Q_n(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\,\overline{n+\tfrac{1}{2}}\right)\right\},\\ &\text{但し}\quad P_n(x)=1-\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!\,(8x)^2}+\cdots\\ &\qquad\quad Q_n(x)=\frac{4n^2-1}{8x}-\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!\,(8x)^3}+\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(5.3)$$

であるから

$$(-)^{n-m}J_n(g\sec\theta)J_m(g\sec\theta)\fallingdotseq\frac{\cos\theta}{\pi g}\Big[1+\frac{\cos^2\theta}{64g^2}a_{n,m}+(-)^n\Big\{1-\frac{\cos^2\theta}{64g^2}b_{n,m}\Big\}\sin(2g\sec\theta)$$
$$+(-)^n\frac{\sec\theta}{8g}c_{n,m}\cos(2g\sec\theta)\cdots\Big], \qquad (5.4)$$

但し

$$a_{n,m}=(4n^2-1)(4m^2-1)-\tfrac{1}{2}\{(4n^2-1)(4n^2-9)+(4m^2-1)(4m^2-9)\},$$
$$b_{n,m}=(4n^2-1)(4m^2-1)+\tfrac{1}{2}\{(4n^2-1)(4n^2-9)+(4m^2-1)(4m^2-9)\},$$
$$c_{n,m}=4m^2-4n^2-2,$$

此れを (5.2) に代入して積分すると、

$$R_{n,m} \fallingdotseq \frac{1}{\pi g}\Big[L_0(0,gt) + \frac{a_{n,m}}{64g^2}L_2(0,gt) + (-)^n K_0(2g,gt)$$

$$- \frac{(-)^n}{8g}c_{n,m}K_1(2g,gt) + \frac{b_{n,m}}{64g^2}K_2(2g,gt)+\cdots\Big], \qquad (5.5)$$

但し $K_n(u,\tau) = P_n(u,0) - 2P_n(u,\tau) + P_n(u,2\tau)$,

$$L_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-e^{-gt\sec^2\theta})^2\cos^{2n}\theta\,d\theta, \qquad (5.6)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\,d\theta = \frac{(n-\frac12)(n-\frac32)\cdots(\frac12)}{n\cdot(n-1)\cdots1}\cdot\frac{\pi}{2},$$

又 $$I_n(\tau) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau\sec^2\theta}\cos^{2n}\theta\,d\theta = \frac12\int_0^\infty \frac{e^{-\tau(1+p)}\,dp}{\sqrt{p}\,(1+p)^{n+1}}, \qquad (5.7)$$

$$I_{n+1}(\tau) = I_{n+1}(0) - \int_0^\tau I_n(\tau)\,d\tau, \qquad (5.8)$$

で特に、

$$I_0(\tau) = \frac{\pi}{2}\left(1-\Phi(\sqrt{\tau})\right), \qquad (5.9)$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

である。

特に $gt\gg1$ で e^{-gt} が無視出来るならば

$$R_{n,m} \fallingdotseq \frac{1}{\pi g}\Big[\frac{\pi}{2} + (-)^nP_0(2g,0) - \frac{(-)^n}{8g}c_{n,m}P_1(2g,0)+\cdots\Big], \qquad (5.10)$$

for $n,m \ll g$, and $g\gg1$.

ii) ベッセル函数の積による展開（無限吃水）

無限吃水では (4.2) は

$$R_{n,m} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi \cos n\theta\cos m\vartheta\, Y_0(g\,\overline{\cos\theta-\cos\vartheta})\,d\theta\, d\vartheta, \qquad (5.11)$$

とかける。

さて $$Y_0(g\,\overline{\cos\theta-\cos\vartheta}) = \sum_{r=0}^\infty \varepsilon_r J_r(g\cos\theta)\,Y_r(g\cos\vartheta), \qquad (5.12)$$

であって

$$\int_0^\pi J_r(g\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\{1+(-)^{n+r}\}J_{\frac{n+r}{2}}\left(\frac g2\right)J_{\frac{n-r}{2}}\left(\frac g2\right),$$

又、前出、Dörr によれば、主値の意味で

$$\int_0^{\pi} Y_r(g\cos\vartheta)\cos m\vartheta\, d\vartheta = \frac{\pi}{4}\{1+(-)^{m+r}\}\left[J_{\frac{m+r}{2}}\left(\frac{g}{2}\right)Y_{\frac{m-r}{2}}\left(\frac{g}{2}\right)+J_{\frac{m-r}{2}}Y_{\frac{m+r}{2}}\right].$$

であるから(5.11)は

$$R_{n,m} = -\frac{\pi}{4}\sum_{r}^{\infty}\varepsilon_r J_{\frac{n+r}{2}}J_{\frac{n-r}{2}}\left[J_{\frac{m+r}{2}}Y_{\frac{m-r}{2}}+J_{\frac{m-r}{2}}Y_{\frac{m+r}{2}}\right], \qquad (5.12)$$

但し, $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_r=2$ for $r\geq 1$, 又 r は n が偶数なら 0 から偶数のみを加え合せ, 奇数なら 1 から奇数のみを加え合せる。又ベッセル函数の変数はすべて $\left(\frac{g}{2}\right)$, である。

特に n, m が偶数では

$$R_{2n,2m} = -\frac{\pi}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon_r J_{n+r}J_{n-r}\left[J_{m+r}Y_{m-r}+J_{m-r}Y_{m+r}\right],$$

の形になる。

此の級数が收斂する事は容易に証明出来る。しかし, $R_{n,m}=R_{m,n}$ である事が此の展開の儘で一寸証明出来ないので不安である。

実際に後項の数値例と同じく $R_{0,2}$ で当って見た所では $R_{0,2}=R_{2,0}$ になっている様である。

此の展開は特に g の大きい所で数値計算に便利な様であるが, 級数の收斂性がたやすく見分けられない点で不便である。

$R_{0,0}$ を $g=20$ で計算して見ると約20項で8桁の精度が楽に出て来る。

尚ベッセル函数の表としては J_{20}, Y_{20} 10桁のものがあるから此れを利用出来る事も有利である。

ii) 積分表示(無限吃水)

(5.1)から無限吃水の場合

$$R_{n,m} = \mathrm{Re}\; i^{n-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_n(g\sec\theta)J_m(g\sec\theta)\sec\theta\, d\theta, \qquad (5.13)$$

ところが

$$J_n(z)J_m(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{n+m}(2z\cos\vartheta)\cos(m+n)\vartheta\, d\vartheta$$

で且つ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(x\sec\theta)\sec\theta\, d\theta = -\frac{\pi}{2}J_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)Y_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{x}{2}\right),$$

であるから

$$R_{n,m} = \frac{2}{\pi}(i)^{n-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(m+n)\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{n-m}(2g\cos\vartheta\sec\theta)\sec\theta\, d\theta$$

$$= -\mathrm{Re}\, i^{n-m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\frac{n-m}{2}}(g\cos\vartheta)Y_{\frac{n-m}{2}}(g\cos\vartheta)\cos(m+n)\vartheta\, d\vartheta, \quad \cdots (5.14)$$

となる。尚

$$\lim_{x\to0} J_n(x)Y_n(x) = -\frac{1}{n\pi}, \quad \text{for } n\geq 1$$

であるから，$\vartheta=\frac{\pi}{2}$ で $n=m$ の場合以外は Integrand は有限である。もっとも，上式は m を $-m$ としても成り立つから

$$R_{n,m} = -\mathrm{Re}\, i^{n+m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\frac{n+m}{2}}(g\cos\vartheta)Y_{\frac{n+m}{2}}(g\cos\vartheta)\cos(m-n)\vartheta\, d\vartheta,$$

と書きかえても同じである。

此れから前述の展開が出来る事は明らかであろう。

iv) 級数展開（無限吃水）

(5.13) 式からはまた級数展開が導ける。

$$J_\nu(z)J_\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n \frac{z^{2n+2\lambda}\,\Gamma(n+\lambda+\frac12)\Gamma(n+\lambda+1)}{n!\,\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(n+2\lambda+1)},$$

であるから今 $\mu+\nu=2\lambda$, $\mu-\nu=2\kappa$, $\mu>\nu$ とおいて，上式をメラン・バーンズ式積分表示すれば

$$= \frac{1}{2\pi^{\frac32}i}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon-i\infty}\frac{\Gamma(\lambda-t)\Gamma(t+\frac12)\Gamma(t+1)\,z^{2t}}{\Gamma(t+\mu-\lambda+1)\Gamma(t+\nu-\lambda+1)\Gamma(t+\lambda+1)},$$

但し $-\frac12<\varepsilon<\lambda$,

(5.13) に代入して θ に関する積分を実行すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec^{2t+1}\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(-t)}{\Gamma(\frac12-t)}, \quad \text{for } \mathrm{Re}(t)<0$$

よって

$$R_{\nu,\mu} = \frac{(-)^{\kappa+1}}{4\pi i}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{\Gamma(\lambda-t)\{\Gamma(t+\frac12)\}^2\cos\pi t\; g^{2t}\,dt}{\Gamma(t+\kappa+1)\Gamma(t-\kappa+1)\Gamma(t+\lambda+1)\sin\pi t}, \quad \cdots (5.15)$$

今 $g \gg 1$ ならば左半面の留数を計算すれば、漸近値が得られ

$$R_{\nu,\mu} \fallingdotseq \frac{1}{2g} + \cdots \qquad (5.16)$$

となって (5.10) の1項に一致する。

さて右半平面の留数計算によって収斂級数が得られる。実行すると

$$R_{\nu,\mu} = \frac{(-)^{\kappa}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-n-1)!\,\{\Gamma(n+\kappa+\frac{1}{2})\}^2}{(2\kappa+n)!\,(\mu+n)!\,n!}\, g^{2\kappa+2n}$$

$$- \frac{(-)^{\kappa}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n \{\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})\}^2\, g^{2n+2\lambda}}{(n+\mu)!\,(n+\nu)!\,(n+2\lambda)!\,n!} \Big\{ 2\log g + 2\psi(n+\lambda+\tfrac{1}{2}) - \psi(n+\mu+1)$$

$$- \psi(n+\nu+1) - \psi(n+2\lambda+1) - \psi(n+1) \Big\}, \qquad (5.17)$$

今これを

$$R_{\nu,\mu} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = (-)^{\kappa} \sum_{n=0}^{\nu-1} C_n\, g^{2n+2\kappa},$$

$$I_2 = (-)^{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n A_n\, g^{2n+2\lambda} \left\{ B_n - \log \frac{\gamma g}{4} \right\},$$

$\log \gamma$ はオイラーの定数

と書くと

$$A_0 = \frac{(\lambda-\frac{1}{2})^2(\lambda-\frac{3}{2})^2 \cdots (\frac{1}{2})^2}{\mu!\,\nu!\,(\mu+\nu)!}, \quad A_n = \frac{(n+\lambda-\frac{1}{2})^2 A_{n-1}}{(n+\mu)(n+\nu)(n+\mu+\nu)\,n},$$

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2\mu+2} + \frac{1}{2n+2\nu+2} + \frac{1}{2n+2\mu+2\nu+2} - \frac{1}{n+\lambda+\frac{1}{2}},$$

$$C_0 = \frac{(\nu-1)!\,(\kappa-\frac{1}{2})^2 \cdots (\frac{1}{2})^2}{2\cdot(2\kappa)!\,\mu!}, \quad C_n = \frac{(n+\kappa-\frac{1}{2})^2\, C_{n-1}}{(n+2\kappa)(n+\mu)(\nu-n)\,n} \qquad (5.18)$$

の様にすれば計算に便利であろう。

2, 3 計算した値をあげれば

g	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	20
$R_{0,0}$	2.394486	1.658181	1.208406	.885611	.643353	.0252585
$R_{0,2}$	.004932	.011511	.015565	.014211	.005969	—

となる。此の中 $g=1.0$ 及び 0.2 では iii) 項の展開と比較して一致する事を確かめた。又 $g=20$ の値は iii) 項の展開によるものである。(5.18) の展開は g が大きくなると途中の項がすごく大きくなり、今20桁の容量で計算して、小数点以下5桁の精度をうるには $g \leq 8$ に止めるべきである様だ。

6. 高速の場合の近似解.

高速で $g \to 0$ の場合は (2.17)〜(2.19) に於て, K_{-1} 函数は

$$K_{-1}(gx,\infty) = P_1(gx,0) \underset{g\to 0}{\doteqdot} -\log\left(\frac{\gamma g x}{2}\right),$$

$$又 \quad P_1(gx,gt) \underset{g\to 0}{\doteqdot} -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\gamma g t}{4}\right),$$

$$故 \quad K_{-1}(gx,gt) \underset{g\to 0}{\doteqdot} \frac{1}{2}\log\left(\frac{t}{2\gamma g}\right) - \log x, \qquad (6.1)$$

となるが一方

$$\int_{-1}^{1} \frac{\log|x-\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi = -\pi \log 2 \qquad (6.2)$$

という積分があるので解は直ちに求まり η は次式の形となる。

$$\eta(x) = \alpha\Big/\sqrt{1-x^2}, \qquad (6.3)$$

そうすれば

$$\int_{-1}^{1}\eta(x)\,dx = \pi\alpha = \frac{\delta}{2t}, \quad \text{or} \quad \alpha = \frac{\delta}{2\pi t}, \qquad (6.4)$$

で

$$\Gamma(gx,\infty) = \frac{4g}{\pi}\int_{-1}^{1}\eta(\xi)\left\{\log\left(\frac{2}{\gamma g}\right) - \log|x-\xi|\right\}d\xi = 4g\alpha\log\left(\frac{4}{\gamma g}\right),$$

$$又 \quad \Gamma(gx,gt) = \frac{4g}{\pi}\int_{-1}^{1}\eta(\xi)\left\{\frac{1}{2}\log\left(\frac{t}{2\gamma g}\right) - \log|x-\xi|\right\}d\xi = 2g\alpha\log\left(\frac{2t}{\gamma g}\right), \qquad (6.5)$$

故に

$$\min.\left[R\Big/\rho g\left(\frac{\delta}{t}\right)\right]_{t=\infty} = \frac{g}{\pi}\left(\frac{\delta}{t}\right)\log\left(\frac{4}{\gamma g}\right),$$

$$\min.\left[R\big/\rho g\delta\right] = \frac{g\delta}{2\pi t^2}\log\left(\frac{2t}{\gamma g}\right), \qquad (6.6)$$

無限喫水の場合の解は S.Karp (前出) 等が得たものと同じである。

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

7. 低速の場合の近似解

低速の場合は g が非常に大きくて、フーリエ級数の項数を充分大きくとる事は計算も面倒であるし又実用上もかなり意味が薄くなると考えられる。

そこで仮に (4.1) で偶函数項のみとり

$$\gamma(-\cos\theta) \equiv \frac{\varphi(\theta)}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\sum_{n=0}^{N} a_{2n}\cos 2n\theta, \quad 2N<g, \quad \cdots (7.1)$$

とおくと、$R_{n,m}$ は大体 (5.5) 或いは (5.10) で与えられる事になる。

そのどちらの場合も結論は同じであるから簡単の為に以下無限水深の場合のみ扱う。

(5.10) を書き直せば

$$\left.\begin{aligned} R_{2n,2m} &\doteqdot I_0 - \frac{(m^2+n^2)}{g} I_1, \\ I_0 &= \frac{1}{2g}\left\{1 + \frac{2}{\pi}P_0(2g,0) + \frac{1}{2g\pi}P_1(2g,0)\right\}, \\ I_1 &= \frac{1}{\pi g}P_1(2g,0), \end{aligned}\right\} \cdots (7.2)$$

となって、I_0, I_1 は g について同じオーダーで且つ n, m に関係しない。

(4.6) 式に代入すれば

$$\sum_{n=0}^{N} a_{2n}\left(I_0 - \frac{n^2}{g}I_1\right) = \frac{\lambda}{4g}, \quad \sum_{n=0}^{N} a_{2n}\left(I_0 - \frac{m^2+n^2}{g}I_1\right) = 0, \quad \text{for } m \geq 1$$

となる。所が (7.1) から

$$\sum_{n=0}^{N} a_{2n} = \varphi(0), \quad \sum_{n=0}^{N} n^2 a_{2n} = -\frac{\varphi''(0)}{4}, \quad \cdots (7.3)$$

であるから上式は

$$\left.\begin{aligned} \left(I_0 - \frac{m^2}{g}I_1\right)\varphi(0) &= -\frac{I_1}{4g}\varphi''(0), \quad m \geq 1 \\ I_0\varphi(0) + \frac{I_1}{4g}\varphi''(0) &= \frac{\lambda}{4g}, \end{aligned}\right\} \cdots (7.4)$$

となって、此の上式は m のすべての値について満足する訳にはゆかない。 即ち元々此等の式は漸近式であるから、g のオーダーを考えに入れるべきで、今の場合先ず $(1/g)$ の項を

A4×100

無視してやれば，第1近似として

$$\varphi(0)=0, \quad \lambda=o(g), \quad \cdots\cdots \quad (7.5)$$

但し此の後の式は g のオーダーで零即ち高々 $(1/g)$ のオーダーの意味である。以下同様な記号を用いる。

第2近似は上式の条件に更に

$$\varphi''(0)=0, \quad \lambda=o(1), \quad \cdots\cdots \quad (7.6)$$

がつけかわる。

同様にして更に近似を進めれば

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^{(2n)}(0)=0, \quad \lambda=o\left(\frac{1}{g^{n-1}}\right), \quad n\geq 2, \\ &\text{で此の時} \quad R=o\left(\frac{1}{g^{n-2}}\right), \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (7.7)$$

となる。

(7.5), (7.6) 等の条件は一方で

$$\eta(x) \equiv \frac{\varphi(\theta)}{\sin\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} \frac{1}{\theta}\left\{\varphi(0)+\frac{\theta^2}{2}\varphi''(0)+\cdots\right\}$$

の様に展開してみると(7.5)は

$$\eta(-1)=0, \quad \cdots\cdots \quad (7.5')$$

となり更に

$$\frac{d}{dx}\eta(x)=\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\eta(-\cos\theta)=\frac{1}{\theta}\left\{\frac{\varphi''(0)}{2!}+\frac{3\theta^2}{4!}\varphi^{(4)}(0)+\cdots\right\}$$

であるから，(7.6)は

$$\left[\frac{d}{dx}\eta(x)\right]_{x=-1}=0, \quad \cdots\cdots \quad (7.6')$$

の様に書きかえられ，(7.7)は順次 η の逐次微係数が零になる事を意味し，抵抗を少くする為には前縁を尖らせればよいと云う直観的な，又理論的な考察と一致する。

此の様な操作を続けてゆく事は明らかに C_D がどんどん小さくなる事を意味するから，一方で g をどんどん大きくしてやると，低速の極限に於ける Optimum C_D は無限に小さいと云う様に考えられる。

又一方では(7.5'), (7.6')等の条件に従う函数は無限に多くあるから，此の意味では解は一種の不安定性を示すもの

と考えられる。

此の様な考察から，gの大きい時には(7.1)の$2N$をgよりも充分大きい所迄とっておく必要のある事が判る。

8. 結言

以上で大体造波抵抗の極小値問題をとく上に，注意すべき事項，及び概要を終る事にする。

まとめて見ると，結局3角級数展開による方法が割合便利な様に思われる。

此の他に此處では述べなかったがS. Karp (前出) 等の様に積分方程式を数値的にとく方法も考えられるが，此の方法も便利でもう少し改良検討の余地があるが，一方上の方法では$R_{n,m}$が計算出来るから，それによって任意の船型の造波抵抗の計算が出来る点で便利である。

我々の得た主な結論は，此の問題をとくに当り，C_b一定とする場合は数学的に解の不安定が生れる事，又三角級数の項数は常にgよりも充分大きくとるべき事等である。

此の事は例えば，$g=10(20)$ならばnを$10(20)$以上とる事になり高々$16\sim20$ $(30\sim40)$程度とればよかろうから偶函数のみ扱かえば$R_{n,m}$は$30\sim50$ $(100\sim20)$ヶ程度で最後の聯立方程式は$8\sim10$ $(15\sim20)$元程度で事足りると考えられる。

以上。