14-28

昭和48年8月27日

2次元半没垂直平板の造波抵抗について

別所正利

頁

昭和　年　月　日

1. 序

造波抵抗理論における現在の難点は その華やかな実用面への応用にも拘わらず今なお定量的には実験値とかけ離れた予測値しか与えない。

一方 同じ造波理論を応用した動揺問題では定性的にも定量的にもよく実験値を説明出来る。

この事から考えると現在の造波抵抗理論には特に水上船のそれには何か見落しがあるのではないかと疑われる。

この意味で水上船について従来から指摘されて来た line Integral の問題はもう一度よく検討されねばならないだろう。

さてこのような問題を考えて見るにはやはり解析的に解ける問題を解いて見るのが最も良い。

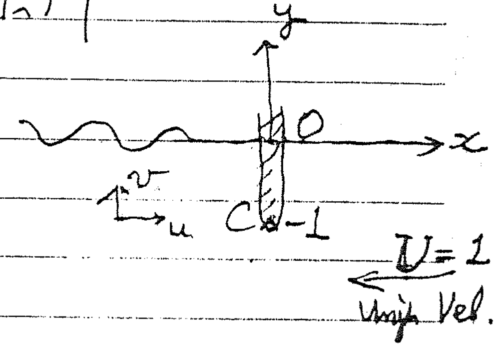
2次元垂直平板の問題は物理的にはあまり興味がないけれどこの意味では貴重な解が得られる。

著者は先にその解の一つを示したが今回は特に斉次解の存在を明らかにし、その選び方で種々の解がつくれる事を示した。

又力特に垂直力が数学的には存在する事を示しその種々の解との関連性を示した。

この解は数学的にまとまった形で与えられるので物理的には意味がないけれども、水上船の造波抵抗理論の没水体のそれとの相違、それは正に解が斉次解を持つと言う事、をよく示して来れる。

2. 速度ポテンシャルと境界条件
座標軸を図のようにとり、速度ポテンシャルを次のように導入する。



$$f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$$
$$\frac{df}{dz}=-u+iv \qquad (1)$$

境界条件は平板の上で

$$u=-\varphi_x(0,y)=1\ , \quad 0>y>-1\ , \quad \cdots (2)$$

水面では圧力一定の条件から

$$\varphi_x(x,0)+\gamma\,\zeta(x)=0\ , \quad \cdots \quad (3)$$
$$\gamma=g/U^2$$

又水面は一つの流線になっている事から、

$$\varphi_y(x,0)=-\psi_x(x,0)=-v=+\zeta_x(x)\ ,$$
つまり $$\psi(x,0)=-\zeta(x)\ , \qquad (4)$$

ここで補助関数を次のように導入すると、

$$X(z)=-\gamma f(z)-i\frac{d}{dz}f(z)\ , \quad \cdots (5)$$

(3)と(4)の水面条件は、

$$Im\{X(x)\}=0\ , \quad \cdots \quad (6)$$

又平板上では(2)によって

$$Im\{X(iy)\}=\gamma\psi(0,y)-\varphi_x(0,y)$$
$$=1-\gamma(y+\varepsilon)\ , \quad 0>y>-1, \qquad (7)$$

但し $$\psi(0,y)=-(y+\varepsilon), \qquad 0>y>-1$$

となるので $X(z)$ を求めれば(5)から $f(z)$ がすまる。

昭和　　年　　月　　日

即ち

$$f(z)=ie^{-i\gamma z}\int_{+\infty}^{z}X(t)e^{i\gamma t}dt, \quad \cdots (8)$$

$|z|\gg 1$ では　$y\to 0$, $x\to -\infty$ の近くを除いて

$$f(z)\longrightarrow \frac{1}{\gamma}X(z)+\cdots, \quad \cdots (9)$$

$x\to -\infty$ では (8) は

$$f(z)=H(\gamma)e^{-i\gamma z}+ie^{-i\gamma z}\int_{-\infty}^{z}X(t)e^{i\gamma t}dt, \quad (10)$$

$$H(\gamma)=-i\oint X(z)e^{i\gamma z}dz, \quad \cdots (11)$$

と書けるから

$$f(z)\xrightarrow[x\ll -1]{y\to 0} H(\gamma)e^{-i\gamma z}+\frac{1}{\gamma}X(z)+\cdots, \quad (12)$$

となる。

今の場合は以上の解法が便利であるが、以下に普通によく用られる特異点を使う方法と比較して見よう。

まず (6) 式を満たす $X(z)$ は doublet σ によって次のように表わされよう。

$$X(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sigma(\eta)}{z-i\eta}d\eta, \quad (\;)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}\sigma(\eta)\left(\frac{1}{z-i\eta}+\frac{1}{z+i\eta}\right)d\eta, \quad \cdots (13)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} &X(+0+iy)-X(-0+iy)=-\sigma(y),\\ &\sigma(y)=\sigma(-y), \end{aligned}\right\}\quad (14)$$

である。

今 $\sigma(y) = \frac{d}{dy}m(y) - \gamma m(y),\quad m(-1)=0, \quad \cdots (15)$

なる $m(y)$ を導入すると、部分積分によって(8)から

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0} m(\eta)\left(\frac{1}{z-i\eta} - \frac{1}{z+i\eta}\right)d\eta$$

$$+\frac{\gamma}{\pi i}\int_{-1}^{0} m(\eta)\,S\{\gamma(z+i\eta)\}d\eta + \frac{i}{\pi}m(0)\,S(\gamma z), \quad \cdots (16)$$

たゞし

$$S(\gamma z) = \lim_{\mu\to+0}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-ikz}dk}{k-\gamma-\mu i}, \quad \cdots (17)$$

を得る。

これは水面下に doublet m がある時の速度ポテンシャルの表現であるが右辺第3項は平板が水面を切っている為に存在する項である。つまり水面に没していれば $m(0)=0$ としなければならない。

(15)の解は

$$m(y) = e^{\gamma y}\int_{-1}^{y}\sigma(u)e^{-\gamma u}du, \quad \cdots (18)$$

であるから

$$\bar{H}(k) = \int_{-1}^{0} m(\eta)e^{k\eta}d\eta, \quad \cdots (19)$$

とおくと

$$\left.\begin{aligned} H(k) &= -i\oint \chi(z)e^{ikz}dz = -\int_{-1}^{1}\sigma(y)e^{-k|y|}dy \\ &= H^{+}(k) + H^{-}(k), \\ H^{\pm}(k) &= -\int_{-1}^{0}\sigma(\eta)e^{\pm k\eta}d\eta, \end{aligned}\right\} (20)$$

であるから

$$\bar{H}(k) = \frac{1}{k+\gamma}\{H^{+}(k) - H^{-}(\gamma)\}, \quad \cdots (21)$$

又

$$m(0) = \int_{-1}^{0}\sigma(y)e^{-\gamma y}dy = -H^{-}(\gamma), \quad \cdots (22)$$

であるから(16)式は又，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}\frac{m(\eta)}{z-i\eta}d\eta-\frac{i}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{H^{+}(k)+H^{-}(\gamma)}{k-\gamma-\mu i}e^{-ikz}dk; \quad (23)$$

但し
$$\frac{H^{+}(k)+H^{-}(\gamma)}{2(k-\gamma)}=\frac{1}{2}\bar{H}(k)+\frac{\gamma\bar{H}(k)-m(0)}{k-\gamma}, \quad (24)$$

$$\frac{1}{2}\{H^{+}(k)+H^{-}(\gamma)\}\xrightarrow[k\to\gamma]{} H(\gamma), \quad \cdots (25)$$

と表わせる。

昭和　年　月　日

3. 解.

今 $z = \frac{1}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})$, - - - - (1)

とおくと (6), (7) の条件を満たす解は容易に見つかって

$$\left.\begin{array}{l} X_0(z) = 2/(\zeta + \frac{1}{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \\ \mathrm{Im}\{X_0\} = 0 \quad , \text{ on } C \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1(z) = \frac{1}{\zeta}, \\ \mathrm{Im}\{X_1\} = -y \quad \text{on } C \end{array}\right\} \quad \cdots (3)$$

$$X_2(z) = \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right),$$

$$\mathrm{Im}\{X_2\} = 1 = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{(2n+1)}, \quad \zeta = e^{i\theta}, \ 0 > \theta > -\pi \quad (4)$$

これらから速度ポテンシャルは

$$\left.\begin{array}{l} f_j(z) = i e^{-i\gamma z} \int_{+\infty}^{z} X_j(t) e^{i\gamma t} dt, \\ \text{あるいは} \quad f_j(z) = A_j e^{-i\gamma z} + i e^{-i\gamma z} \int_{-\infty}^{z} X_j(t) e^{i\gamma t} dt, \end{array}\right\} j = 0, 1, 2, \cdots (5)$$

但し $A_j = -i \oint X_j(z) e^{i\gamma z} dz$, - - - - (6)

今 $B_j = f_j(+0) = -i \int_0^{\infty} X_j(t) e^{i\gamma t} dt$, - - - (7)

とおくと $X_j(-x) = -X_j(x) = -\overline{X_j(x)}$, - - - (8)

であるから (5) の第2式によって、

$$f_j(-x) = A_j e^{+i\gamma x} + i e^{i\gamma x} \int_{\infty}^{x} X_j(x') e^{-i\gamma x'} dx'$$
$$= A_j e^{i\gamma x} - \overline{f_j(x)}, \quad - - - (9)$$

昭和　年　月　日

特に　$f(-0) = A_j - \overline{f_j(+0)} = A_j - \overline{B_j}$, ...(10)

これらの解は C 上では $\zeta = e^{i\theta}$ $(0>\theta>\pi)$ とおくと

$$
\left.\begin{aligned}
f_j &= \varphi_j + i\psi_j ,\\
\varphi_j &= B_{jr} e^{\gamma\sin\theta} - e^{\gamma\sin\theta}\int_0^\theta X_{jr}(\theta') e^{-\gamma\sin\theta'}\cos\theta'\,d\theta'\\
\psi_j &= B_{ji} e^{\gamma\sin\theta} - e^{\gamma\sin\theta}\int_0^\theta X_{ji}(\theta') e^{-\gamma\sin\theta'}\cos\theta'\,d\theta'
\end{aligned}\right\} (11)
$$

但し $B_j = B_{jr} + iB_{ji}$

又

$$
\left.\begin{aligned}
X_{jr} + iX_{ji} &= X_j ,\\
X_{0r} + iX_{0i} &= 1/\cos\theta ,\\
X_{1r} + iX_{1i} &= \cos\theta - i\sin\theta ,\\
X_{2r} + iX_{2i} &= \frac{2}{\pi}\log\left|\cot\frac{\theta}{2}\right| + i ,
\end{aligned}\right\} (12)
$$

であるから

$$
\left.\begin{aligned}
\psi_0 &= B_{0i} e^{\gamma\sin\theta} ,\\
\psi_1 &= -\frac{1}{\gamma^2} - \frac{\sin\theta}{\gamma} + \left(\frac{1}{\gamma^2} + B_{1i}\right) e^{\gamma\sin\theta} ,\\
\psi_2 &= \frac{1}{\gamma} + \left(B_{2i} - \frac{1}{\gamma}\right) e^{\gamma\sin\theta} ,
\end{aligned}\right\} (13)
$$

となる。

これらの基本解を組合せてまず

$$
\left.\begin{aligned}
F_\alpha(z) &= \Phi_\alpha + i\Psi_\alpha = -f_0(z)/B_{0i}\\
F_1(z) &= \Phi_1 + i\Psi_1 = \gamma f_1(z) + \gamma\lambda f_0(z) ,\\
F_2(z) &= \Phi_2 + i\Psi_2 = \gamma f_2(z) + \gamma\mu f_0(z) ,
\end{aligned}\right\} (14)
$$

$\gamma\beta$

一般には　$f(z) = F_1 + \alpha F_2 = \gamma f_1 + \gamma\alpha f_2 + (\gamma\lambda + \gamma\mu\alpha) f_0$

但し　$\lambda = \dfrac{B_{1i}+\frac{1}{\gamma^2}}{-B_{0i}}$, $\mu = \dfrac{B_{2i}-\frac{1}{\gamma}}{-B_{0i}}$, ・・・(15)

とおくと

$$\left.\begin{aligned} \Psi_d &= -e^{\gamma y}, \\ \Psi_1 &= -y-\frac{1}{\gamma}, \\ \Psi_2 &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (16)$$

となる。

境界条件は §1.(7)のように

$$\psi = -y-\varepsilon, \quad \varepsilon; 任意定数, \quad (17)$$

とすべきであるから解は最終的に

$$f(z) = F_1(z) + \left(\frac{1}{\gamma}-\varepsilon\right)F_2(z), \quad \cdots (18)$$

と与えられ　その時原点における水面上昇は

$$-\eta(0) = \psi(0,0) = -\varepsilon, \quad \cdots\cdots (19)$$

でこれは板の前後で同じである。

なお F_d は振動問題との類推から散乱ポテンシャルと呼んでおこう。

さて ε は任意であるからこの分だけ解は不定となる。

なお

$$F_j(z) \xrightarrow[x\to\infty]{} H_j(\gamma)e^{-i\gamma z}+\cdots, \quad j=d,1,2, \quad (20)$$

のように $H_j(\gamma)$ を定義しておく。

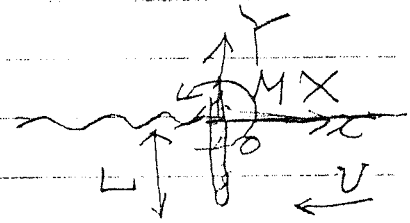
又(18)は、f_γを使えば

$$f(z) = \gamma f_1(z) + \gamma\alpha f_2(z) + \gamma\beta f_0(z), \quad \cdots (21)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{1}{\gamma} - \varepsilon\right), \\ \beta &= \lambda + \mu\alpha, \end{aligned}\right\} \quad \cdots (22)$$

ともかける。

4. 力とモーメント



先づ造波抵抗は後流の波振幅で決まる。

§2 (12) より

$$\eta(x) \xrightarrow[x \ll -1]{} H(\gamma)\sin\gamma x + \cdots, \qquad \cdots (1)$$

であるから造波抵抗 R_w は、

$$\left.\begin{aligned} R_w &= \frac{\rho g}{4} H^2(\gamma), \\ \frac{R_w}{\rho L U^2} &= \frac{\gamma}{4} H^2(\gamma), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

と与えられる。

§3節で考えた解では原点の近くで垂直速度 v が高々対数的に無限大となるだけなので滑走板の時のような飛沫抵抗は現われない。

これを確めるには圧力積分又は Blasius の公式で力を求めればよい。

$$X - iY = \frac{\rho i}{2}\int_C \left(1+\frac{df}{dz}\right)^2 dz, \qquad (3)$$

$$M = -\mathcal{R}e\,\frac{\rho}{2}\int_C \left(1+\frac{df}{dz}\right)^2 z\,dz, \qquad (4)$$

そうすると附録Bに見るように実際

$$X = -R_w, \qquad (5)$$

となっている事がわかり、又

$$\frac{Y}{\rho} = \alpha\gamma(1-\gamma)\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha + \pi\beta\right) - \frac{\pi}{2}\gamma^2\beta^2, \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{M}{\rho} &= -\frac{1}{8}H^2(\gamma) + \frac{1}{2}H(\gamma)\{\gamma G(\gamma) + \varphi(0)\}, \\ M/R_w &= -\frac{1}{2\gamma} + \frac{2}{\gamma}\{\gamma G(\gamma) + \varphi(0)\}/H(\gamma), \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ここで垂直平板に垂直力が働らくのは奇妙であるが
これは平板翼の edge suction と同じであって、
無限流体中の流れに垂直な平板の半分に働らく
力は

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)$$

とおくと

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - z, \quad 1 + \frac{df}{dz} = \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1}, \qquad (8)$$

であるから

$$X - iY = \frac{\rho i}{4}\int_c \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta$$

$$= \frac{\rho i}{4}\int_c \left[1 + \frac{1}{\zeta^2} - \frac{4}{\zeta^2 + 1}\right] d\zeta = \frac{\pi}{2}\rho i, \quad \cdots (9)$$

$$\therefore \quad X = 0, \quad Y = -\frac{\pi}{2}\rho,$$

となる。

さて今の場合附録で示すように Y は

$$Y = Y^{(0)} + Y^{(1)}, \quad \cdots\cdots (10)$$

$$Y^{(0)} = -\rho\left[\varphi(+0) - \varphi(-0)\right] = \rho\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x, 0)\,dx$$

$$= -\rho g\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x)\,dx, \quad \cdots\cdots (11).$$

とかけ $Y^{(1)}$ は 2次の order であるから線型理論の立場では $Y^{(0)}$ の項のみを採るべきである。

しかし実際にはこの項は $Y^{(1)}$ の中の項と互いに打消しあい (6) の形になる。

又 (11) 式から没水体つまり水面において φ が jump しないならばこの項はなくなる。

従って

$$\varphi(+0) = \varphi(-0), \quad \cdots\cdots (12)$$

は平板の上縁が水面に近づいた極限
つまり没水平板の条件と考えられよう。

最後に(11)式の形は水面の変化容積に水の比重量をかけたものが力に等しい，つまり静力学のアルキメデスの原理を表わしている。

所が没水体ではこれが0になるとするとこの原理は没水体では成立たないように見える。

しかしこれは見掛け上の問題で，今の場合でもこの項は第2の項の成分と打消しあっていて外には出て来ない。

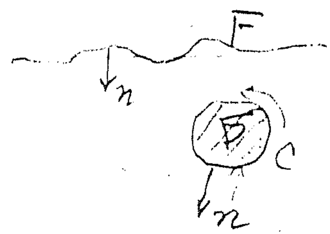
このような面をよく理解するにはやはり非線型性をも考えた力を考えて見る必要があろう。

さてベルヌーイの定理から

$$\frac{p}{\rho} + \varphi_x + \frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2) + gy = 0 \quad , \quad \cdots\cdots (13)$$

物体に働らく~~垂~~直力 Y は

$$Y = -\int_C p \frac{\partial y}{\partial n} ds \quad , \quad \cdots\cdots (14)$$



によって与えられる。

水面では圧力一定(0)であるから

$$\varphi_x(x,\eta) + \frac{1}{2}\{\varphi_x^2(x,\eta) + \varphi_y^2(x,\eta)\} + g\eta(x) = 0, \quad (15)$$

が成立ち又(14)は

$$Y = -\int_{C+F} p \frac{\partial y}{\partial n} ds \quad , \quad \cdots\cdots \quad (16)$$

と書ける。

又 C, F の上で φ は境界条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n}, \quad \cdots\cdots (17)$$

を満足しているものとする。

さて

$$\int_{C+F}\left[\varphi_x + \frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\right] y_n \, ds =$$

$$= \int_{C+F}\left[\varphi_x y_n - \varphi_y x_n\right] ds + \int_{C+F}\left[\frac{1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2) y_n - \varphi_y \varphi_n\right] ds = 0, \quad (18)$$

この右辺の積分は φ が無限遠方で波の項を除いて正則であるとするとグリーンの定理によって0になる。

よって、(13)の残りの項は、

$$Y = \rho g \int_{C+F} y \frac{\partial y}{\partial n} ds = \rho g \int_C y \frac{\partial y}{\partial n} ds - \rho g \int_F \eta(x) dx,$$

$$= \rho g \nabla - \rho g \int_F \eta(x) dx, \quad \cdots (19)$$

ここに

$$\nabla = \int_C y \frac{\partial y}{\partial n} ds = \iint_D dx dy \quad \cdots\cdots (20)$$

は排水容積である。

この誘導では没水体でも浮体でも又3次元でも変わる所がないので一般的に成立つ、これはアルキメデスの原理が一様流れのある場合も水面の変化容積まで考えれば成立つ事になる事を示している。

この事から考えると(19)の線型化としてはYとして(11)をとればよい事になるがこれは前に見たように没水体では具合が悪るい。

この原因は水面条件の線型化にあって力としてはやはり(14)式で計算した方がよい。

この事から Y はやはり抵抗と同じように second order のものである事がよくわかり，特に浮体の場合はその為に幾分の不明点が残つて来る。

即ち (19) の右辺第2項で (15) 式の2次の項までとると

$$\rho\int_F \left[\varphi_x(x,0)+\eta(x)\varphi_{xy}(x,0)+\frac{1}{2}\left(\varphi_x^2(x,0)+\varphi_y^2(x,0)\right)\right]dx, \qquad (21)$$

となるが線型理論では

$$\varphi_x(x,0)=\nu\eta(x), \quad \varphi_y(x,0)=\eta_x(x)$$

であるから

$$\int_F \eta(x)\varphi_{xy}\,dx = [\eta\eta_x]-\int_F \varphi_y^2\,dx$$

ここに $[\eta\eta_x]$ は浮体の前後の値の差を示す。

よつて (18) 式から

$$(21)=\rho\int_C\left[\varphi_x+\frac{1}{2}\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2\right)\right]y_n\,ds+\rho[\eta\eta_x], \qquad (22)$$

となつて浮力も合せて

$$Y=-\rho\int_C p\,y_n\,ds+\rho[\eta\eta_x], \qquad (23)$$

となり右辺第2項だけ余計になつて来る。

しかしこの時の C は x 軸以下の部分をとるべきであるから これは浸水面の変化による誤差と見なしてもよかろう。

いづれにしても (19) から誘導すると その点だけあいまいになるので やはり力の公式としては (14) 式をとるのが賢明であろう。

5. いろいろな解

§3の解の内 $F_2(z)$ は

$$\frac{\partial}{\partial n}\Phi_2 = 0 \quad , \qquad\qquad (1)$$

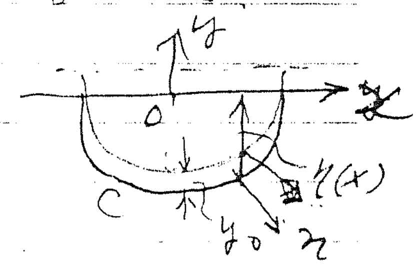
となるので普通は出て来ないものであるが自由表面がある為に恒等的に0でないものがあるのである。

このような解は常数倍して足しても引いても法線成分速度は変らないので以下斉次解とよぼう。

しかしこれは物理的にはどういう事であろうか。

今

$$y = \eta(x), \qquad (2)$$



で与えられる物体表面Cがあるとしよう。

境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi(x,\eta) = \frac{\partial \chi}{\partial n}(x,\eta), \qquad (3)$$

である。

Cが平行に y_0 だけ上方にずれると表面の方程式は

$$y = y_0 + \eta(x), \qquad (4)$$

となるが法線の方向余弦は変らないから新しい表面に対する境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi(x, y_0+\eta) = \frac{\partial \chi}{\partial n}(x, y_0+\eta) = \frac{\partial \chi}{\partial n}(x,\eta), \quad (5)$$

となり，近似的に

$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi(x,\eta) \fallingdotseq \frac{\partial \chi}{\partial n}(x,\eta) - y_0 \frac{\partial}{\partial n}\varphi_y(x,\eta), \quad (6)$$

とかける。

右辺第2項は高次の項であるから省略出来るとすると，この物体の移動によるポテンシャルは境界条件(1)を満たさねばな

(トリムの増分はトリム前の物体前部傾斜が変る)

ならない。

つまり§3の斉次解εは物体の僅かな上下平行移動によるポテンシャルと考えられる。

又その上方移動量は

$$\eta = -y - \varepsilon$$

とする時は ε であると考えられる。

この事は水面上の圧力分布を考える場合は線型的に統合されているのでよくわかる。

さて斉次解の意味はそういうものであるとしてそれはどのように決められるであろうか。

圧力分布で表わされる滑走板の場合は後端における Kutta の流出条件で決められたが、排水量型の船ではそのような便利なものはない。

しかし一方一般に物体には垂直力が働らくので上下位置を一定に保つにはそれに平衡する外力を加えなければならない。

この垂直力は勿論斉次解によって変わるから これが外力と平衡するように斉次解を決めればよい。

さてこのような物理的な意味を念頭において以下いろいろな場合を考えて見よう。

i) $\alpha = 0$, $f(z) = F_1(z)$, ... (17)

この場合

$$\eta(0) = \varepsilon = \frac{1}{\gamma} = \frac{U^2}{g} \quad , \ . \ . \ . \ . \ (18)$$

であるが $\eta(x)$ は速度水頭 $U^2/2g$ 以上にはあがり得ないのでこれは線型理論による矛盾である。つまりこれは砕波を意味していると考えられる。

この考察から

$$\frac{1}{\gamma} > \varepsilon > -\frac{1}{\gamma} \quad , \ . \ . \ . \ (19)$$

と考えてよかろう。

この時

$$Y = -\frac{\pi}{2}\rho\delta^2\lambda^2, \qquad (10)$$

で常に負である。

ii)

$$\alpha_s = -[\Phi_1]^{1}/[\Phi_2]^{1}, \qquad (11)$$

とおくと．$\varphi(+0) = \varphi(-0)$ となって速度ポテンシャルに不連続がないのでこれは板の上端を水が流れている，つまり没水体の上限と考えられる。

iii)

$$Y = 0 \qquad (12)$$

つまり垂直力がなくなるように $\alpha = \alpha_{Y0}$ を決める方法でこれが垂直外力のない場合の平衡状態と考えられる。

排水量を有する物体では右辺に静的浮力の変化項が来る。

iv)

$$H(\delta) = 0, \qquad (13)$$

つまり後縁波が 0 になるように $\alpha = \alpha_m$ を決める事も出来よう。

$$\alpha_m = -H_1/H_2, \qquad (14)$$

v)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}Y = 0, \quad Y_{max} \qquad (15)$$

にする α_{Ymax}.

vi)

$$\varepsilon = 0, \qquad (16)$$

つまり $\alpha = 1/\delta$,

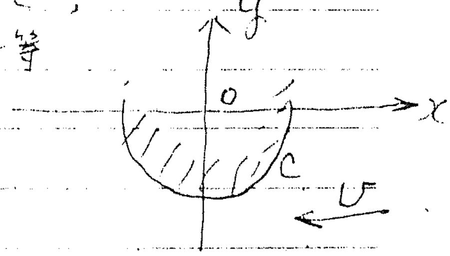
これらの解に対する造波抵抗、垂直力、モーメントの値を表に示す。
このように全く千差万別でとりとめがないが、(ii),(iii),(iv),(v)あたりが値も適当であって実際的な解のように見える。
力学的に考えれば垂直力がある事は水に垂直方向の運動量を加える(あるいは差引く)事であるからこれが変れば水の運動が変り従って造波抵抗が変るのも当然と考えられる。
没水体の場合は物体の位置が定まればその垂直力も定まるが、水上船の場合は線型理論では斉次解が出て一義的に定まらない。
この間の関係を附録Dに示す。
従ってその斉次解は力学的には垂直力が与えられたものに等しいようにとるのが妥当であろう。

解の極限値等は附録Cに示す。

6. 積分定理

定常流れの場合も花岡の所謂 Reverse Flow Theorem が成立ち、それから幾つかの有用な関係が導かれる。

準備として Reverse flow Potential を導入しておこう。暫らくは右図のような物体を考える事にし、今流れの向きを逆にした時のポテンシャル等を(～)をつけて表す事にしよう。



水面条件は $\nu = g/U^2$ であるから U の正負によって変らず

$$\tilde{X}(z) = \nu \tilde{f}(z) - i\frac{d}{dz}\tilde{f}(z), \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

なる関数を導入すれば、

$$\mathrm{Im}\{\tilde{X}(x)\} = 0, \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

となるが物体表面上では流れが逆向きなら

とすれば

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x,y)\big|_c &= -(y+\varepsilon), \\ \tilde{\Psi}(x,y)\big|_c &= y+\varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \Psi(x,y) = -\tilde{\Psi}(x,y), \text{ on } C, \quad (3)$$

となる。

もし $\tilde{X}(z)$ がわかっていれば (1) より上流側に波のない解は

$$\tilde{f}(z) = i e^{-i\nu z}\int_{-\infty}^{z} \tilde{X}(t) e^{i\nu t}\,dt, \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

と与えられる。一方

$$f(z) = i e^{-i\nu z}\int_{+\infty}^{z} X(t) e^{i\nu t}\,dt,$$

であり、又

$$f(z) = H(\nu)e^{-i\nu z} + i e^{-i\nu z}\int_{-\infty}^{z} X(t) e^{i\nu t}\,dt,$$

であるから今

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Im}\left\{\tilde{f}_{ds}(z) + e^{-i\nu z}\right\}\Big|_C &= 0, \\ \mathrm{Im}\left\{\tilde{f}_{de}(z)\right\} + \mathrm{Re}\left\{e^{-i\nu z}\right\}\Big|_C &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

によって散乱ポテンシャルを導入し

$$F(z) = f(z) + H_s(\gamma)\tilde f_{dc}(z) - H_c(\gamma)\tilde f_{ds}(z) - H(\gamma)e^{-i\gamma z}$$

$$= f(z) - H_c(\gamma)\{\tilde f_{ds} + e^{-i\gamma z}\} - H_s(\gamma)\{\tilde f_{dc} + ie^{-i\gamma z}\}, \quad (6)$$

但し　$H(\gamma) = H_c(\gamma) + iH_s(\gamma)$,　H_c, H_s real,　(7)

なる関数を考えると(3)と(5)の定義式により

$$l\{F(z)\} = -(y+z), \quad (8)$$

又 $F(z)$ は左半面で正則で特異点がない。

従って

$$F(z) + \tilde f(z)$$

なる関数は C 上でその虚部は 0 になり水面条件を満足し左の無限遠点で正則であるので恒等的に0になるであろう。

即ち

$$\tilde f(z) = -F(z) = -f(z) + H(\gamma)e^{-i\gamma z}$$
$$+ H_c\tilde f_{ds}(z) + H_s\tilde f_{dc}(z), \quad (9)$$

(4)から $x\to+\infty$ で

$$\begin{aligned} \tilde f(z) &\to \tilde H(\gamma)e^{-i\gamma z} + \frac{\tilde X}{\gamma}(z) \\ \text{同様に}\quad \tilde f_{dc}(z) &\to \tilde H_{dc}e^{-i\gamma z} + \frac{1}{\gamma}\tilde X_{dc} \\ \tilde f_{ds}(z) &\to \tilde H_{ds}e^{-i\gamma z} + \frac{1}{\gamma}X_{ds} \end{aligned} \quad (10)$$

となるから(9)より $x\to+\infty$ で考えて

$$\tilde H(\gamma) = +H(\gamma) + H_c(\gamma)\tilde H_{ds}(\gamma) + H_s(\gamma)\tilde H_{dc}(\gamma) \quad (11)$$

同様にして

$$\left.\begin{aligned} \tilde H_{dc} &= H_{dc} + H_{dcc}\tilde H_{ds} + H_{dcs}\tilde H_{dc}, \\ \tilde H_{ds} &= H_{ds} + H_{dsc}\tilde H_{ds} + H_{dss}\tilde H_{dc}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

同じ事を $\tilde{f}$ について繰返せば

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\left\{ f_{ds}(z) - e^{-i\sigma z} \right\} = 0 \\
&\mathrm{I}\left\{ f_{dc}(z) - i e^{-i\sigma z} \right\} = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (13)
$$

とおいて

$$
\tilde{F}(z) = \tilde{f}(z) + \tilde{H}_c \left\{ f_{ds} - e^{-i\sigma z} \right\} + \tilde{H}_s \left\{ f_{dc} - i e^{-i\sigma z} \right\}
$$

$$
= - f(z) \qquad (14)
$$

を得るから 波の関係は

$$
+H(\gamma) = +\tilde{H}(\gamma) - \tilde{H}_c H_{ds} - \tilde{H}_s H_{dc} \qquad (15)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
H_{dc} &= \tilde{H}_{dc} - \tilde{H}_{dcc} H_{ds} - \tilde{H}_{dcs} H_{dc}, \\
H_{ds} &= \tilde{H}_{ds} - \tilde{H}_{dsc} H_{ds} - \tilde{H}_{dss} H_{dc},
\end{aligned}
\right\} \qquad (16)
$$

(12), (16) から H_{dc} と H_{ds} の関係が、(11) と (15) から $H_{dc,s}$ と H との関係が導かれる。

物体が前後対称ならば 波も ψ と $\bar{\psi}$ で対称になる事から

$$
\tilde{H}(\gamma) = \overline{H(\gamma)} \qquad (17)
$$

となるからこれ等の関係から

$$
\left.
\begin{aligned}
H_{dcs} &= - H_{dsc}, \\
H_{dcs} / H_{dcc} &= H_{dss} / H_{dsc}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (18)
$$

(11) 又は (15) から

$$
\left.
\begin{aligned}
H_s(\gamma) \left\{ 2 - H_{dcs}(\gamma) \right\} &= - H_c(\gamma) H_{dss}(\gamma) \\
H_c(\gamma) H_{dsc}(\gamma) &= H_s(\gamma) H_{dcc}(\gamma)
\end{aligned}
\right\}
$$

昭和　　年　　月　　日

あるいは
$$\left.\begin{aligned} H_s(\sigma)/H_c(\sigma) &= -H_{dcs}(\sigma)/H_{dcc}(\sigma), \\ \{2+H_{dsc}(\sigma)\}H_{dsc}(\sigma) &= H^2_{dss}(\sigma), \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

なる関係が得られ一般に H の実部と虚部の比は diffraction potential によって与えられる事がわかる。
動揺問題ではこれらの関係は積分定理から導かれたが、この場合も議論可能である。
なお垂直平板の場合は H はまた実部のみから成立っているので上の関係は無意味である。

少し前置きが長すぎたが積分定理は次のように（グリーンの定理によって）与えられる

$$\left.\begin{aligned} &\int_{C+F}\left(\varphi_1\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial n} - \tilde{\varphi}_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)ds = 0, \\ \text{あるいは}\quad &\int_{C+F}\left(\psi_1\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_2\frac{\partial}{\partial n}\psi_1\right)ds = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots (20)$$

φ を使うと前方離れた点では line integral が表われるが ψ では水面条件から

$$\int_C \psi_1\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\psi}_2\, ds = \int_C \tilde{\psi}_2\frac{\partial}{\partial n}\psi_1\, ds, \quad (21)$$

これは部分積分によって

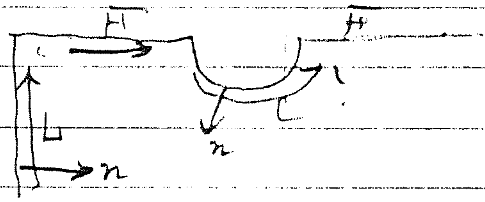
$$[\psi_1\tilde{\varphi}_2] - \int_C \tilde{\varphi}_2\frac{\partial}{\partial n}\varphi_1\, ds = [\tilde{\varphi}_2\varphi_1] - \int \varphi_1\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\varphi}_2\, ds$$

となる。
以後は ψ による形式を扱う事にする。
次に(20)において reverse flow を使わなければ無限後流の項による項が表われて

$$\psi_1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} \mathrm{Im}\left[H e^{\nu y - i\nu x}\right]$$

であるから L上の積分は.

$$\int_L \left(\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x}\varphi_2 - \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x}\varphi_1\right) dy$$



$$= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Im}\{H_1 e^{-i\gamma x}\}\,\mathrm{Im}\{-iH_2 e^{-i\gamma x}\}$$
$$- \mathrm{Im}\{-iH_1 e^{-i\gamma x}\}\,\mathrm{Im}\{H_2 e^{-i\gamma x}\}\Big]$$

今　$H_1 = |H_1| e^{i\delta_1}$, $H_2 = |H_2| e^{i\delta_2}$ とおくと

$$= \frac{1}{2}|H_1||H_2| \sin(\gamma x-\delta_1)\cos(\gamma x - \delta_2)$$
$$- \frac{1}{2}|H_1||H_2|\cos(\gamma x-\delta_1)\sin(\gamma x-\delta_2)$$
$$= \frac{1}{2}|H_1||H_2|\sin(\delta_2-\delta_1)$$

となるから

$$\int_C \left(\varphi_1 \frac{\partial}{\partial n}\varphi_2 - \varphi_2\frac{\partial}{\partial n}\varphi_1\right) ds = -\frac{1}{2}|H_1||H_2|\sin(\delta_2-\delta_1), \quad \text{---}(22)$$

なる関係を得る。
(21)と(22)が積分定理であってこれらから幾つかの有用な関係式が得られる。
有名なHaskindの関係は、(5)から

$$\left.\begin{aligned}\tilde\varphi_d &\equiv \tilde\varphi_{dc} + i\tilde\varphi_{ds}\\ \tilde\varphi_d\big|_c &= -e^{-i\gamma z}\end{aligned}\right\} \quad \text{---}(23)$$

とおき、(21)の φ_2 に入れると

$$\int_C \varphi \frac{\partial}{\partial n}\tilde\varphi_d\, ds + \int_C e^{-i\gamma z}\frac{\partial}{\partial n}\varphi\, ds = 0. \quad (24)$$

となり一方(22)において

$$f_2(z) = e^{-i\gamma z}, \quad \varphi_2(x,y) = \mathrm{Im}(e^{-i\gamma z}),$$
$$f_2(z) = i e^{-i\gamma z}, \quad \varphi_2 = \mathrm{Re}(e^{-i\gamma z}),$$

とおいて辺々相加えると，

$$-\int_C\left\{\psi\frac{\partial}{\partial n}(e^{\gamma y}\sin\gamma x)-\frac{\partial\psi}{\partial n}e^{\gamma y}\sin\gamma x\right)ds=\frac{1}{2}|H_1|\sin\delta_1$$

$$+\int_C\left\{\psi\frac{\partial}{\partial n}(e^{\gamma y}\cos\gamma x)-\frac{\partial\psi}{\partial n}(e^{\gamma y}\cos\gamma x)\right\}ds=-\frac{1}{2}|H_1|\cos\delta_1$$

$$\int_C\left(\psi\frac{\partial}{\partial n}e^{-i\gamma z}-\frac{\partial\psi}{\partial n}e^{-i\gamma z}\right)ds=-\frac{i}{2}\overline{H_1(\gamma)},$$

$$\text{or}\quad\int_C\left(\psi\frac{\partial}{\partial n}e^{i\gamma z}-\frac{\partial\psi}{\partial n}e^{i\gamma z}\right)ds=-\frac{1}{2}H_1(\gamma),\qquad\cdots(25)$$

(24)と(25)の第1式を辺々加え合せると，

$$\frac{1}{2}\overline{H(\gamma)}=-\int_C\psi\frac{\partial}{\partial n}\{e^{-i\gamma z}+\tilde{\psi}_d\}ds\quad\cdots\cdots$$

$$=\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}e^{-i\gamma z}-\psi\frac{\partial}{\partial n}e^{-i\gamma z}\right)ds,\quad\cdots(26)$$

を得る。

即ち散乱ポテンシャルが判れば波の振幅がわかる。

しかし動揺問題の場合程有用な関係はあまり見当らない。

最後に L 上の積分は振動するので平均において0となる

$$\int_C\psi\frac{\partial}{\partial n}\psi ds=\int_{C+H}\psi\frac{\partial}{\partial n}\psi ds-\int_H\psi\frac{\partial}{\partial n}\psi ds$$

$$=-\iint_D(\nabla\psi)^2dxdy+\gamma\int_H\psi^2dx=2(V-T),\quad\cdots(27)$$

となりラグランジャンである。

昭和　　年　　月　　日

7. 結び

2次元半没垂直平板の問題を解いて次の結論を得た。

i) 斉次解がある。

ii) それは僅かな吃水の変化に対応していると考えられる。

iii) 平板翼の理論における先端吸引力と同様に垂直力が存在する。

iv) それは斉次解のとり方で変動する。

v) 造波抵抗も勿論斉次解のとり方で変る。

vi) 垂直力が働らく事は水に垂直方向の運動量変化を与える事であるから、力学的に考えた場合、系の運動が定まるためには垂直力を指定しなければならない。
この垂直力を指定すれば解は今の場合ないかもしくは二つに定まる。

vii) Line Integral (3次元での) に、今の場合点のポテンシャルの値の貢献は極めて大きく無視出来ない。

viii) 従来の鏡像近似解はこの Line Integral に対応する項を含まない事、diffraction を考えていない事、そして斉次解への考慮がない事の為に全く無力である。

ix) 全没垂直平板の場合は circulation を考えなければ解は一つである。

この他に派生的に2次元における Reverse flow とその性質、積分定理を示し、又静的浮力に関するアルキメデスの原理が定常流れの場合も水面変化を考えれば成立つ事を示した。

昭和　年　月　日

参照文献

1. 別所, 北野; 防大理工学研究報告(理工学編) 第1巻第1号 昭和38年3月
2. M. Bessho; Mem. Defense Academy, vol. 6, No. 4 March, 1967, (Boundary Value Pro. Com.)
3. M. Bessho, K. Nomura; M. D. A. vol. 10, No. 1, June 1970
4. M. Abramowitz and I. A. Setegun "Handbook of Mathematical functions" NBS Appl. Math Series 55, 1964

昭和　　年　　月　　日

附録A　種々の積分

$$A_0 = -i\oint X_0(z)\, e^{i\gamma z}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-\gamma \sin\theta}\, d\theta = 2\pi I_0(\gamma), \quad \text{(1)}$$

$$A_1 = -i\oint X_1(z)\, e^{i\gamma z}\, dz = \int_0^{2\pi} e^{-\gamma \sin\theta} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-\gamma\cos\theta} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{\gamma} I_1(\gamma), \quad \text{(2)}$$

$$A_2 = -i\oint X_2(z)\, e^{i\gamma z}\, dz = \frac{2}{\pi i}\oint e^{i\gamma z} \log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) dz$$

$$= \frac{2}{\pi\gamma}\oint e^{i\gamma z}\left(\frac{1}{\zeta+1} - \frac{1}{\zeta-1}\right) d\zeta = -\frac{4}{\pi\gamma}\oint \frac{e^{\frac{i\gamma}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)}\, d\zeta}{\zeta^2-1}, \quad \text{(3)}$$

従って
$$\frac{\partial}{\partial\gamma}(\gamma A_2) = \frac{2}{\pi i}\oint e^{\frac{i\gamma}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta} = +\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\gamma\sin\theta}\, d\theta$$

$$= +4 I_0(\gamma), \quad \text{(4)}$$

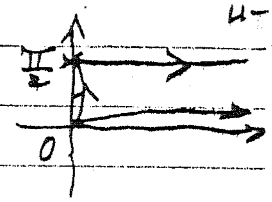
$$\left[\gamma A_2\right]_{\gamma=0} = \frac{2}{\pi}\oint\left(\frac{1}{\zeta+1} - \frac{1}{\zeta-1}\right) d\zeta = 0, \quad \text{(5)}$$

よって
$$A_2 = \frac{4}{\gamma}\int_0^{\gamma} I_0(t)\, dt, \quad \text{(6)}$$

A-2

昭和　年　月　日

$$B_0 = -i\int_0^\infty X_0(t)e^{i\gamma t}dt = \frac{1}{i}\int_0^\infty e^{i\gamma \operatorname{sh} u}du$$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma\sin\theta}d\theta - i\int_0^\infty e^{-\gamma \operatorname{ch} u}du$$

$$= \frac{\pi}{2}\{I_0(\gamma) - L_0(\gamma)\} - iK_0(\gamma), \quad \cdots\cdots (7)$$

ここに L_0 は 変形の Struve func. で

$$L_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh}(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\, d\theta,$$

$$I_{-\nu}(z) - L_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\infty \sin(zu)\,(1+u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}du,$$

などの関係がある。

ここに

$$B_1 = -i\int_0^\infty X_1(t)e^{i\gamma t}dt = -i\int_0^\infty e^{i\gamma t}(-t+\sqrt{1+t^2})dt$$

$$= -\frac{i}{\gamma^2} - i\int_0^\infty e^{i\gamma \operatorname{sh} u}\operatorname{ch}^2 u\, du$$

$$= -\frac{i}{\gamma^2} + \frac{\pi}{2\gamma}\{I_1(\gamma) - L_1(\gamma)\} - i\int_0^\infty \cos(\gamma t)\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2\gamma}\{I_1(\gamma) - L_1(\gamma)\} + i\left\{\frac{1}{\gamma}K_1(\gamma) - \frac{1}{\gamma^2}\right\}, \quad (8)$$

$$B_2 = -i\int_0^\infty X_2(t)e^{i\gamma t}dt = \frac{2}{\pi i}\int_0^\infty e^{i\gamma t}\lg\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)dt$$

これを求める為に

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}B_2(\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{i\gamma t}\, t\, \lg\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)dt$$

$$= \frac{2i}{\pi\gamma}\int_0^\infty e^{i\gamma t}\left[\lg\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) - t\left(\frac{2}{\zeta^2-1}\right)\frac{d\zeta}{dt}\right]dt$$

$$= \frac{-1}{\gamma}B_2(\gamma) - \frac{2i}{\pi\gamma}\int_0^\infty e^{i\gamma t}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} B_2(\gamma) + \frac{1}{\gamma} B_2(\gamma) = + \frac{2}{\pi\gamma} B_0(\gamma), \quad \cdots (9)$$

$$\therefore\ B_2(\gamma) = + \frac{2}{\pi\gamma}\int_0^\gamma B_0(t)\,dt + \mathrm{Const}_1, \quad (10)$$

を得るが $B_2(0)$, $B_2(\infty)$ は共に ∞ となるので Const_1 を決めるのは難しい。

その為には

$$B_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma\sin\theta}\left[\log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\pi}{2}i\right]\cos\theta\,d\theta$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\gamma \operatorname{ch} v}\log\left(\frac{ie^v+1}{ie^v-1}\right)\operatorname{sh} v\,dv.$$

と変形すると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma\sin\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_0^1 e^{-\gamma y}\,dy = -\frac{e^{-\gamma}-1}{\gamma} = \frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma}$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma\sin\theta}\log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta\,d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma\sin\theta}\log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= \cancel{+}\ \frac{1}{\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma\sin\theta}\left(1 - \cos\theta\log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta.$$

$$= \frac{\pi}{2\gamma}\{I_0(\gamma) - L_0(\gamma)\} - \frac{1}{\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma\sin\theta}\log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta\,d\theta,$$

で且つ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

故に

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma\sin\theta}\log\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2\gamma}\int_0^\gamma \{I_0(t) - L_0(t)\}\,dt, \quad (11)$$

之に

昭和　　年　　月　　日

$$-\int_0^\infty e^{-\gamma \operatorname{ch} v}\operatorname{sh} v \log\left(\frac{ie^v+1}{ie^v-1}\right)dv$$

$$=-\frac{1}{\gamma}\left[e^{-\gamma\operatorname{ch} v}\log\left(\frac{ie^v+1}{ie^v-1}\right)\right]_0^\infty-\int_0^\infty e^{-\gamma\operatorname{ch} v}\left(\frac{ie^v}{ie^v+1}-\frac{ie^v}{ie^v-1}\right)dv$$

$$=-\frac{\pi}{2\gamma}ie^{-\gamma}+\frac{i}{\gamma}\int_0^\infty e^{-\gamma\operatorname{ch} v}\frac{dv}{\operatorname{ch} v}$$

$$=-\frac{i\pi}{2\gamma}e^{-\gamma}+\frac{i}{\gamma}\int_\gamma^\infty K_0(t)\,dt, \qquad \cdots\cdots (12)$$

よって $B_2=\frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma\{I_0(t)-L_0(t)\}dt-\frac{i}{\gamma}+\frac{2i}{\pi\gamma}\int_\gamma^\infty K_0(t)\,dt$

$$=\frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma\{I_0(t)-L_0(t)\}dt-\frac{2i}{\pi\gamma}\int_0^\gamma K_0(t)\,dt, \qquad (13)$$

つまり(10)式の定数は 0 となる。

ここで

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\gamma}B_0(\gamma)&=\frac{\pi}{2}\left\{I_1(\gamma)-L_1(\gamma)-\frac{2}{\pi}\right\}+iK_1(\gamma),\\&=\gamma B_1(\gamma)+\frac{i}{\gamma}-1,\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\gamma}B_1(\gamma)&=\frac{\pi}{2\gamma}\left\{I_2(\gamma)-L_2(\gamma)-\frac{2\gamma}{3\pi}\right\}+i\left\{-\frac{K_2(\gamma)}{\gamma}+\frac{2}{\gamma^3}\right\},\\&=\frac{1}{\gamma}B_0(\gamma)-\frac{2}{\gamma}B_1(\gamma),\end{aligned}\right\}\cdots(15)$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}B_2(\gamma)=\frac{2}{\pi\gamma}B_0(\gamma)-\frac{1}{\gamma}B_2(\gamma), \qquad \cdots\cdots (16)$$

次に これらを加え合せて.

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{B_{1i}+\frac{1}{\gamma^2}}{-B_{0i}} = \frac{K_1(\gamma)}{\gamma K_0(\gamma)} \\ \mu &= \frac{B_{2i}-\frac{1}{\gamma}}{-B_{0i}} = \frac{1}{\gamma K_0(\gamma)}\left[-\frac{1}{\gamma}-\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma K_0\,dt\right] \end{aligned}\right\} (17)$$

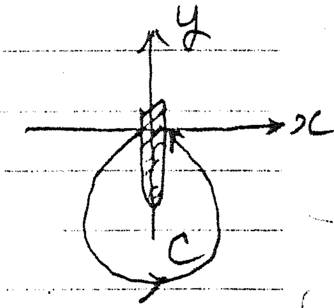
$$\left.\begin{aligned} H_d(\gamma) &= +2\pi I_0(\gamma)/K_0(\gamma) = -A_0/B_{0i}, \\ H_1(\gamma) &= \gamma A_1(\gamma)+\gamma\lambda A_0(\gamma) = 2\pi\left[I_1(\gamma)+\frac{K_1(\gamma)}{K_0(\gamma)}I_0(\gamma)\right] \\ &= \frac{2\pi}{\gamma K_0(\gamma)}, \\ H_2(\gamma) &= \gamma A_2(\gamma)+\gamma\mu A_0(\gamma) = 4\int_0^\gamma I_0\,dt - \frac{2\pi I_0(\gamma)}{K_0(\gamma)}\left[1+\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma K_0\,dt\right] \\ &= -\frac{2\pi}{K_0(\gamma)}\left[I_0(\gamma)+L_0(\gamma)\right], \end{aligned}\right\} (18)$$

又

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(+0)-\Phi_1(-0) \equiv [\Phi_1(0)] &= \gamma(2B_1 r - A_1)+\gamma\lambda(2B_0 r - A_0) \\ &= -\pi\{I_1+L_1\} - \frac{\pi K_1}{K_0}\{I_0+L_0\} \\ &= -\frac{\pi}{\gamma K_0(\gamma)} - \frac{\pi}{K_0}\left[\frac{2}{\pi}\right]\left\{\frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma K_0\,dt - K_0\right\} \\ &= 2 - \frac{\pi}{\gamma K_0(\gamma)}\left[1+\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma K_0(t)\,dt\right], \\ [\Phi_2(0)] &= \gamma(2B_2 r - A_2)+\gamma\mu(2B_0 r - A_0) \\ &= -2\int_0^\gamma (I_0+L_0)\,dt - \frac{\pi}{K_0}\left(1+\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma K_0\,dt\right)(I_0+L_0) \\ &= \frac{\pi}{K_0(\gamma)}\left[\cancel{2L_0} + \frac{2}{\pi}L_0\int_0^\gamma K_0\,dt + I_0\right] - 2\int_0^\gamma L_0\,dt, \\ [\Phi_d(0)] &= \frac{2B_0 r - A_0}{B_{0i}} = +\frac{\pi}{K_0(\gamma)}\{I_0(\gamma)+L_0(\gamma)\}, \end{aligned}\right\} (19)$$

昭和　年　月　日

附録13　力の積分



$$X - iY = \frac{i\rho}{2}\int_C \left(1+\frac{df}{dz}\right)^2 dz, \quad \text{--}(1)$$

$$M = \mathrm{Re}\, -\frac{\rho}{2}\int_C \left(1+\frac{df}{dz}\right)^2 z\,dz, \quad \text{--}(2)$$

まず

$$X - iY = \frac{i\rho}{2}\int_C \left\{2\frac{df}{dz} + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right\} dz$$

$$= i\rho\left[f(z)\right]_{z=-0}^{z=+0} + \frac{i\rho}{2}\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz, \quad \text{---}(3)$$

よって

$$X = +\mathrm{Im}\left[\frac{\rho}{2} I\right], \quad \text{----}(4)$$

$$Y = -\rho\left[\varphi(x,0)\right]_{x=-0}^{x=+0} + \mathrm{Re}\left[\frac{\rho}{2} I\right], \quad \text{--}(5)$$

ここに

$$I = \int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz, \quad \text{-----}(6)$$

さて

$$\frac{df}{dz} = iX(z) - i\gamma f(z)$$

であるから

$$I = \int_C \left(X^2 - 2\gamma f X + \gamma^2 f^2\right) dz$$

さて

$$\int_C f X\, dz = \frac{1}{i}\int_C f\left[\frac{df}{dz} + i\gamma f\right] dz$$

$$= -\frac{i}{2}\left[f^2\right]_C + \gamma\int f^2 dz, \quad \text{--}(7)$$

となるから

$$I = +\frac{i\gamma}{2}\left[f^2\right]_C + \int_C \left(X^2 - \gamma f X\right) dz, \quad \text{---}(8)$$

昭和　　年　　月　　日

この内

$$\int_C X^2\,dz = -2\int_0^\infty X^2(x)\,dx$$

§2 (21) から

$$X(x) = \gamma\left[X_1(x) + \alpha X_2 + \beta X_0\right], \quad ---$$

であるから

$$\int_C X^2\,dz = -2\gamma^2\int_0^\infty \left[X_1^2 + \alpha^2 X_2^2 + \beta^2 X_0^2 + 2\alpha X_1 X_2 + 2\beta X_1 X_0 + 2\alpha\beta X_0 X_2\right]dx, \quad ---(9)$$

$x = \tan\theta$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty X_0^2\,dx = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2},\\
&\int_0^\infty X_0 X_1\,dx = \int_0^\infty e^{-u}\,du = 1,\\
&\int_0^\infty X_0 X_2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \log\left(\coth\frac{u}{2}\right)du = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\frac{dx}{x}\\
&\qquad = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\,du}{\sinh u} = \frac{4}{\pi}\times\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2},\\
&\int_0^\infty X_1^2\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{\zeta^2}\left(1+\frac{1}{\zeta^2}\right)d\zeta = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{3\zeta^3}\right]_0^\infty = \frac{2}{3},\\
&\int_0^\infty X_1 X_2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)\frac{1}{\zeta}\left(1+\frac{1}{\zeta^2}\right)d\zeta\\
&\qquad = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)\frac{d\zeta}{\zeta^3}\\
&\qquad = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta^2}-1\right)\log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)\Big|_1^\infty - \frac{2}{2}\int_1^\infty\left(\frac{1}{\zeta^2}-1\right)\frac{d\zeta}{\zeta^2-1}\right]\\
&\qquad = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi},\\
&\int_0^\infty X_2^2\,dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \left\{\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right\}^2 dx = 2,
\end{aligned}\right\}\quad (10)$$

昭和　年　月　日

!! $\int_0^{\rho} X_2^2 dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\rho}\{l_g(\frac{\xi+1}{\xi-1})\}^2 dx = \frac{4}{\pi^2} x(l_g\frac{\xi+1}{\xi-1})^2\Big|_0^{\infty}$

$$-\frac{4}{\pi^2}\int_{\rho}^{\infty} x\cdot\frac{2(-2)}{\xi^2-1} l_g(\frac{\xi+1}{\xi-1})d\xi$$

$$= r\frac{8}{\pi^2}\int_1^{\infty} l_g(\frac{\xi+1}{\xi-1})\frac{d\xi}{\xi} = 2,$$

∴ $\frac{+1}{2}\int_c X^2 dz = -\gamma^2\Big[\frac{2}{3} + 2\alpha^2 + \frac{\pi}{2}\beta^2 + \alpha(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi})$
$+ 2\beta + \pi\alpha\beta\Big]$, ---(11)

次に $\int_c X f dz = \int_0^{-\infty} X f dx - \int_0^{\infty} X f dx = H(\gamma)\int_0^{\infty} \cancel{X}e^{i\gamma x}dx$
$-2\int_0^{\infty} X(x)\varphi(x,0)dx$

$$= i H(\gamma) f(+0) - 2\int_0^{\infty} X(x)\varphi(x,0)dx, \quad (12)$$

よって， $\mathcal{I}\int_c X(z)f(z)dz = H(\gamma)\varphi(+0)$, ---(13)

一方 $Re\int_c X f dz = -\int_c (X_r\psi + X_i\varphi)dy$, ---(14)

であるから，よって $-\int_c X_r\psi\, dy = +\gamma\int_{-\pi}^{0}\Big(\cos\theta + \frac{2\alpha}{\pi}\underbrace{l_g|\cot\frac{\theta}{2}|}_{+\beta\frac{1}{\cos\theta}}\Big)(\varepsilon + \lambda\theta)\cos\theta\, d\theta$

$$= \gamma\int_0^{\pi}\Big(\cos\theta + \frac{2}{\pi}\alpha\underbrace{l_g\cot\frac{\theta}{2}}_{+\beta/\cos\theta}\Big)(\varepsilon - \lambda(\theta))\cos\theta\, d\theta$$

$$= \gamma\Big[\varepsilon\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\Big] + \gamma\alpha\Big[2\varepsilon - \frac{2}{\pi}\Big] + \gamma\beta\big[\pi\varepsilon - 2\big]$$

$$-\int X_r\psi\, dy = -\gamma(\frac{2}{3} + \frac{2}{\pi}\alpha + 2\beta) + \gamma\varepsilon(\frac{\pi}{2} + 2\alpha + \pi\beta), \quad (15)$$

ここに $\varphi = e^{\gamma y}\varphi(0) - e^{\gamma y}\int_c^{y} X_r e^{-\gamma y'}dy'$

であるから

$$\psi^*(y) = +e^{-\gamma y}\int_0^y X_i e^{+\gamma y} dy \qquad \cdots\cdots (16)$$

とおくと

$$-\int_c X_i \varphi\, dy = -\varphi(+0)\int_c X_i e^{\gamma y} dy + \int_c X_i e^{\gamma y} dy \int_0^y X_r e^{-\gamma y'} dy'$$

$$= \psi^*(y)\{\varphi(y)-\varphi(0)\}\Big|_c - \int_c X_r \psi^* dy$$

$$= -\int_c X_r \psi^* dy, \qquad \cdots\cdots (17)$$

之に

$$\psi^*(y) = +\gamma e^{-\gamma y}\int_0^y (-y+\alpha) e^{\gamma y} dy = \alpha(1-e^{-\gamma y}) + \gamma\left[-\frac{y}{\gamma} - \frac{1-e^{-\gamma y}}{\gamma^2}\right]$$

$$= \alpha - y + \frac{1}{\gamma} - e^{-\gamma y}\left(\alpha+\frac{1}{\gamma}\right) \qquad (16')$$

よって

$$-\int_c X_i \varphi\, dy = -\int_c X_r \psi^* dy = \int_c X_r\left[y - \left(\alpha+\frac{1}{\gamma}\right)(1-e^{-\gamma y})\right] dy$$

$$+ \left(\alpha+\frac{1}{\gamma}\right)\int X_r e^{-\gamma y} dy$$

$$= -\gamma\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{\pi}\alpha + 2\beta\right) - \gamma\left(\alpha+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha + \pi\beta\right)$$

$$- \left(\alpha+\frac{1}{\gamma}\right)\{\varphi(+0)-\varphi(-0)\}, \qquad \cdots\cdots (18)$$

$\alpha+\frac{1}{\gamma} \fallingdotseq \alpha$

結局

$$Re\int_0 X f\, dz = -2\gamma\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{\pi}\alpha + 2\beta\right) - 2\alpha\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha + \pi\beta\right) - \left(\alpha+\frac{1}{\gamma}\right)\{\varphi(+0)-\varphi(-0)\}, \qquad \cdots (19)$$

これらを加え合せて

$$\frac{X}{\rho} = Im\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{\gamma}{4} Re\left[(\varphi(+0)+i\psi_+)^2 - (\varphi(-0)+i\psi(-0))^2\right]$$

$$- \frac{\gamma}{2}\, \ell\int_c f X\, dz$$

$$= \frac{\gamma}{4}\left[\varphi^2(+0) - \{H - \varphi(+0)\}^2 - 2H\varphi(+0)\right]$$

$$= -\frac{\gamma}{4} H^2(0), \qquad \cdots (20)$$

B-J

昭和　　年　　月　　日

$$\Upsilon = \Upsilon^{(0)} + \Upsilon^{(1)},$$

とおく

$$\Upsilon^{(0)} = -\rho[\varphi(+0)-\varphi(-0)],$$

$$\Upsilon^{(1)} = \frac{\rho}{2}\mathcal{R}_e\{I\},$$

(21)

$$\frac{\Upsilon^{(1)}}{\rho} = -\frac{\gamma}{2}\psi(0)[\varphi(+0)-\varphi(-0)] + \frac{1}{2}\int X^2 dz - \frac{\gamma}{2}\mathcal{R}_e\int f X dz$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\psi[\varphi] + \frac{\gamma\alpha+1}{2}[\varphi]$$

$$-\gamma^2\left[\frac{2}{3} + \alpha\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\right) + 2\alpha^2 + \pi\alpha\beta + \frac{2}{\pi}\beta + \frac{\pi}{2}\beta^2\right]$$

$$+\gamma^2\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{\pi}\alpha + \frac{2}{\pi}\beta\right) + \alpha\gamma\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha+\pi\beta\right),$$

$$\psi(0) = -\varepsilon, \quad \alpha = \frac{1}{\gamma} - \varepsilon,$$

$$\frac{1+\gamma\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}\psi = 1 - \frac{\gamma\varepsilon}{2} + \frac{\gamma}{2}\varepsilon = 1$$

$$\therefore \frac{\Upsilon^{(1)}}{\rho} = [\varphi] + \alpha\gamma\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha+\pi\beta\right)$$

$$-\gamma^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha + 2\alpha^2 + \pi\alpha\beta + \frac{\pi}{2}\beta^2\right), \quad \cdots (22)$$

$$= [\varphi] + \alpha\gamma(1-\gamma)\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha+\pi\beta\right) - \frac{\pi}{2}\gamma^2\beta^2,$$

結局

$$\frac{\Upsilon}{\rho} = \alpha\gamma(1-\gamma)\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha+\pi\beta\right) - \frac{\pi}{2}\gamma^2\beta^2, \quad \cdots (23)$$

となる。

昭和　年　月　日

一般に (2)より

$$Re\int_c z\frac{df}{dz}\,dz = -\int_c u\,y\,dy = 0, \qquad (24)$$

[illegible]

$$M = Re -\frac{\rho}{2}\int_c\left(\frac{df}{dz}\right)^2 z\,dz$$

$$= Re\frac{\rho}{2}\int_c\{X^2-2\gamma fX+\gamma^2 f^2\}z\,dz, \qquad (25)$$

而して

$$\int_c X^2 z\,dz = \int_0^{-\infty} X^2(x)\,x\,dx - \int_0^{\infty} X^2(x)\,x\,dx = 0, \qquad (26)$$

$$\int_c z f X\,dz = \int_c z f(z)\left\{\gamma f - i\frac{df}{dz}\right\}dz$$

$$= \gamma\int_c z f^2(z)\,dz - i\left[\frac{z}{2}f^2(z)\Big|_c - \frac{1}{2}\int_c f^2\,dz\right]$$

$$= \gamma\int_c z f^2\,dz - \qquad + \frac{i}{2}\left[\frac{1}{\gamma}\int_c fX\,dz + \frac{i}{2\gamma}f^2\Big|_c\right], \qquad (27)$$

よって

$$M = Re\frac{\rho}{2}\left[-\gamma\int_c fXz\,dz - \frac{i}{2}\int fX\,dz + \frac{f^2}{4}\Big|_c\right], \qquad (28)$$

$$Re\ f^2\Big|_c = Re\left[\{\varphi(0)+i\psi(0)\}^2 - \{H-\varphi(0)+i\psi(0)\}^2\right]$$

$$= \varphi^2(0) - \psi^2 - \{H^2+\varphi^2(0)-2H\varphi(0)-\psi^2\}$$

$$= 2H\varphi(0) - H^2, \qquad (29)$$

$$Re\ i\int_c fX\,dz = -l\int_c fX\,dz = -H\varphi(0), \qquad (30)$$

昭和　　年　　月　　日

$$\therefore \int_c f X z\,dz = \int_0^{-i\infty} f X x\,dx - \int_0^{\infty} f X x\,dx$$

$$= -H \int_0^{\infty} e^{i\gamma x} X(x)\,x\,dx + \int_0^{\infty} \{ f(x) - \varphi(x) \} X(x)\,x\,dx$$

$$\therefore \mathrm{Re} \int_c f X z\,dz = -H(\gamma) \int_0^{\infty} \cos\gamma x\, X(x)\,x\,dx, \quad \cdots (31)$$

$$= -H(\gamma)\,G(\gamma),$$

$$G(\gamma) = \int_0^{\infty} X(x) \cos\gamma x\; x\,dx, \quad \cdots (32)$$

$$X(x) = \gamma X_1 + \gamma\alpha X_2 + \gamma\beta X_0$$

$$\int_0^{\infty} x X_j \cos\gamma x\,dx = \frac{\partial}{\partial\gamma} B_{jr} = B'_{jr} \quad \cdots (33)$$

$$G(\gamma) = \gamma B'_{1r} + \gamma\alpha B'_{2r} + \gamma\beta B'_{0r},$$

よって

$$\frac{M}{P} = +\frac{\gamma}{2} H G + \frac{1}{4} H \varphi(0) + \frac{1}{8} \{ 2H \varphi(0) - H^2 \},$$

$$= \frac{1}{2} H(\gamma) \{ \gamma G + \varphi(0) \} - \frac{1}{8} H^2(\gamma), \quad \cdots (34)$$

$$\gamma G + \varphi(0) = \gamma^2 B'_{1r} + \gamma B_{1r} + (\gamma^2 B'_{2r} + \gamma B_{2r})\alpha + (\gamma^2 B'_{0r} + \gamma B_{0r})\beta,$$

$$\gamma B'_{1r} + B_{1r} = B_{0r} - B_{1r}, \quad \cancel{\gamma B'_{2r} + B_{2r} = \tfrac{2}{\pi} B_{0r}}$$

$$\gamma B'_{0r} + B_{0r} = \gamma^2 B_{1r} - \gamma + B_{0r} \quad (35)$$

昭和　年　月　日

附録C　極限値

$\gamma \to 0$ となると

$$I_0(\gamma) \to 1+\frac{\gamma^2}{4}+\frac{\gamma^4}{64},\quad I_1(\gamma) \to \frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma^3}{16}+\cdots$$

$$K_0(\gamma) \to -\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)\left(1+\frac{\gamma^2}{4}+\cdots\right)+\frac{\gamma^2}{4}\cdots$$

C = Euler's Const. = .577216 , $\psi(1)=-C$, $\psi(2)=-C+1$

$$K_1(\gamma) \to \frac{1}{\gamma}+\lg\frac{\gamma}{2}\left(1+\frac{\gamma^2}{4}+\cdots\right)-\frac{\gamma}{4}\Big[\underbrace{\{\psi(1)+\psi(2)\}}_{1-2C}+\cdots\Big]$$

$$=\frac{1}{\gamma}+\lg\frac{\gamma}{2}+\frac{(2C-1)}{4}\gamma+\frac{\gamma^2}{4}\lg\frac{\gamma}{2}+\cdots$$

$$L_0(\gamma) \to \frac{\gamma}{2}\left[\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\times\frac{4}{9}\times\frac{\gamma^2}{4}+\cdots\right]$$

$$L_1(\gamma) \to \frac{\gamma^2}{4}\left[\frac{4}{\pi}\times\frac{2}{3}+\cdots\right]$$

$$\int_0^\gamma I_0(t)\,dt \to \gamma+\frac{\gamma^3}{12}+\cdots$$

$$\int_0^\gamma K_0(t)\,dt \to -\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)\gamma\left[1+O(\gamma^2)\right]+\gamma+O(\gamma^3)$$

$$\int_0^\gamma L_0(t)\,dt \to \frac{\gamma^2}{\pi}+O(\gamma^4)$$

2

昭和　年　月　日

$\gamma \to 0$

$$A_0 = 2\pi I_0(\gamma) \longrightarrow 2\pi\left(1+\frac{\gamma^2}{4}\right)$$

$$A_1 = \frac{2\pi}{\gamma} I_1(\gamma) \longrightarrow \pi\left(1+\frac{\gamma^2}{8}\right)$$

$$A_2 = \frac{4}{\gamma}\int_0^\gamma I_0\,dt \longrightarrow 4+\frac{\gamma^2}{3}$$

$$B_0 = \frac{\pi}{2}(I_0 - L_0) - iK_0 \longrightarrow \left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) + i\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)$$

$$B_1 = \frac{\pi}{2\gamma}(I_1 - L_1) + i\left(\frac{K_1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi\gamma^2}{32} - \frac{2}{3\pi}\gamma^2\right) + i\left(\lg\frac{\gamma}{2} + O(\gamma)\right)$$

$$B_2 = \frac{1}{\gamma}\int_0^\gamma (I_0 - L_0)\,dt - \frac{2i}{\pi\gamma}\int_0^\gamma K_0\,dt$$

$$\longrightarrow \left(1 - \frac{\gamma}{\pi}\right) - i\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\lg\frac{\gamma}{2} + C + 1\right)$$

$$B_0' = \gamma B_1 - 1 + \frac{i}{\gamma} \rightarrow \left(-1 + \frac{\pi}{4}\gamma + i\left(\frac{1}{\gamma} + \lg\frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

$$B_1' = \frac{B_0}{\gamma} - \frac{2}{\gamma}B_1 \rightarrow \left\{\cancel{\frac{\pi}{2\gamma}} - 1 - \frac{2}{\gamma}\left(\cancel{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{32} - \frac{2}{3\pi}\gamma^2\right)\right\}$$

$$+ \frac{i}{\gamma}\left[\lg\frac{\gamma}{2} + C - 2\lg\frac{\gamma}{2} \cdots\right]$$

$$B_2' = \frac{2}{\pi\gamma}B_0 - \frac{B_2}{\gamma} \rightarrow \left[\cancel{\frac{1}{\gamma}} - \frac{2}{\pi} - \left(\cancel{\frac{1}{\gamma}} - \frac{1}{\pi}\right)\right]$$

$$+ i\left[\frac{2}{\pi\gamma}\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right) + \frac{2}{\pi\gamma}\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C+1\right)\right]$$

$$\lambda = \frac{K_1}{\gamma K_0} \longrightarrow \frac{\frac{1}{\gamma} + \lg\frac{\gamma}{2}}{-\gamma\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)} = -\frac{1+\gamma\lg\frac{\gamma}{2}}{\gamma^2\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)} \quad , > 0$$

$$\mu = \frac{B_{2i} - \frac{1}{\gamma}}{-B_{0i}} \rightarrow \frac{-\frac{1}{\gamma} - \frac{2}{\pi}\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C+1\right)}{-\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)} = \frac{1+\frac{2\gamma}{\pi}\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C+1\right)}{\gamma\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)}$$

< 0

$$H_d \longrightarrow -2\pi / \left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right) \quad > 0$$

$$H_1 \longrightarrow \frac{2\pi}{-\gamma\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)} \quad > 0$$

$$H_2 \longrightarrow \frac{2\pi}{\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)}\left(1+\frac{2}{\pi}\gamma\right) \quad < 0$$

$$\alpha_M = -H_1/H_2 \longrightarrow \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{2}{\pi}\gamma\right)}$$

$$[\Phi_1(0)] \longrightarrow 2 + \frac{\pi}{\gamma\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)}\left[1-\frac{2}{\pi}\gamma\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)+\cdots\right]$$

$$\longrightarrow \frac{\pi}{\gamma\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)}$$

$$[\Phi_2(0)] = \gamma(2B_{2r}-A_2) + \gamma\mu(2B_{0r}-A_0).$$

$$= \gamma\left[2-\frac{2}{\pi}\gamma-4-\frac{\gamma^2}{3}\right] + \frac{\left(1+\frac{2}{\pi}\gamma\lg\ldots\right)}{\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)}\left(\pi-2\gamma-2\pi\right)$$

$$-\pi-2\gamma$$

$$= \gamma\left(-2-\frac{2}{\pi}\gamma\right) + \frac{1}{\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)}\left[-\pi-2\gamma\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C+1\right)\right]$$

$$-[\Phi_2] = \frac{1}{\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)}\left[2\gamma\left(1+\frac{\gamma}{\pi}\right)\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right) + \pi + 2\gamma\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C+1\right)\right]$$

$$\alpha_S = -[\Phi_1]/[\Phi_2] \longrightarrow \frac{1}{\gamma\left[1+\frac{2}{\pi}\gamma\left(\lg\frac{\gamma}{2}+C\right)\right]}$$

$$\alpha_S \neq \alpha_M$$

$\gamma \to \infty$ とすると

$$I_0(\gamma) \to \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\left(1+\frac{1}{8\gamma}+\cdots\right)$$

$$I_1(\gamma) \to \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\left(1-\frac{3}{8\gamma}+\cdots\right)$$

$$\int_0^{\gamma} I_0\,dt \to \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{2\pi\gamma}}\left(1+\frac{1}{\gamma}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots\right)$$

$$K_0(\gamma) \to \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\,e^{-\gamma}\left(1-\frac{1}{8\gamma}+\cdots\right)$$

$$K_1(\gamma) \to \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\,e^{-\gamma}\left(1+\frac{3}{8\gamma}+\cdots\right).$$

$$\int_{x}^{\infty} K_0\,dt \to \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\,e^{-\gamma}\left(1-\frac{5}{8\gamma}+\cdots\right)$$

$$\left(\int_0^{\infty} K_0\,dt = \frac{\pi}{2}\right)$$

2

$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$L_0(\gamma)-I_0(\gamma) \longrightarrow -\frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{\gamma}-\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,8}{\Gamma(-\frac{1}{2})\,\gamma^3}+\cdots\right]$$

$$L_1(\gamma)-I_1(\gamma) \longrightarrow -\frac{1}{\pi}\left[\cancel{2}-\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}\ \tfrac{1}{2}\times 4+\cdots\right]$$

$$\int_0^{\gamma}(I_0-L_0)\,dt \longrightarrow \frac{2}{\pi}(\log 2\gamma + C) - \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{(2\gamma)^2}+\cdots\right]$$

$$I_0-L_0 \to \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma^3}\right]$$

$$I_1-L_1 \to \frac{2}{\pi}\left[1-\frac{1}{\gamma^2}\right]$$

昭和　年　月　日

$$A_0 \to \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}\, e^{\gamma}$$

$$A_1 \to \frac{\sqrt{2\pi}}{\gamma^{3/2}}\, e^{\gamma}$$

$$A_2 \to \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, \frac{e^{\gamma}}{\gamma^{3/2}}$$

$$B_0 \to \frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right) - i\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\, e^{-\gamma}\right)$$

$\left(-\frac{2}{\gamma}\right)$

$$B_1 \to \frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right) + i\left(-\frac{1}{\gamma^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{e^{-\gamma}}{\gamma^{3/2}}\right)$$

$$B_2 \to \frac{2}{\pi\gamma}\left(\lg 2\gamma + c\right) + i\left(-\frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{e^{-\gamma}}{\gamma^{3/2}}\right)$$

$$B_0' \to -\frac{1}{\gamma^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\, e^{\gamma}$$

$$B_1' \to -\frac{1}{\gamma^2} + i\left(\frac{2}{\gamma^3} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{e^{-\gamma}}{\gamma^{3/2}} - \sqrt{2\pi}\, \frac{e^{-\gamma}}{\gamma^{5/2}}\right)$$

$$B_2' \to \frac{2}{\pi\gamma^2}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) - \frac{2}{\pi\gamma^2}\left(\lg 2\gamma + c\right)$$
$$+ i\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-\gamma}}{\gamma^{3/2}} + \frac{1}{\gamma^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-\gamma}}{\gamma^{5/2}}\right).$$

$$H_0 \to \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi\gamma}}\, \frac{e^{2\gamma}}{\sqrt{\pi/2\gamma}} = 2e^{2\gamma}$$

$$H_1 \to \frac{2\pi}{\gamma\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}}\, e^{\gamma} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\gamma}}\, e^{\gamma},$$

$$H_2 \to -\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}}\, e^{\gamma}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}}\, e^{\gamma} - \frac{2}{\pi\gamma}\right] \fallingdotseq 4e^{2\gamma}$$

$$\alpha_m = H_1/H_2 \to \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\, e^{-\gamma}$$

昭和　　年　　月　　日

γ

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{\gamma}$$

$$\mu \rightarrow -\frac{\sqrt{2}\,e^{\gamma}}{\sqrt{\gamma\pi}}\left(2 - \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\,e^{-\gamma}\right)$$

$$[\Phi_1] \rightarrow \gamma\left[\frac{2}{\gamma}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\gamma^{\frac{3}{2}}}e^{\gamma}\right] + \left[\frac{2}{\gamma}\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right) - \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}\,e^{\gamma}\right]$$

$$\rightarrow 2 - \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\gamma}}e^{\gamma} + \frac{2}{\gamma} \cdots$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\gamma}}$$

$$[\Phi_2] \rightarrow \gamma\left[\frac{4}{\pi\gamma}(\lg 2\gamma + C) - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\gamma}}e^{\gamma}\right] +$$

$$-\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}}\,e^{\gamma}(2)\left(\frac{2}{\gamma} - \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}\,e^{\gamma}\right)$$

$$= 4e^{2\gamma} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\gamma}}e^{\gamma} + \frac{4}{\pi}(\lg 2\gamma + C) \cdots$$

$$\alpha_S = -[\Phi_1]/[\Phi_2] \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\gamma}}e^{-\gamma} - \frac{e^{-2\gamma}}{2} \cdots\cdots$$

$$\alpha_S \fallingdotseq \alpha_m$$

$\gamma \to 0$

$$A = \gamma(\gamma-1)(2+\pi\mu) + \frac{\pi}{2}\gamma^2\mu^2$$

$$\to \gamma(\gamma-1)\left(2 + \frac{\pi}{\gamma(l_f\frac{\gamma}{2}+c)}\right) + \frac{\pi}{2(l_f\frac{\gamma}{2}+c)^2}$$

$$= -\frac{\pi(1-\gamma)}{(l_f\frac{\gamma}{2}+c)} + \frac{\pi}{2(l_f\frac{\gamma}{2}+c)^2} =$$

$$B = \gamma(1-\gamma)\left(\frac{\pi}{2}+\pi\lambda\right) + \pi\gamma^2\mu\lambda.$$

$$\to \gamma(1-\gamma)\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\gamma^2(l_f\frac{\gamma}{2}+c)}\right] + \frac{\pi}{\gamma}\frac{1}{(l_f\frac{\gamma}{2}+c)^2}$$

$$= -\frac{\pi(1-\gamma)}{\gamma(l_f\frac{\gamma}{2}+c)} + \frac{\pi}{\gamma(l_f\frac{\gamma}{2}+c)^2} \simeq \frac{\pi}{\gamma(l_f\frac{\gamma}{2}+c)^2}\left[1-(l_f\frac{\gamma}{2}+c)\right]$$

$$C = \frac{\pi}{2}\gamma^2\lambda^2 = \frac{\pi}{2\gamma^2(l_f\frac{\gamma}{2}+c)^2}$$

$$\alpha'_{Y_{max}} = \frac{B}{2A} \to \frac{1}{\gamma} \quad \cdots$$

$$Y_{max} = \left(\frac{B^2}{4A} - C\right) \to -\frac{\pi}{\gamma^2(l_f\frac{\gamma}{2}+c)}$$

$$\alpha_1 \to \frac{1}{\gamma} - \frac{\sqrt{\frac{B^2}{4A}-C}}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\gamma} - \sqrt{\frac{1}{\gamma^2}} \doteqdot 0$$

昭和　年　月　日

$\gamma \to \infty$

$$A \to \gamma(\gamma-1)\left(2 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\gamma}} e^{\gamma}\right) + \frac{\pi}{2}\gamma^2 \frac{\gamma}{\pi\gamma} e^{2\gamma}$$

$$\Rightarrow 4\gamma e^{2\gamma}$$

$$B \to \gamma(1-\gamma)\left(\frac{\pi}{2} + \pi/\gamma\right) + \pi\gamma^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\gamma}} \frac{e^{\gamma}}{\gamma}$$

$$\fallingdotseq 2\sqrt{2\pi\gamma}\, e^{\gamma} - \frac{\pi}{2}\gamma^2 \ldots$$

$$C \to \frac{\pi}{2}\gamma^2/\gamma^2 \to \frac{\pi}{2} \quad ///$$

$$\alpha_{Y_{max}} \to \frac{B}{2A} \to \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}}\, e^{-\gamma}$$

$$Y_{max} = \left(\frac{B^2}{4A} - C\right) \to 0$$

$\gamma \to 0$.

$$C_1 = B_{0\gamma} - B_{1\gamma} \longrightarrow \frac{\pi}{4} - \gamma$$

$$C_2 = \frac{2}{\pi} B_{0\gamma} \longrightarrow 1 - \frac{2}{\pi}\gamma$$

$$C_0 = \gamma^2 B_{1\gamma} + B_{0\gamma} - \gamma \longrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\gamma$$

$$\frac{1}{2} M_1 = \gamma C_1 + \gamma \lambda C_0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}\gamma - \gamma^2 - \gamma\left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma\right) \frac{1 + \gamma \lg \frac{\gamma}{2}}{\gamma^2 (\lg \frac{\gamma}{2} + C)}$$

$$\longrightarrow - \frac{\pi (1 \cancel{\ldots})}{2\gamma (\lg \frac{\gamma}{2} + C)} + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2} M_2 = \cancel{\gamma C_2} - \gamma \mu' C_0 \longrightarrow \gamma\left(1 - \frac{2}{\pi}\gamma\right) + \frac{\cancel{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times (1 + \cdots)}{\gamma (\lg \frac{\gamma}{2} + C)}$$

$$\longrightarrow \frac{\pi}{2 (\lg \frac{\gamma}{2} + C)}.$$

$$M_1 / M_2 \longrightarrow -\frac{1}{\gamma}$$

$$\# M_1 / H_1 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$\gamma \to \infty$,

$C_1 = B_{0\gamma} - B_{1\gamma} \longrightarrow \frac{2}{\gamma^3}$

$C_2 = \frac{2}{\pi} B_{0\gamma} \longrightarrow \frac{2}{\pi\gamma}$

$C_0 = \gamma^2 B_{1\gamma} + B_{0\gamma} - \gamma \longrightarrow -\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^3} = \frac{1}{\gamma^3}$?

$\frac{1}{2} M_1 = \gamma C_1 + \lambda \gamma C_0 \longrightarrow \frac{2}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2} \times \frac{1}{\gamma} \to \frac{2}{\gamma^2}$

$\frac{1}{2} M_2 = \gamma C_2 + \gamma \mu C_0 \longrightarrow \frac{2}{\pi} \cancel{=} \frac{3}{\gamma^2} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} e^{\gamma}$

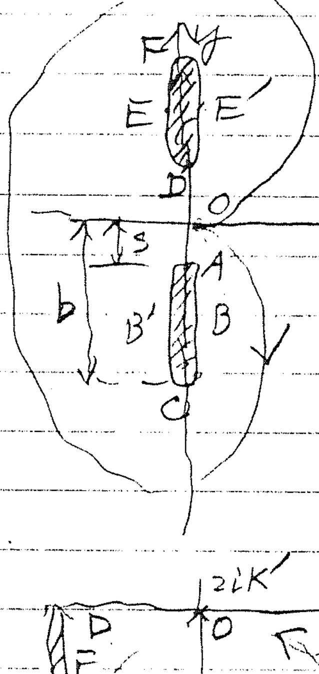
$M_1 / M_2 \longrightarrow \sqrt{\cancel{\frac{\pi}{2}}} \, e^{-\gamma}$

$M_1 / H_1 \longrightarrow \frac{4\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{2\pi}\,\gamma^2} e^{-\gamma} \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\gamma}}{\gamma^{\frac{3}{2}}}$

昭和　年　月　日

附録D

浸水垂直平板の場合

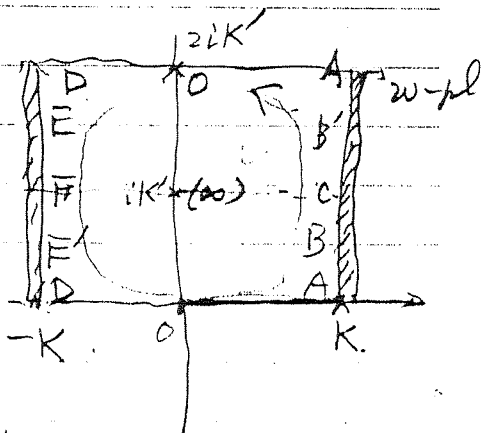


水面下にsだけ没している場合を考えよう。
(ヤコビの楕円関数を使って)

今 $z = -i s\,sn(w; k)$ …(1)

$k = s/b = s/(1+s)$

によって z−面を w−面に写すと矩形になり，$z=\infty$ は $w = iK'$ になる。



§2に従って

$$\left.\begin{aligned} Im\{X(x)\} &= 0, \\ Im\{X(iy)\} &= 1 - \gamma y + Const. \end{aligned}\right\} (2)$$

なる関数 $X(z)$ を探して見ると

まず

$$-X_1(z) = i\left\{E(w) - \frac{K'-E'}{K'}w\right\} - ik\,sn\,w, \quad (3)$$

$$X_2(z) = iw, \quad \cdots\cdots (4)$$

自由表面の実軸上では

$$-X_1(x) = \left[i\left\{E(iv) - \frac{K'-E'}{K'}iv\right\} - ik\,sn(iv)\right]$$

$$\left.\begin{aligned} &= -v + \frac{K'-E'}{K'}v - sc(v,k')dn(v,k') + E(v,k') \\ &\quad + k\,sc(v,k'), \\ &\text{つまり}\ I\,X_1(x) = 0 \end{aligned}\right\} \cdots (5)$$

物体面上では $w = K + iv$ とおいて

$$-X_1(y) = \frac{K'-E'}{K'}i(K+iv) + iE(iv) + iE - ik^2 sn(iv)cd(iv) \quad -ik\,sn(K+iv)$$

$$= \left(\frac{K(E'-K')}{K'} + E\right)i + \frac{K'-E'}{K'}v - v - sc(v,k')dn(v,k')$$

$$+ E(v,k') - ik^2(i)\frac{sc(v,k')}{cn(v,k')}\frac{cn(v,k')}{dn(v,k')} - ik\,nd(v,k')$$

$y = -s\,nd(v,k')$)

$$-X_1 = \frac{\pi i}{2K'} - \frac{E'}{K'}v + E(v,k') - \frac{sc(v,k')}{dn(v,k')}(dn^2 - k^2)$$

$$-ik\, nd(v,k'),$$ ……(6)

$$-\mathcal{I} X_1 = \frac{\pi}{2K'} + y/b,$$

なお $z=\infty$ ($w = iK'$ の近くでは)

$$E(u+iK') = E(u) + \frac{cn\,u\, dn\,u}{sn\,u} + i(K'-E')$$

$$sn(u+iK') = \frac{1}{k\, sn\,u}$$

$$\therefore -X_1(z) = iE(u) + \frac{i\, cn\,u\, dn\,u}{sn\,u} - (K'-E') - i\frac{K'-E'}{K'}(u+iK')$$

$$-\frac{i}{sn\,u},$$ ……(7)

$$-X_1(\infty) \to 0.$$

X_1 は一価関数となっている。

X_2 については明らかに

$$\mathcal{I}\{X_2(x)\} = 0$$

$$\mathcal{I}\{X_2(y)\} = \mathcal{I}\{i(K+iv)\} = K$$ ―(8)

X_2 は多価関数で今は AOD が cut であると考えておく。

この他に A, C 点において無限大となる解があって

$$X_0(z) = 1/dn(u,k),$$ ……(9)

$$X_3(z) = \frac{i\, sn(u,k)}{cn(u,k)\, dn(u,k)},$$ ……(10)

とおくと明らかに $\mathcal{I}m\{X_0, X_3\} = 0$ on Free surface and body ……(11)

となっている。

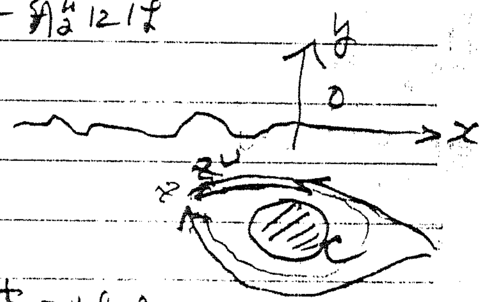
従って

$$f_j(z) = i e^{-i\gamma z}\int_{+i0}^{z} X_j(t)\, e^{i\gamma t}\, dt . \qquad (12)$$

とおくと 一般に A_j $(j=0,1,2,3)$ を定数として

$$f(z)=\sum_{j=0}^{3} A_j f_j(z) , \quad ----(13)$$

となり 半浸の場合より又一つ自由度が増す。
しかし没水体の場合は 2重連結領域となっているので物体を1周すると一般には
ポテンシャルの値が増える。
つまり多価関数となって
都合が悪い。



普通に行われる簡略化は
複素速度が一価になるとする事である。
そうすると §2, (5) の定義式より

$$i\frac{df}{dz} = \gamma f(z) - X(z) , \quad ---(14)$$

となるから この右辺が 水の中で 一価となるように指定する。
(12)より

$$i\gamma e^{i\gamma z}\oint X_j(t)\, e^{i\gamma t}\, dt = -X(z^U) + X(z^L) ,$$

z^U は z と云う点に物体の上を廻って来た点、
z^L は同じく下を廻って来た点とする。
特に z=0 とおくと $\mathrm{Im}\,X(y)=0$ であるから

$$\mathrm{Im}\left[i\gamma\oint_C X_j(t)\, e^{i\gamma t}\, dt\right] = 0 , \quad ----(15)$$

$$\mathrm{Re}\left[i\gamma\oint_C X_j(t)\, e^{i\gamma t}\, dt\right] = X(-0) - X(+0) , \quad (16)$$

昭和　年　月　日

或いは

$$\gamma\Psi(-0)=\gamma\Psi(+0), \quad\text{-----}\quad (17)$$

$$\gamma\{\Phi(-0)-\Phi(+0)\}=X(-0)-X(+0), \quad (18)$$

と書ける。

もし X が一価ならば (18) は

$$\Phi(-0)=\Phi(+0), \quad\text{-----}\quad (19)$$

となる。

(15) は又 §2, (10), (11) から判るように、物体内部の特異点に基づく Γ は消える事を意味し、§2 (16) 等の表現で言えば、

$$H^{-}(z)=0, \quad\text{-----}\quad (20)$$

を意味する。

さて4つの基本解の中 f_0, f_3 は明らかに diffraction potential であるから、この速度の一価性の条件を入れると、結局

$$\left.\begin{aligned}F_1(z)&=f_1(z)+Af_0(z)+Bf_3(z),\\ F_2(z)&=f_2(z)+Cf_0(z)+Df_3(z),\end{aligned}\right\}\quad\text{-}(21)$$

のような互に独立の解を得るが、この内 F_1 は circulation free, F_2 は circulation を持つものであるので、一般的な解としては適当な点（上端又は下端）において速度が有限とすれば解は一義的に定まる。

今は解そのものにはとらわれないで $s\rightarrow 0$ の極限を考えよう。

(1) より

$$\frac{dz}{dw} = -is\,\mathrm{cn}(w)\,\mathrm{dn}(w), \quad \text{--} \tag{22}$$

$$\mathrm{cn}\,w = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2 w}, \quad \mathrm{dn}\,w = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 w}$$

$$\mathrm{cn}\,w = \sqrt{1+\frac{z^2}{s^2}}, \quad \mathrm{dn}\,w = \sqrt{1+z^2/b^2}$$

故に先づ

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2/b^2}}, \\ X_3 &= \frac{-z}{\sqrt{(1+\frac{z^2}{s^2})(1+\frac{z^2}{b^2})}} \end{aligned}\right\} \quad \text{--} \tag{23}$$

従って AOD に cut があるとすると

$$X_0 \fallingdotseq -X_3 \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad \text{for } s \to 0,\ b \to 1, \tag{24}$$

となって半空の場合の X_0 に一致する。

之に

$$X_2 = i\int_0^w dw = i\int_0^z \frac{dw}{dz}dz = \frac{1}{s}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+\frac{z^2}{s^2})(1+\frac{z^2}{b^2})}}$$

$$\xrightarrow[s\to 0]{} \int_0^z \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} = 2\int_1^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^2-1} = \ln\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right), \quad z=\frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right) \quad \text{---} \tag{25}$$

よって半空体の場合の X_2 の常数倍となる。

最後に、

$$X_1 = -z - i\int_0^w \mathrm{dn}^2 w\,dw + i\,\frac{K'-E'}{K'}\int_0^w dw$$

$$= -z + \frac{1}{s}\int_0^w \sqrt{\frac{1+\frac{z^2}{b^2}}{1+\frac{z^2}{s^2}}}\,dz - \frac{K'-E'}{K'}\frac{1}{s}\int_0^w \frac{dz}{\sqrt{(1+\frac{z^2}{s^2})(1+\frac{z^2}{b^2})}}$$

$$E'/K' \xrightarrow[k\to 0]{} 0$$

$$\longrightarrow -z + \int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2}} = -z + \sqrt{1+z^2}, \quad \text{--} \tag{26}$$

これは X_1 に一致する。

従って、半導体の potential に移行する事は明らかである。

この極限移行に従って斉次解は一つ減るけれども一方では領域が非連結になって解の一価性の条件(15),(16)は不要になるので やはり $F_2(z)$ は斉次解として残る事になる。

r	$B_0 r$	$B_1 r$	$B_2 r$	$-B_0 z$	$-B_1 z$	$-B_2 z$
0	1.570796	0	0			
.1	1.474615	.753025	.969000	2.427069	1.461560	2.178284
.2	1.385653	.722488	.939550	1.752703	1.120140	1.741528
.4	1.227103	.666450	.884956	1.114529	.789115	1.313972
.6	1.071032	.616425	.835567	.777522	.606386	1.073665
.8	.973992	.571674	.790775	.565347	.485274	.910950
1.0	.873085	.531550	.750050	.421024	.378093	.791006
1.5	.676323	.448001	.663173	.213806	.259519	.591879
2	.537451	.383178	.593360	.113894	.180067	.469085
3	.364593	.291517	.489387	.034740	.097726	.326787
4	.268405	.231766	.416723	.011160	.059379	.248385
5	.210416	.170828	.363576	.003191	.039191	.199566

r	A_0	A_1	A_2
0			
1	6.278906	3.145488	4.003320
2	6.346181	3.157332	4.013360
4	6.537039	3.204833	4.053660
6	6.861521	3.285090	4.121633
8	7.329430	3.399722	4.218525
[illegible]	7.954934	3.550992	4.346088
5	10.346678	4.111989	4.816189
	14.323042	4.997127	5.550008
	30.666877	8.279931	8.214609
	71.012095	15.330146	13.775222

G	$\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}-B_0 i}\right)$ L	$\dfrac{M}{-M=\mu'}$ M
	$\dfrac{B_0 i}{}$	$\dfrac{\frac{\pi}{2}+\int_0^x K_0 d\theta}{\frac{\pi}{2} x K_0}$
x A	$= \dfrac{K_1}{x K_0}$ B	C
0 G.	∞ (L)	∞ (M)
1	40.599752	5.017692
.2	13.624575	3.846359
.4	4.899720	3.422044
.6	2.792709	3.524443
.8	1.905423	3.822343
1.0	1.429626	4.253929
1.5	.864921	5.886396
2	.614018	8.508672
3	.385300	19.001784
4	.279660	44.658371
5	.219182	108.254269

T-2
030

75 X 20
500

x	$2\pi \frac{I_0}{K_0}$ $+H_d$	$\frac{2\pi}{xK_0(x)}$ $+H_1$	$\frac{2\pi(I_0+L_0)}{K_0}$ $-H_2$	$\alpha_{m0} = -H_1/H_2$	$\gamma q_m = 1-\overline{x}\alpha_m$
0 (A)	∞	∞ (B)	.0 (C)	∞	—
.1	2.595272	25.887937	2.760264	9.378791	.062121
.2	3.620796	17.724249	4.079270	4.393984	.121203
.4	5.865091	14.093797	7.326560	1.923658	.230537
.6	8.824856	13.468401	12.036842	1.118931	.328641
.8	12.964477	13.892305	19.037665	.729727	.416218
1	18.894248	14.923577	29.493629	.505993	.494007
1.5	48.392824	19.591542	84.132617	.232865	.650702
2	125.757629	27.583472	232.639778	.118567	.762866
3	882.753892	60.287697	1723.528194	.034979	.895063
4	6363.089660	140.752330	12629.776793	.011144	.955424
5	46370.442655	340.459713	12512.853907	.003680	.981600

T-3
031

0 $[\varphi] = 0$ の α

$\alpha_0 =$

x	$[\overline{\Phi}_d]$ $-Hd+2Gd$	$-[\overline{\Phi}_1]$ $-H_1+2G_1$ (A)	$[\overline{\Phi}_2]$ $-H_2+2G_2$ (B)	$-[\overline{\Phi}_1]/[\overline{\Phi}_2]$ α_3	0 $\gamma\varepsilon = 1-\gamma\alpha_3$
0				—	—
.1	−1.380132	+13.763533	+1.474232	9.336070	.066393
.2	−2.039636	+10.083683	+12.323202	4.340425	.131915
.4	−3.663279	+8.750671	+14.675156	1.871739	.251304
.6	−6.018420	+7.072365	+18.225158	1.076815	.353911
.8	−9.518833	+10.008233	[illegible]	.697815	.441748
1.0	−14.746814	+11.364113	[illegible]	.482236	.517764
1.5	−42.066308	+16.492640	[illegible]	.222336	.666496
2	−116.319889	+24.730740	+216.[illegible]	.114113	.771774
3	−861.764096	+57.695721	+1684.897130	.034243	.897271
4	−6314.988396	+138.297710	+12537.418769	.011031	.955876
5	−46356.421951	+338.070273	[illegible]	.003663	.981685

:33

T-5

$$Y/_{P} = -\alpha^2 A + \alpha B - C$$

A	B	C	α_{Ymax} B/2A	Y_{max}/H BB/4A-C	α_{Y0} X1	X2	α_{Y0}
1.634202	18.020641	25.892062	5.513590	23.787154	99.654577	.169838	.16984
2.542955	13.685193	11.663417	2.690805	6.748675	111.740004	.061734	.21235
5.043301	12.499335	6.033682	1.239202	1.710918	185.333810	.656754	.2627016
9.201672	13.614525	4.410357	.739785	.625556	338.859477	.479050	.28743
16.289201	15.852800	3.647914	.486605	.207109	636.135351	.373846	.2990768
28.424992	19.105682	3.210441	.336072	0	1086.159521	.336071	.33607
110.092506	32.772030	2.643962	.148839	-.205091			
405.425340	58.653142	2.368875	.072335	-.247528			
4758.300507	190.319839	2.098749	.019999	-.195672			
48464.40672	598.381165	1.965625	.006173	-.118599			
453441.7175	1818.357094	1.888556	.002005 .000025	-.063597			

$\alpha = \frac{1}{X}$

I-6

1 - γα

α μ

γ	C_0	C_1	C_2	M_1	$-M_2$	M_1/H_1	$-M_1/H_2$
0	1.570796	1.000000	1.570796	∞ (X)	0 (1)		—
.1	.721590	.938769	1.382145	6.047029	+.447714	.233585	−.350646 13.506455
.2	.663165	.882134	1.214553	3.966990	+.534487	.221320	−.484410 7.442051
.4	.560653	.781198	.933735	2.822593	+.787875	.200272	−.433016 3.582539
.6	.474607	.694573	.712945	2.424014	+1.157738	.179978	−.262797 2.104661
.8	.402318	.620063	.539863	2.218638	+1.596694	.159703	−.111616 1.389520
1.0	.341535	.555823	.404635	2.088181	+2.096461	.139925	+.003950 .996050
1.5	.228322	.430561	.184325	1.884123	+3.479005	.096170	.187645 .541570
2	.154273	.342152	.070163	1.747513	+4.919981	.063354	.296772 .351614
3	.073076	.232107	−.011754	1.561580	+8.401970	.025902	.442423 .185859
4	−.036639	.170872	−.023339	1.448947	+13.276616	.010294	.563460 .109135
5	.019588	.133955	−.018884	1.382483	+21.393686	.004061	.676895 .064621

$$C_0 = \gamma B_{0\gamma}' + B_{0\gamma}$$
$$C_1 = \gamma B_{1\gamma}' + B_{1\gamma}$$
$$C_2 = \gamma B_{2\gamma}' + B_{2\gamma}$$

$$M_1 = 2\gamma G_1 + \Phi_1(0) = 2\gamma C_1 + 2\gamma\lambda C_0$$
$$M_2 = 2\gamma G_2 + \Phi_2(0) = 2\gamma C_2 + 2\gamma\mu C_0$$

T-7

095

A	3	4	5	1	2	α
γ	α_S	α_{WO}	α_{MO}	α_{YO}	$\alpha_{Y\,MAX}$	$\alpha = \frac{1}{\gamma}$
0	R5	R4	R3	R6	R7	0
.1	9.33607	9.378791	13.506455	1.698381	5.513590	10
.2	4.340425	4.393984	7.422051	1.061734	2.690805	5
.4	1.871739	1.923658	3.582539	.656754	1.239202	2.5
.6	1.076815	1.118931	2.104661	.479050	.739785	1.666667
.8	.697815	.729727	1.389520	.373846	.486605	1.25
1.0	.482236	.505993	.996050	.336071	.336072	1
1.5	.222336	.232865	.541570	— 0	.148839	.666667
2	.119113	.118567	.357614	— 0	.072335	.5
3	.034243	.034979	.185859	— 0	.019999	.333333
4	.011031	.011144	.109135	— 0	.006173	.25
5	.003663	.003680	.064621	— 0	.002005	.2

$\frac{1}{.6} = \frac{5}{3}$

$\gamma\alpha = 1 - \gamma\varepsilon$

	1	2	3	4	5	6
γ	$\gamma\varepsilon_{YO}$	$\gamma\varepsilon_{YM}$	$\gamma\varepsilon_{S}$	$\gamma\varepsilon_{WO}$	$\gamma\varepsilon_{MO}$	[illegible]
0						
.1	-.83016	.448641	.066393	.062121	-.350646	0
.2	.78765	.461839	.131915	.121203	-.484410	0
.4	.73780	.504319	.257304	.230537	-.433016	0
.6	.71257	.556129	.353911	.328641	-.262797	0
.8	.70092	.610716	.441748	.416218	-.111616	0
1.0	.66393	.663928	.577764	.494007	.003950	0
1.5	—	.776742	.666496	.650702	.187645	0
2	—	.855330	.771774	.762866	.296772	0
3	—	.940000	.897271	.895063	.442423	0
4	—	.975308	.955876	.955424	.563460	0
5	—	.989975	.981685	.981600	.676895	0

$$A_w = \frac{2g}{U^2}(H_1 + \alpha H_2) =$$

γ	$\alpha = 0$	αY_0	αY_M	αS	αW_0	αH_0	$\alpha = 1/8$
0							
.1	5.177588	4.239992	2.133795	.023587	0	-2.278689	-.342940
.2	7.169700	5.437260	2.779092	.087393	0	-4.940920	-.988840
.4	11.275038	7.425640	4.011767	.304311	0	-9.723112	-3.378082
.6	16.162081	9.242582	5.476471	.608339	0 6	-14.238085	-7.911603
.8	22.227688	10.840240	7.405571	.972059	0 11	-20.097458	-15.847642
1.0	29.847154	10.023247	10.023188	1.401375	0 14	-28.907104	-29.140104
1.5	58.774826	—	21.207982	2.657497	0	-77.916478	-109.490608
2	110.333888	—	43.021895	4.144996	.000286	-216.863724	-354.945668
3	361.726194	—	154.913152	7.613538	.002438	-1560.273166	-3085.330194
4	1126.0186	—	502.299866	11.448~~448~~	.030949	-9909.9615	-24133.93495
5	3404.59713	—	1549.714409	15.851291	.124106	-56378.134	-181621.1107

T-37

$$c_w = R_w / \left(\frac{\rho}{2} U^2 L^2\right)$$

γ	0 $\alpha = 0$	1 α_{Y0}	2 α_{YM}	3 α_S	4 α_{W0}	5 α_{M0}	$\alpha = 1/\gamma$
0							
0.1	33.509269	22.471913	5.691351	.000695	0	6.490527	.147010
.2	32.127870	18.477371	4.827094	.004774	0	15.257934	.611128
.4	39.727023	17.231288	5.029462	.028939	0	29.543408	3.566075
.6	54.419348	17.796943	6.248278	.077099	0	42.233972	13.040304
.8	77.198455	18.361064	8.569138	.147640	0	63.110597	39.241837
1	111.356575	12.558186	12.558038	.245481	0	104.432585	106.143208
1.5	287.871389	—	37.481543	.588524	0	505.914798	999.016103
2	760.847928	—	115.680214	1.073812	0	2939.367164	7874.151702
3	5451.909976	—	999.920193	2.415249	0	1.014355E5	396635.9336
4	39622.4368	—	7884.536	4.095843	.000030	3.063407E6	18201463.00
5	2.8978204E4	—	60040.369	6.281586	.000385	7.946235E7	824655696.2

89 T-12

[illegible]	[illegible]	-.257636	-.164[illegible]	[illegible]53808	[illegible]	-.5[illegible]	-1.415547
	-.[illegible]76680	-.249910	-.136026	7.03873[illegible]	+∞ MEO	-.5	-1.023666
[illegible]	-.[illegible]9128	-.251155	-.131832	3.043470	+∞ MEO	-.5	-.701186
[illegible]	-.[illegible]4022	-.256915	-.155550	1.835161	+∞	-.5	-.576518
[illegible]	-.340277	-.260637	-.188520	1.317900	+∞ E5	-.5	-.522291
10	-.360075	-.223918	-.223916	1.037336	+∞ E5	-.5	-.499032
[illegible]	-.403830	—	-.306727	.753753	+∞ E6	-.5	-.488075
2	-.436646	—	-.370949	.639083	∞ E4	-.5	-.49[illegible]689
[illegible]	-.474098	—	-.446026	.503900	3119.561381	-.5	-.497590
4	-.489706	—	-.478228	.410162	335.79375	-.5	-.499380
5	-.495939	—	-.491356	.322720	104.551482	-.5	-.49988[illegible]

$C_{\gamma}^{(0)} = -\frac{1}{2}[\varphi]$

t	$\partial = 0$	$\partial\, Y_0$	$\partial\, Y_M$	$\partial\, S$	$\partial\, W_0$	$\partial\, M_0$	$\partial\, -\frac{1}{\delta}$
0							
1	6.881767	5.629863	2.817611	0	-.031490	-3.074058	-.489394
2	5.041842	3.808530	1.916200	-.000001	-.062215	-3.579620	-.766164
4	4.375336	2.840122	1.478604	0	-.121365	-3.999129	-1.468610
6	4.536183	2.518140	1.419770	0	-.177417	-4.329896	-2.484804
8	5.004117	2.323220	1.514611	-.000002	-.228847	-4.960306	-3.959790
0	5.682057	1.722191	1.722179	-.000045	-.279970	-6.054225	-6.100767
5	8.246320	—	2.725965	.000002	-.390513	-11.840209	-16.479974
2	12.365370	—	4.527104	.000013	-.482625	-25.735746	-41.814947
3	28.847861	—	11.999732	-.000106	-.620148	-127.728787	-251.968328
4	69.148858	—	30.452115	-.001275	-.709639	-614.986741	-1498.028488
5	169.045137	—	76.525709	.018372	-.766082	-2812.849089	-9059.825834

$CY - Y/(\frac{1}{2}\rho U^2 L^2)$.

T-1

γ	α=0	αYO	αWM	αS	αWO	αMO	α [illegible]
0							
.1	-51.78424	0	47.574310	-.181485	-1.254912	-161.230570	-18.211704
.2	-23.326834	0 5E-6	13.497354	-.342656	-1.255945	-100.349149	-13.622654
.4	-12.067364	1·0 1	3.421834	-.613849	-1.303541	-57.966011	-12.611952
.6	-8.820714	0 -1	1.251113	-.839304	-1.394394	-33.032209	-14.559364
.8	-7.299828	0 -1	.414217	-1.039100	-1.511443	-26.145528	-18.571581
1.0	-6.420882	0 1	0	-1.214539	-1.641439	-24.762209	-25.059502
1.5	-5.287924	~	-.410181	-1.599591	-1.964783	-34.371065	-59.451889
2	-4.737750	~	-.495056	-1.910295	-2.228143	-63.738638	-148.797278
3	-4.197498	~	-.391345	-2.322259	-2.526954	-262.189541	-934.717718
4	-3.931250	~	-.237199	-2.524350	-2.631997	-1027.788	-5762.791508
5	-3.773112	—	-.127194	-2.619999	-2.671382	-3555.796	-3555.76767