

昭和50年 7月 31日

流体力学理論に関する覚書(補遺II)
(斜航平板の問題)

別所正年

内容

	頁
概要	0
1. 速度ポテンシヤル	1
2. 逆流れと相反定理	7
3. 細長翼解	11
4. 力とモーメント	15~20
附録A 複素関数	A1~4
" B 積分	B1~2
" C 境界条件	C1~2

以上

概要

一様流れの中に小さな迎角 α をなして
長方形平板が板面を水平に刻いて垂直に
おかれた場合の問題を考えよう。

このような問題は船の操縦性指数等の
計算に必須のものと考えられ最近計算等
も行われ始めた。

ここでは流体力学理論的見地からこの
問題を考えて見た。

つまり所謂線積分項の困難が大変著し
く出て来るが問題が簡単であるので

その性質を考えるのに便利であるからである。

結論から見ると線積分項はこの場合平板の
水線における左右の水面変位の差（全没平板
ならば差はない）の速度ポテンシャルに及ぼす
影響であるから全没平板でなく限り、考え
ておいた方が無難であろう。

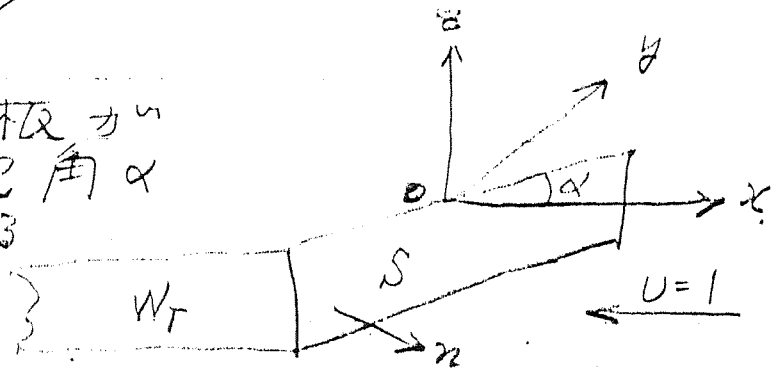
しかし普通の流体力学近似を考へる限りは
これは全く平板上の境界値問題に直線なく
決められる。

事のついでに細長翼近似によるポテンシャル近似
解を使って力、モーメント等を与える式を
導いておいた。

一寸変わった所では流体力学はこの近似を
採用すると無限大になる。

1. 速度ポテンシヤル

垂直な長方形平板が進行方向に対し迎角 α を有して図のようにあるものとする。



その速度ポテンシヤルを ϕ とすると水面条件は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x, y, 0) = 0, \quad (1)$$

水面変位 ζ は

$$\zeta(x, y) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, 0), \quad (2)$$

と与えられる。

平板上の境界条件は流体力学の習慣に従って次のようにおく。

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0, z) = \alpha \quad \text{on } S, \quad (3)$$

(1)の条件を満たす極値函数 ϕ (附録A) を使えば速度ポテンシヤルは一般に次のように表わす。

$$\phi(P) = \iint_{S+W_T+F} \left\{ \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) - S(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial n}(Q) \right\} dS(Q) \quad (4)$$

$$P \equiv (x, y, z), \quad Q \equiv (x', y', z')$$

但し F は水面とする。

S と W_T 上では $\partial \phi / \partial n$ は連続であるから ϕ は

$$\Delta \phi(x, 0, z) = \phi(x, -0, z) - \phi(x, +0, z), \quad (5)$$

なる $\Delta \phi$ が $z=0$ においてあるものとしさらに $z=0$ の圧力差を次のように定義しよう。

$$\frac{1}{\rho} p(x, z) = - \frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi(x, 0, z), \quad (6)$$

そうすると W_T 上では $p=0$ であるから (4) を積分
 積分して二次の表現を得る。

$$\phi(p) = \phi_S(p) + \phi_L(p), \quad (7)$$

$$\phi_S(p) = \frac{1}{\rho} \iint p(x', z') K(x, y, z; x', 0, z') dx' dz', \quad (8) \quad \text{(明瞭)}$$

$$\phi_L(p) = - \frac{1}{g} \int \Delta \phi(x', 0, 0) \frac{\partial}{\partial x'} S(x, y, z; x', 0, 0) \frac{d\psi(x')}{dx'} dx', \quad (9)$$

但し $\psi(x')$ は平板の水線のオフセットとする。

この ϕ_L は 非線形積分項であって ϕ_L に較
 べると明らかに高次の項であるので 非線形
 理論としての整合性を保つためには無視
 すべきものと考えられる。

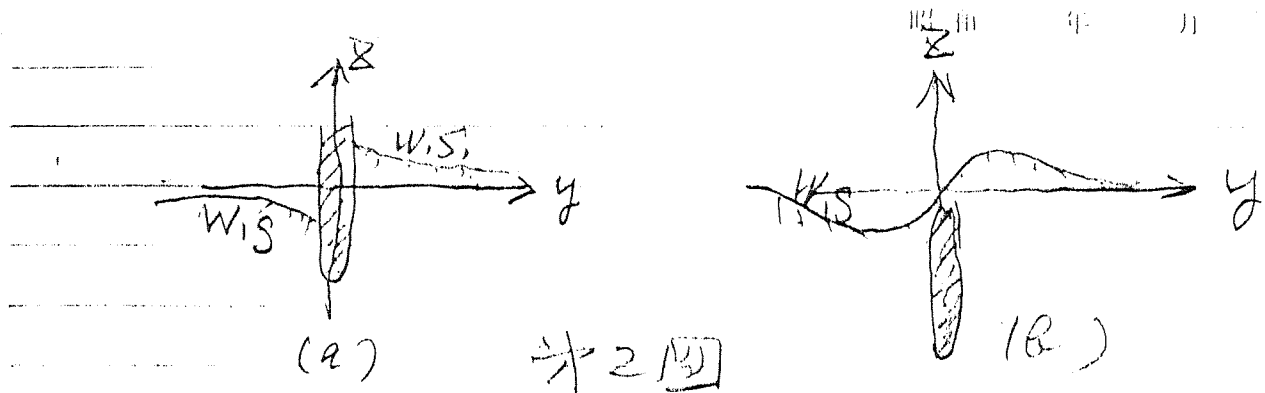
しかしながら (9) に おける 2重積分項は (2)(5)
 (6) に よる

$$\frac{1}{g} \Delta \phi(x', 0, 0) = - \int_0^x \Delta \zeta(x) dx, \quad (10)$$

$$\Delta \zeta(x) = \zeta(x, -0) - \zeta(x, +0) = \frac{1}{\rho g} p(x, 0),$$

となるので 水2面のようにこれは 全没 平板では
 0 と考えてよいけれど 半没 平板の時には
 有限と考えられる。

つまり 全没であるか どうかを 区別する項で
 あると 考えられる。



又(9)式は細長体の速度ポテンシヤルと
 同する事も出来るが、そうすると $\Delta\phi$ の値が
 前後端で微係数迄の1にならないと
 造波抵抗は無限大となる。

換言すれば(9)式は(8)よりオーダーが
 高ければ造波抵抗では同じオーダーに
 なる可能性があるので造波抵抗を考える
 際には残しておいた「少くとも」オカよかろう。

さて速度ポテンシヤルが(7)のように与え
 られると境界条件(3)は核函数の対称性
 から ϕ_s のみで定まり α は関係しなく
 なる。

即ち

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0, z) = \frac{\partial}{\partial y} \phi_s(x, 0, z) \text{ on } S \quad (11)$$

これは(8)(9)から見るとように ϕ_s は左右反対称の
 な速度ポテンシヤルであるが ϕ_s は左右対称の
 なポテンシヤルとなつてゐる故である。

もう少し厳密に考えると(9)の2番目の項は平板
 $y = z(x)$ におかなければならぬ。

その時には(11)は成立せず板上の境界条件
 は後述となり又ポテンシヤルは α に対して
 線型とならない事は Ballay の場合と似て来る**

* 別紙「造波抵抗理論に際する覚書」(講演)

** W. Ballay; Z. A. M. Bd. 19, 1939.

こゝでは z までには考えない事にすると (9) は

$$\phi_L(P) = -\frac{1}{g} \int \Delta \phi_S(x', y', z') \frac{\partial}{\partial x'} S(x, y, z) x', y', z' \frac{d^2(x', y', z')}{dx' dy'} \quad (12)$$

と書ける。

船底板の上端が水面上に出ている時は左右対称なこの項が現われるのが全没平板との差となる。

この項は又次のようにして考察する事も出来る。即ち先ず有限幅の船を考へてその波/近似として (8) のような速度ポテンシヤルを考へよう。そうすると水面は $\frac{\partial \phi_S}{\partial x}(x, y, 0)$ だけ変位する。この水面変位を排せきする為の平板の近似によつて速度ポテンシヤルを求めると

$$\phi'_L(P) = -\frac{1}{g} \int_{\bar{A}} \frac{\partial \phi_S}{\partial x}(x', y', 0) dx' dy' \quad (13)$$

\bar{A} は船の水線面とする。

上式を密着積分として幅が充分狭いとすると (12) に移行する。

それ故この項は排水量型船の場合同様所謂 Sheltering Effect と表現していると考へられる。

* M. Bessho "Line Integral, Uniqueness and Diffraction of Wave" Feb. 1976 (予定)

無限後流では 所定区 A によ

$$\phi_S(x, y, z) \longrightarrow \frac{y_0}{2\pi\rho} \iint p(x', z') dx' dz' \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2 z} \right) + \frac{i g}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x, y, z; \theta) H_S(\theta) \frac{\Delta p(x', z')}{|\cos \theta|} d\theta, \quad (14)$$

区 L

$$\phi_0(x, y, z; \theta) = \exp \left[g \{ z + i(x \cos \theta + y \sin \theta) \} \rho e^{i\theta} \right], \quad (15)$$

$$H_S(\theta) = \frac{1}{\rho} \iint p(x', z') \overline{\phi_0(x', 0, z')} dx' dz', \quad (16)$$

$$\phi_L(x, y, z) \longrightarrow -\frac{i g}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x, y, z) H_L(\theta) \frac{\Delta p(x', z')}{|\cos \theta|} d\theta, \quad (17)$$

$$H_L(\theta) = \int \Delta \phi(x', 0, \theta) \frac{\partial \eta(x')}{\partial x'} \overline{\phi_0(x', \eta(x'), z')} dx', \quad (18)$$

この最後の式で $\overline{\phi_0(x', 0, z')}$ とすると前述のようにこの項による比流抵抗が無限大となるのでこれを有限にする為には y を有限としておく必要がある。

昭和 年 月 日

最後に、散乱ポテンシャル ϕ_a を定義しておこう。
境界条件は

$$\frac{\partial \phi_a(x, 0, z; \theta)}{\partial y} = - \frac{\partial \phi_0(x, 0, z; \theta)}{\partial y}, \quad \text{on } S, \quad (19)$$

$$\phi_a(x, y, z; \theta) = \phi_{as}(x, y, z; \theta) + \phi_{al}(x, y, z; \theta), \quad (20)$$

$$\phi_{as}(x, y, z; \theta) = \frac{1}{\rho} \iint \rho_a(x', z') K(x, y, z; x', 0, z') dx' dz', \quad (21)$$

$$\phi_{al}(x, y, z; \theta) = - \frac{1}{f} \int \Delta \phi_{as}(x', 0, 0) \frac{\partial \eta'}{\partial x'} S \frac{\partial \eta'}{\partial x'} dx', \quad (22)$$

$$\text{又} \quad \Phi_a(x, y, z; \theta) = \phi_0(x, y, z; \theta) + \phi_a(x, y, z; \theta), \quad (23)$$

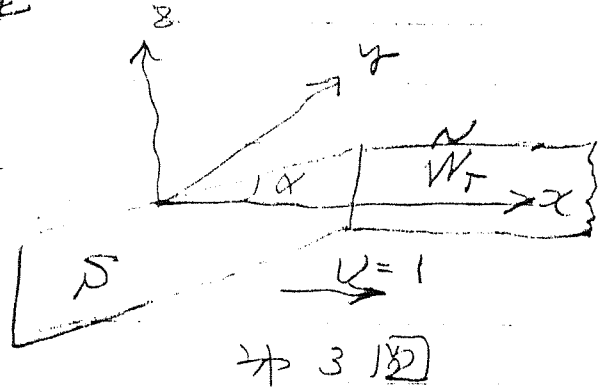
と書くと

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_a(x, 0, z; \theta)}{\partial y} = 0 \quad \text{on } S \quad (24)$$

$$\Delta \bar{\Phi}_a(x, 0, 0; \theta) = \Delta \phi_a(x, 0, 0; \theta), \quad (25)$$

2. 逆流れと相反定理

図1の一般流れを逆にした流れを逆流れと名づけ
以下その諸量を (\sim) 印によつて区別しよう。



境界条件は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \tilde{\phi}(x, y, 0) = 0, \quad (1)$$

$$\tilde{\psi}(x, y) = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\phi}(x, y, 0), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{\phi}(x, 0, z) = - \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0, z) \text{ on } S \quad (3)$$

となる。

境界ポテンシャルの表現は前節同可也。

$$\tilde{\phi}(x, y, z) = \tilde{\phi}_0(x, y, z) + \tilde{\phi}_L(x, y, z), \quad (4)$$

$$\tilde{\phi}_0(x, y, z) = -\frac{1}{\rho} \iint \tilde{p}(x', z') K(x, y, z; x', 0, z') dx' dz', \quad (5)$$

$$\tilde{\phi}_L(x, y, z) = \frac{1}{g} \int \Delta \tilde{\phi}(x', 0, 0) \frac{\partial}{\partial x'} \tilde{S}(x, y, z; x', 0, 0) \frac{d\eta}{dx'}, \quad (6)$$

2212

$$\frac{1}{\rho} \tilde{p}(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} \Delta \tilde{\phi}(x, 0, z), \quad (7)$$

$$\Delta \tilde{\phi}(x, 0, z) = \tilde{\phi}(x, -0, z) - \tilde{\phi}(x, +0, z), \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{K}(x, y, z; x', y', z') &= K(x', y', z'; x, y, z), \\ \tilde{S}(x, y, z; x', y', z') &= S(x', y', z'; x, y, z). \end{aligned} \right\} (9)$$

昭和 年 月 日

無限後流側つまり $x \gg 1$ では

$$\tilde{\phi}_0(x, y, z) \rightarrow + \frac{y}{2\pi P} \iint \tilde{P}(x', z') dx' \left(\frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_{12}} \right) - \frac{i\theta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\phi}_0(x, y, z; 0) H_S(\theta) \frac{\sec^2 \theta \sin \theta}{|\cos \theta|} d\theta, \quad (10)$$

$$\text{ただし } \tilde{\phi}_0(x, y, z; 0) = -\overline{\phi_0(x, y, z; 0)}, \quad (11)$$

$$-H_S(\theta) = \frac{1}{P} \iint \tilde{P}(x, z) \phi_0(x, 0, z) dx dz, \quad (12)$$

$$\tilde{\phi}_L(x, y, z) \rightarrow + \frac{i\theta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\phi}_0(x, y, z) H_L(\theta) \frac{\sec^2 \theta}{|\cos \theta|} d\theta, \quad (13)$$

$$H_L(\theta) = \int \Delta \tilde{\phi}_S(x', 0, 0) \frac{\partial}{\partial x'} \phi_0(x', y(x'), z') dx', \quad (14)$$

又 散乱ポテンシヤルは次のように定義しよう。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\phi}_d(x, y, z; 0) &= -\frac{\partial}{\partial y} \tilde{\phi}_0(x, y, z; 0) \text{ on } S, \\ \tilde{\phi}_d(x, y, z; 0) &= \tilde{\phi}_0 + \tilde{\phi}_a, \quad \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\phi}_a = 0 \end{aligned} \right\} (15)$$

さて(15)の条件を満足する連続ポテンシヤルの和 $\phi_0 + \tilde{\phi}_0$ を考えると境界条件は(3)によつて S 上の法線微分が 0 となり $x \ll 0$ では(14)の右辺のようになる。

今境界値問題が一義的に定まるならば"境界条件 0 に対して解は恒等的に 0 となる故に結局 0 の関係を得る。

(この為には夫の板後端においてクツタの条件を満足しなければならぬ)

$$\phi(x, y, z) + \tilde{\phi}(x, y, z) = \phi_s^{(t)}(y, z)$$

$$+ \frac{i\beta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_d(x, y, z; \theta) H_s(\theta) \frac{\sec^2 \theta \sin \theta}{(\cos \theta)} d\theta \quad (16)$$

$$\phi_s^{(t)}(y, z) = \frac{y}{2\pi p} \iint p(x', z') \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p'^2} \right) dx' dz' \quad (17)$$

— 又 $z \gg 0$ における漸近展開 (10) から出発すれば

$$\phi(x, y, z) + \tilde{\phi}(x, y, z) = \tilde{\phi}_s^{(x)}(y, z)$$

$$- \frac{i\beta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\Phi}_d(x, y, z; \theta) \tilde{H}_s(\theta) \frac{\sec^2 \theta \sin \theta}{(\cos \theta)} d\theta \quad (18)$$

$$\tilde{\phi}_s^{(x)}(y, z) = \frac{y}{2\pi p} \iint \tilde{p}(x', z') \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p'^2} \right) dx' dz' \quad (19)$$

を得る。

よって (16), (18) から

$$\phi_s^{(t)}(y, z) = \tilde{\phi}_s^{(x)}(y, z) \quad (20)$$

と 散乱ポテンシヤルと 振幅関数の関係を得る。
又 p, \tilde{p} の定義から 例へば (16) を積分して

$$\frac{1}{p} \{ p(x, z) - \tilde{p}(x, z) \} = \frac{i\beta}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_d(x, z; \theta) H_s(\theta) \frac{\sec^2 \theta \sin \theta}{(\cos \theta)} d\theta \quad (21)$$

のよう(な)関係を得る事が出来る。

— 一般にこれ長方形平板では明らか
対称性から

$$\tilde{p}(x, z) = -p(-x, z), \quad \dots \dots \dots (22)$$

であるから (21) は結局自分の作った波を散乱させる車による異変と云える。

最後に 相反定理について考えよう。

この場合 花岡のホの定理の方はあまり用をなさず不便であるのでホの定理についてのみ考えよう。

又 ϕ_1 と ϕ_2 は今の近似では左右対称反対称いとなつて全く独立なホラニシヤルでホ相互にホ係しなホで ϕ_1 なら ϕ_2 のみでホ相反定理を考へる事が出来る。

一方 ϕ_2 はホ力にもホ力にもホ係しなホ抗力にのみホ係がありあまり用がなホのでホ以下 ϕ_2 についてのみ考えよう。

さて今ホ力分布 p_1, p_2 に基づく ϕ_{s1}, ϕ_{s2} なるホなホラニシヤルがあるホ時ホ横断断のホ相反性 (19) よりホ積分順序のホ交換により直ちに

$$\iint_S p_2(x, z) \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial y} (x, 0, z) dx dz = - \iint_S p_1(x, z) \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial y} (x, 0, z) dx dz \quad (23)$$

存在ホ相反定理を得る。
この際ホ積分順序のホ交換が可能である
意には p_1, p_2 はホ振後ホ線ホにおいてホウツウツのホ条件を満たしていなければホならない。

* 花岡,

3. 組長解

1節の所論により線積分項は板表面境界条件には無関係である故境界値問題としては従来の研究と同様であり、アスペクト比の大い場合、小さい場合共に解かれている通りである*。

ここではアスペクト比の小さい場合について考えて見ることが多い限り、前節迄の式で ϕ_0 等の下添字は略す事にする。

さて速度ポテンシャルは (18) 即ち

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{P} \int_{-z}^0 \int_{-\infty}^{\infty} P(x', z') K(x, y, z; x', 0, z') dx' dz'$$

であるが、組長理論では一度部分積分して

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{P} \int_{-z}^0 \int_{-\infty}^{\infty} P(x', z') K_{x'}(x, y, z; x', 0, z') dx' dz', \quad (1)$$

2212

$$P(x, z) = \int_x^{\infty} P(x', z) dx', \quad (2)$$

と書き、 $\varepsilon (\ll 1)$ なる長 ε を導入して右辺の x' に適する積分範囲を $[x-\varepsilon < x' < x+\varepsilon]$ とその他の両側の二つに別り、前者の領域で P が一定であると仮定すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \frac{1}{P} \int_{-z}^0 dz' P(x, z') [K(x, y, z; x-\varepsilon, 0, z') - K(x, y, z; x+\varepsilon, 0, z')] \\ & + \frac{1}{P} \int_{-z}^0 \left[\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} P dx' \right] P K_{x'} dx' dz', \quad (3) \end{aligned}$$

* 野中, "斜行する船の半無限く幅力への自由表面影響" J. T. C. June 75 丸尾, 造船協会会報 86号(折稿) 昭和28年2月.

iv. A. Daoud, "Flow and Moment on asymmetric and yaw bodies in a free surface" Univ. of Calif. Berkeley, 1973.

ε > ε' 更に ε >> ε < 仮定すると附録 A による

$$K(x, y, z; x', 0, \epsilon') - K(x, y, z; x - \epsilon, 0, \epsilon') \rightarrow \frac{y}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} \right) \quad (4)$$

ε' あり又 (3) 右辺 2 項 ε' は ε >> |z|/c あり

$$K_x(x, y, z; x', 0, \epsilon') \rightarrow \frac{y}{2\pi(x-x')^3} \quad \text{for } x >> x'$$

$$\rightarrow \frac{y}{2\pi(x-x')^3} + \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} P(-\sqrt{x-x'}, y, -\sqrt{z+\epsilon'}) \quad \text{for } x << x' \quad (5)$$

と仮定。
それら

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-1}^1 P(x, z') \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} \right) y dz' + \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} P(x, z') K_x(x, y, z; x', 0, \epsilon') dx' dz' \quad (6)$$

* は x' についての積分 (x ± ε) の間積分して...
率を示すものとする。

この表示において右辺 2 項を省略したものの...
所謂 組長 管 理論 における 近場表示である。
右辺 2 項の積分は 普通の意味では有限確定
でないので少し工夫をしなければならぬ。これを
若くは入れると 所謂 横波の 誘導速度の
影響を考えた率になり、今は又波の影響
を若くは入れる率になる。

そこで 普通の 組長 管 理論 を採用する本
とすると 最終的に

* 別紙 "組長 管 理論 に関する 覚書" 昭和 47 年

昭和 年 月 日

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi P} \int_{-z}^0 P(x, z') \left(\frac{1}{Pz} + \frac{1}{Pz'} \right) y dz', \quad (7)$$

それ故

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0, z) = \frac{1}{2\pi P} \int_{-z}^0 P(x, z') \left(\frac{1}{(z-z')^2} + \frac{1}{(z+z')^2} \right) dz', \quad (8)$$

この場合境界条件である。

与えられる境界条件は
単位仰角の平板壁では

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 1, \quad (9)$$

キャンバーに対して

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \alpha, \quad (10)$$

壁面のねじれに対して

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = +z, \quad (11)$$

又散乱に対しては

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -i g \operatorname{arccot} \operatorname{arctg} \phi_0(x, 0, z; \theta), \quad (12)$$

(下添数字は以下上の意味にとるものとする)

今は長方形平板を考へてゐるので解は直ちに
尋せ下せる。

附録Bの積分を参照して

$$\frac{1}{P} P_1(x, z) = -2\sqrt{x^2 - z^2}, \quad (13)$$

$$\frac{1}{P} P_2(x, z) = 2x\sqrt{x^2 - z^2}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{P} P_3(x, z) = \frac{4x}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2n\pi u}{(2n+1)^2 - 4}, \quad (15)$$

$$C \phi u = -z$$

$$-ig \cos \theta \sin \theta e^{ikx \cos \theta}$$

$$\frac{P_d(x, z)}{P} = \frac{8t}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kt \cos u} \sin u' du' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2nt+1)u}{2nt+1} \sin(2nt+1)u' \quad (16)$$

$$k = g \cos^2 \theta,$$

$$\frac{1}{P} \int_{-t}^0 P_1(x, z) dz = -t^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi t^2}{2},$$

$$\frac{1}{P} \int_{-t}^0 P_2(x, z) dz = \pi t^2,$$

$$\frac{1}{P} \int_{-t}^0 P_3(x, z) dz = -\frac{4}{3} t^2,$$

(17)

$$\frac{1}{P} \int_{-t}^0 P_d(x, z) dz = \frac{\pi \sin \theta}{i} \{ I_1(kt) - L_1(kt) \} e^{ikx \cos \theta}$$

5.1 (16) 1253 コツ42) (2) 1253 P 1253

$$H_1(\theta) = 2 \int_{-t}^0 \sqrt{t^2 - z^2} e^{kz + ikz \cos \theta} dz =$$

$$= \frac{\pi t}{k} \{ I_1(kt) - L_1(kt) \} e^{-ikz \cos \theta}$$

$$H_2(\theta) = H_1(\theta) - 2 \int_{-t}^0 e^{-ikx \cos \theta} dx \int_{-t}^0 \sqrt{t^2 - z^2} e^{kz} dz$$

$$= \left\{ 1 + 2 \frac{\sin(k \cos \theta)}{k \cos \theta} \right\} H_1(\theta),$$

$$H_3(\theta) = \frac{4t^2}{\pi} e^{-ikx \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 - 4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kt \cos u} \sin(2nt+1)u \sin u du,$$

25 4 1253

(18)

4. 力とモーメント.

先ず"揚力, 回一モーメント, ロールモーメント" について考へよう。

$$L = \iint P(x, z) dx dz, \quad (1)$$

$$M_y = \iint P(x, z) x dx dz, \quad (2)$$

$$M_R = \iint P(x, z) z dx dz, \quad (3)$$

アスファルトの小さな時は前節の解を代入して, 第一近似として (平板について).

$$L_0 = \alpha \rho \int_{-t}^0 P_1(x, z) dz = \alpha \rho \frac{\pi}{2} t^2, \quad (4)$$

$$M_{y_0} = \alpha \rho \frac{\pi}{2} t^2, \quad M_y/L = 1, \quad (5)$$

これは細長管理論の解である。

$$M_{R_0} = 2\alpha \rho \int_{-t}^0 \sqrt{t^2 - z^2} z dz = -\frac{2}{3} \alpha \rho t^3, \quad (6)$$

次の近似を得るには 相互定理を用いて前節の添字を用い (1), (2), (3) を

$$L = -\iint \tilde{P}_1 \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dz, \quad (7)$$

$$M_y = -\iint \tilde{P}_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dz, \quad (8)$$

$$M_R = -\iint \tilde{P}_3 \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dz, \quad (9)$$

と書いておくと簡単である。

勿論これらの式は Membré の定理として任意型
の力およびモーメントを計算するのに使う
本も出来る。

今はこの式において \bar{P} には前節の解を使い
 $\partial\phi/\partial y$ にはその解を入れた時の自由表面条件を
満たす解を代入して見よう。

先ず

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{1}{\bar{P}} \int_{-t}^0 P(x, z') dz' \cdot K_y(x, 0, z; 1, 0, z') \\ &= 2 \int_{-t}^0 \sqrt{t^2 - z'^2} K_y(x, 0, z; 1, 0, z') dz' \quad (10) \end{aligned}$$

ここで \bar{P} については、§2 (22) の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{\bar{P}\alpha} L_1 = 4 \int_{-t}^0 \int_{-t}^0 \sqrt{t^2 - z^2} \sqrt{t^2 - z'^2} K_y(-1, 0, z; 1, 0, z') dz dz' \quad (11)$$

$$\frac{1}{\bar{P}\alpha} M_{y1} = \frac{L_1}{\bar{P}\alpha} + 4 \int_{-t}^0 dx \int_{-t}^0 \sqrt{t^2 - z^2} (t^2 - z'^2) K_y(x, 0, z; 1, 0, z') dz dz' \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{P}\alpha} M_{R1} &= \frac{8t^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 - 4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)u \sin u \cos u du \int_{-t}^0 \sqrt{t^2 - z'^2} dz' \\ &\quad \times K_y(-1, 0, -\cos u; 1, 0, z'), \quad (13) \end{aligned}$$

附録 (A.15) によつて $x \ll x' = 1$ と仮定すると

$$\begin{aligned} K_y(x, 0, z; x', 0, z') &\doteq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(z-z')^2} + \frac{1}{(z+z')^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{g^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} + g \frac{d^2}{dz^2} \right) Y_0(g|x-x'|), \quad (14) \end{aligned}$$

と おくと (10) は

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=1} = 1 + \frac{\pi}{2g^2} \left(\frac{d^4}{dx^4} + g^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) Y_0(gx-1) \Big|_{x=1}, \quad (15)$$

と表わす。

$$\frac{L}{\rho \nu} = \frac{\pi x^2}{2} \left[1 + \frac{\pi}{2g^2} \left(\frac{d^4}{dx^4} + g^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) Y_0(2gx-1) \Big|_{x=1} \right], \quad (16)$$

等を得、野中(前出)の結果に似ている。
 M_y については少し面倒であるが似た結果を得る事は明らかであろう。

次に興味があるのは平板下端にかけた速度の無限性から垂直力が僅かであること、高次の項を省略するとすれば

$$\Sigma_0 = -\rho \int_0^1 \Delta \phi(x; 0, 0) \frac{d^2}{dx^2} dx, \quad (17)^*$$

と表わされるから §1 (10), §3 (2) より

$$\Delta \phi = g \int_0^1 \Delta \zeta dx = \frac{1}{\rho} \int_0^1 \rho(x, 0) dx = \frac{P(x, 0)}{\rho}, \quad (18)$$

となる。平板では、沖の2次近似として

$$\Sigma_0 = -2t\rho \alpha^2, \quad (19)$$

となる。

* 別冊 "半没垂直平板の造波抵抗について" 昭和50年
2次元

昭和 年 月 日

最後に抗力については、積分

$$D' = \iint P(x, z) \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dz, \quad (20)$$

が正しい抗力を与えない場合はよく知られている通り
 ②この式で積分すれば

$$D' = \alpha L, \quad (21)$$

となる。

正しい抗力は後流における運動量積分によ
 り求められる*と考える理由は、前を
 流して見ると

$$D = \frac{\rho}{2g} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{z=0}^2 dy + \frac{\rho}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} dy dz, \quad (22)$$

となる。

この ϕ に § 1 (7) を代入し ϕ_0 と ϕ_1 はそれぞれ
 対称、反対称に別かいて、核が興隆管流で
 § 1 (4) のように近似される本を考慮して式に
 代入して計算すると

$$D = D_i + D_w, \quad (23)$$

$$D_i = \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{-t}^0 P(-1, z) P(-1, z') \left\{ \frac{1}{(z-z')^2} + \frac{1}{(z+z')^2} \right\} x dz dz', \quad (24)$$

$$D_w = D_{ws} + D_{wl}, \quad (25)$$

* F. Ursell and G.M. Ward; Q. J. M.A.M. vol 3, 1950

$$D_{ws} = \frac{\rho g^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |H_s(\theta)|^2 \sec^5 \theta \sin^2 \theta d\theta, \quad (26)$$

$$D_{wL} = \frac{\rho g^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |H_L(\theta)|^2 \sec^5 \theta d\theta, \quad (27)$$

となり 誘導抵抗と送波抵抗は分離出来てこの間に干渉項はなく又線積分の寄与も ϕ_s とは独立になる。

この後者の結論は線積分が左右対称のポテンシャルとなる事から出て来る。

今の近似では先ず

$$D_i = \frac{\pi \rho}{4} t^2 \alpha^2 = \frac{\alpha}{2} L_0, \quad (28)$$

これより (18) より

$$D_{ws} = \frac{\rho}{\pi} t^2 \alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ I_0(gt \sec \theta) - L_1(gt \sec \theta) \}^2 \sec^5 \theta \sin^2 \theta d\theta, \quad (29)$$

又 §1 (18), §3 (13), (18) より

$$H_L(\theta) = 2t\alpha^2 \int_{-1}^1 \frac{-igx(1+\alpha \tan \theta) \sec^2 \theta}{L} dx,$$

$$= \frac{4t\alpha^2 \cos^2 \theta}{g(1+\alpha \tan \theta)} \sin \{ g(1+\alpha \tan \theta) \sec^2 \theta \} \quad (30)$$

となるので (29) に代入すれば D_{ws} は $O(\alpha^4)$ の小ささと考えられるが (30) からわかるように \sin 項は $O(\alpha^4)$ より小さい "オーダー" に存在するので必ずしも無視しえない。

ゆで $\alpha \rightarrow 1$ ならば

$$I_1(\alpha) - U_1(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2}{\pi}$$

なる故

$$D_{ws} = \frac{4P}{\pi^3} k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec \theta \sin^2 \theta d\theta \rightarrow \infty \quad (31)$$

となつて D_{ws} の値分も収束しない。
 この場合の解は船首船尾における集中渦によるものであるから造波抵抗が無限大となる事は予想される事である。
 (垂直円筒でも直径を無限小とすると造波抵抗は無限大である)
 この困難をさける為には境界値問題をもう少し正確にといつて圧力が集中しない解を用いてコッシーノ関数を計算するより他に方法は無い。

附錄 A 核函數

定義式

$$S(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) - \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z+z') + ik(\omega - \omega')}}{kr^2 \cos^2 \theta - \gamma + \mu i \cos \theta} d\theta dk, \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} S(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{y-y'}{r^3} + \frac{y-y'}{r'^3} \right) + \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z+z') + ik(\omega - \omega')}}{kr^2 \cos^2 \theta - \gamma + \mu i \cos \theta} dk d\theta, \quad (A.2)$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \quad r' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$$

$$\omega = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \omega' = x' \cos \theta + y' \sin \theta$$

$$K(x, y, z; x', 0, z') = \int_{-\infty}^{x'} S_{y'}(x, y, z; x', 0, z') dx'$$

$$= K^{(0)}(x, y, z; x', 0, z') + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} O_{-1}^{(1)}(\gamma x - x', \gamma y, \gamma z + z') \quad (A.3)$$

$$K^{(0)} = \frac{1}{4\pi p^2} \left(1 - \frac{x-x'}{r} \right) + \frac{1}{4\pi p'^2} \left(1 - \frac{x-x'}{r'} \right), \quad (A.4)$$

$$p^2 = y^2 + (z-z')^2, \quad p'^2 = y^2 + (z+z')^2$$

$$K^{(0)} \begin{cases} x > -1 \\ x < -1 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{4\pi (x-x')^2} \quad \left. \right\} (A.5)$$

$$\frac{1}{2\pi p^2} + \frac{1}{2\pi p'^2}$$

$$O_{-1}^{(1)}(gx, gy, -gz) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{+kz + ik\tilde{w}} \cos\theta dk d\theta}{k\omega^2\theta - \gamma + \mu i \cos\theta}, \quad (A.5)^*$$

$x \gg 1$ のとき

$$O_{-1}^{(1)}(gx, gy, -gz) \rightarrow \frac{x}{2g\gamma(r-z)} \rightarrow \frac{1}{2g\gamma}, \quad (A.7)^*$$

極限

$$\frac{\partial}{\partial y} O_{-1}^{(1)} \rightarrow \frac{-x}{\pi g} \left\{ \frac{y}{r^2(r-z)} + \frac{y}{\pi r^2(r-z)^2} \right\}$$

$$\rightarrow -\frac{zy}{\pi g r^3}, \quad (A.8)$$

$x < 0$ のとき

$$O_{-1}^{(1)}(gx, gy, -gz) = -O_{-1}^{(1)}(-gx, gy, -gz) + 2P_{-1}(-gx, +gy, -gz), \quad (A.9)^*$$

$$P_{-1}(gx, gy, -gz) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} e^{gz \sec^2\theta} \cos(gx \sec\theta) \cos(gy \sec\theta \sin\theta) \frac{d\theta}{\cos\theta}, \quad (A.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_{-1} \Big|_{y=0} = 0$$

(A.11)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{-1} \Big|_{y=0} = -gz \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{gz \sec^2\theta} \cos(gx \sec\theta) \sec^5\theta \sin^2\theta d\theta,$$

$$\begin{aligned}
 P_1(gx, 0, 0) &= -\frac{\pi}{2} Y_0(gx) \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^2} P_1(gx, 0, 0) &= \frac{\pi}{2g^2} \left(\frac{d^4}{dx^4} + g^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) Y_0(gx)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} P_1(gx, 0, 0) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} P_1(gx, 0, 0) \end{aligned}} \right\} (A.12)$$

結局

$$\begin{aligned}
 K(x, y, z; x', 0, z') &\xrightarrow{x \ll x'} K^0(x, y, z; x', 0, z') \\
 &\rightarrow \frac{y}{4\pi(x-x')^2} \quad (A.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(x, y, z; x', 0, z') &\xrightarrow{x \ll x'} \frac{y}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} \right) + \frac{y}{8\pi(x-x')^2} + \\
 &+ \frac{2y}{\pi g(x-x')^3} + \frac{2y}{\pi g^2} P_1(-g\sqrt{x-x'}, gy, -g\sqrt{x-x'}) \quad (A.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_y(x, 0, z; x', 0, z') &\xrightarrow{x \ll x'} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} \right) + \frac{1}{8\pi(x-x')^2} + \\
 &+ \frac{1}{g^2} \left(\frac{d^4}{dx^4} + g^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) Y_0(g\sqrt{x-x'}) \quad (A.15)
 \end{aligned}$$

(A.14)の又2つ目の項は4乗の項は

$$\begin{aligned}
 K(x, y, z; x', 0, z') &\rightarrow \frac{y}{2\pi} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} \right) \\
 &+ \frac{y}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x, y, z; \theta) \overline{\phi_0(x', 0, z') x} \\
 &\quad \sec\theta \sin\theta \sec\theta d\theta \quad (A.16)
 \end{aligned}$$

また (A.1) についても

$$\begin{aligned}
 S(x, y, z; x', y', z') &\xrightarrow{x \ll x'} \frac{y}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x, y, z; \theta) \overline{\phi_0(x', y', z') \sec\theta} d\theta \quad (A.17)
 \end{aligned}$$

逆流れの核函数は $\rho > 0$ による条件から

$$S(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) - \frac{1}{4\pi z} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho(r+r') + ik(\omega' - \omega)}}{k\omega\theta - \gamma - \mu i \omega\theta} \alpha k d\alpha d\theta, \quad (A-18)$$

と書けるが 実函数であるから又

$$S^2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) - \frac{1}{4\pi z} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho(r+r') + ik(\omega' - \omega)}}{k\omega\theta - \gamma + \mu i \omega\theta} \alpha k d\alpha d\theta, \quad (A-18')$$

と書いてよい。

これらの (A.1) と較べて

$$S^2(x, y, z; x', y', z') = S(x', y', z'; x, y, z); \quad (A-19)$$

又

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} S^2(x, y, z; x', y', z') &= \frac{\partial}{\partial y'} S(x', y', z'; x, y, z) \\ &= - \frac{\partial}{\partial y} S(x', y', z'; x, y, z), \quad (A-20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} S^2(x, y, z; x', y', z') &= \frac{\partial}{\partial x'} S(x', y', z'; x, y, z) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} S(x', y', z'; x, y, z), \quad (A-21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, y, z; x', y', z') &= \int_{-\infty}^{x'} S_y(x, y, z; x', y', z') dx' \\ &= - \int_{-\infty}^{x'} S_y(x', y', z'; x, y, z) dx' = + \int_{-\infty}^{x'} S_y(x', y', z'; x, y, z) dx \\ &= K(x', y', z'; x, y, z), \quad \dots \quad (A-22) \end{aligned}$$

附録 B 積分

$$I = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{-t}^0 P(x, z') \left\{ \frac{1}{(z-z')^2} + \frac{1}{(z+z')^2} \right\} dz'$$

$$= \frac{-1}{2\pi\rho} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-t}^0 P(x, z') \left\{ \frac{1}{z-z'} + \frac{1}{z+z'} \right\} dz', \quad (B.1)$$

$$z = -t \cos\theta, \quad z' = -t \cos\theta', \quad dz' = t \sin\theta' d\theta'$$

$$\frac{P}{\rho} = t \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin(2n+1)\theta, \quad (B.2)$$

と仮定

$$I = -\frac{1}{2\pi t \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \int_0^{\pi} P \left\{ \frac{1}{\cos\theta' - \cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta' + \cos\theta} \right\} \sin\theta' d\theta' \quad (B.3)$$

$$\frac{1}{\cos\theta' - \cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta' + \cos\theta} = \frac{4}{\sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \cos 2n+1\theta \sin 2n+1\theta', \quad (B.4)$$

$$\int_0^{\pi} \sin 2n+1\theta' \sin(2n+1)\theta' d\theta' = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for } n=0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0 \end{cases} \quad (B.5)$$

$$I = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos 2n+1\theta$$

$$= \frac{1}{2 \sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_{2n+1} \sin(2n+1)\theta, \quad (B.6)$$

$$I = 1 \quad |z| \leq t$$

$$a_1 = 2, \quad a_{2n+1} = 0 \quad \text{for } n > 1, \quad (B.7)$$

昭和 年 月 日

$I = z = -\cos\theta$ として (B.6) に代入し (B.7) の適宜の係数を求めると、

$$a_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 - 4} \quad (B.8)$$

$I = e^{kz} = e^{-kt \cos\theta}$ とおくと、

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{8}{\pi(2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kt \cos\theta} \sin\theta \sin(2n+1)\theta d\theta, \\ &= \frac{8}{\pi kt(2n+1)} \left[(-1)^n - (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kt \cos\theta} \cos(2n+1)\theta d\theta \right], \quad (B.9) \end{aligned}$$

$$\text{よって } \frac{P}{Pt} = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kt \cos\theta'} \sin\theta' d\theta' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta' / (2n+1)}{2n+1}$$

$$\sum \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} = \frac{1}{2} \log \cot \frac{\theta}{2} \quad \text{for } 0 < \theta < \pi.$$

$$\sum \frac{\sin(2n+1)\theta \sin(2n+1)\theta'}{2n+1} = \frac{1}{4} \log \left[\frac{\tan \frac{\theta+\theta'}{2}}{\tan \frac{\theta-\theta'}{2}} \right]$$

$$\therefore \frac{P}{Pt} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kt \cos\theta'} \log \left[\frac{\tan \frac{\theta+\theta'}{2}}{\tan \frac{\theta-\theta'}{2}} \right] d\theta', \quad (B.10)$$

$$\frac{1}{Pt} \int_{-t}^0 P(z) dz = \frac{1}{Pt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P \sin\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-kt \cos\theta'} \log \left[\frac{\tan \frac{\theta+\theta'}{2}}{\tan \frac{\theta-\theta'}{2}} \right] d\theta'$$

$$= \frac{\pi}{kt} \left\{ I_0(kt) - L_1(kt) \right\}, \quad (B.11)$$

I_0 は 零 次 級のベッセル函数 L_1 は 同じく ストールツ 函数。

附録 C 境界条件について

速度ポテンシャル ϕ から

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi(x, y, z) = w(x, y, z), \quad (C.1)$$

この演算によつて得られた周数 w は 後方に波を有しない。

又水面条件によつて

$$w(x, y, 0) = 0, \quad (C.2)$$

である。

板上の境界条件は $\phi_y(x, 0, z)$ から

$$\phi_y(x, 0, z) = v(x, z), \quad (C.3)$$

と与えられるならば (C.1) を y で微分して

$$\frac{\partial}{\partial y} w(x, 0, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial z}\right) v(x, z), \quad (C.4)$$

と与えられる。

(C.1) から ϕ の性質によつて w も又 後流渦面をもつと考えられるので

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x, y, z) = W(x, y, z), \quad (C.5)$$

よつて W なる 1 階数 を 考へておけば 2 階数 1 階数 となる と 考へられ、(C.2) の条件を満すものは 1 階数に

$$W(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^t \mu'(x', z') \left(\frac{y}{r^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) dx' dz' \quad (C.6)$$

と書けるだろう。

それ故に境界値問題の積分方程式は (C.4) によ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q \frac{\partial}{\partial z} \right) v(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^0 \int_L^1 M(x, z') \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y'^3} \right) dx' dz' \quad (C.7)$$

となる。

これを解いて M を求め (C.5), (C.1) によって ψ を求めればよい筈である。

この方法では右辺に沿った項がないので数値的に解く時不利であると考えられ、この方法は仰角が 90° つまり流れに垂直な時にも使用出来る。

しかし容易にわかるように $v = \text{const.}$ の時は左辺は 0 となり、又 散乱ポテンシャルでも左辺は 0 となる。

元来 (C.7) は 少くとも 2 つ以上の 散乱解 を持たなければならぬ筈であるが 2 つのような積分方程式についての知識はあまりないので解析的には少し問題が浮く。

(C.6) の意味が一般的であるかどうかなど)

なおこのような方法による場合はよくわかる様に (C.6) のように 左右反対称な関数から出発すれば得られる ψ は左右反対称となるから 線積分項のようなものは出て来ない。