5

14-5

18

"造波抵抗理論に現われる函数の積分表示に就いて"

昭和37年2月23日　　　別所正利
防衛大学校

内容；―

1. はしがき

造波抵抗理論に表われる函数の解析的性質について著者は前に論じた事があるが，横方向に拡がりを持つ場合について一般化し得なかった。

今回4節に示す様な一重積分表示を考えついたので書き記す次第である。

参考文献

神中竜雄；"船と波に関する研究" 第1章　昭和35年
丸尾孟；造船協会論文集　91号
R. Guilloton；　S.N.A.M.E. ?
著者　；　大学院研究報告　昭和30年

6

2. 定義

$$O_n^{(1)}(x,y,t)=\lim_{\mu\to+0}\frac{(-i)^n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-kt+ikx\cos u+iky\sin u}}{k\cos^2 u-1+\mu i\cos u}\cos^{n+2}u\,dk\,du, \quad \cdots(2.1)$$

$$O_n^{(1)}(-x,y,t)=(-)^n\left[O_n^{(1)}(x,y,t)-2P_n(x,y,t)\right], \quad \cdots(2.2)$$

$$g_n(x,y,t)=\frac{(-i)^n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}e^{-kt+ik(x\cos u+y\sin u)}\cos^{n+2}u\,dk\,du, \quad \cdots(2.3)$$

for $x, y, t>0$

特に $g_{-2}(x,y,t)=-\frac{1}{2R}$, $R^2=x^2+y^2+t^2$, $\cdots(2.4)$

$$\left.\begin{aligned} g_{-1} &= \frac{x}{2(x^2+y^2)}\left(\frac{t}{R}-1\right),\\ g_{-3} &= \frac{tx}{2(t^2+y^2)R}, \end{aligned}\right\} \cdots(2.5)$$

3. 微分

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{Bmatrix} O_n^{(1)}(x,y,t)\\ P_n(x,y,t)\end{Bmatrix}=0, \quad \cdots(3.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\begin{Bmatrix} O_n^{(1)}(x,y,t)\\ P_n(x,y,t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}g_{n-1}(x,y,t)\\ 0\end{Bmatrix} \cdots(3.2)$$

従って又 $$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{Bmatrix} O_n^{(1)}\\ P_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial t}\right)g_{n-1}\\ 0\end{Bmatrix} \cdots(3.3)$$

その他に
$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}O_n=O_{n-1}+g_{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial t}O_n=O_{n-2}+g_{n-2}\\ &\frac{\partial}{\partial x}P_n=P_{n-1} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t}P_n=P_{n-2}, \end{aligned}\right\} \cdots(3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}g_n=\frac{\partial}{\partial t}g_{n-1}, \quad \cdots(3.5)$$

等々が容易に判るだろう。

著者が参考文献に於て定義した函数は(2.1)等で $y=0$ と置いたもので、これ等の式は(3.1), (3.3)を除いてすべてに共通の性質である。

そこで其の際に得た積分表示を一般化して次の様な積分表示を考えて見よう。

4. 積分表示

$$O_1^{(1)}(x,y,t)=Re.\,\frac{1}{2}\int_{L_1+L_2}e^{tv^2-xv+iyv\sqrt{1+v^2}}\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}},$$

$$O_2^{(1)}(x,y,t)=Re.\,\frac{1}{2}\int_{L_1+L_2}e^{tv^2-xv+iyv\sqrt{1+v^2}}\frac{v\,dv}{\sqrt{1+v^2}}, \qquad \cdots(4.1)$$

但し L_1 は $[0,+0+i\infty]$, L_2 は $\left[\alpha=\frac{xt-iyR}{t^2+y^2},+0-i\infty\right]$ の様な積分路とする。

(2.1)の定義式から此等の式を直接導く事は現在の所未だ成功しないけれども、(3.1), (3.2)'' 等を満足する事は容易に証明出来る。元々(2.1)は此の2つの微分方程式の解として定義されているのであるから、間接的には同じものである事は推定出来る。

上式で $x<0$ とすれば α は左半面に移り、(2.2)の定義式から

$$P_{2n}(x,y,t)=(-)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-t\sec^2u}\sin(x\sec u)\cos(y\sec^2u\sin u)\cos^{2n}u\,du,$$

$$P_{2n+1}(x,y,t)=(-)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-t\sec^2u}\cos(x\sec u)\cos(y\sec^2u\sin u)\cos^{2n+1}u\,du, \qquad (4.2)$$

となる。一方(3.2)を満足する所から一般に

$$P_n(x,y,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{4t}}P_n(x+v,y,0)\,dv, \quad \cdots(4.3)$$

となる事は容易に示される。

5. 極限関係

既にのべたが先づ

$$\left.\begin{matrix}O_n^{(1)}(x,y,t)\\ P_n(x,y,t)\end{matrix}\right\}\underset{y\to0}{\equiv}\left\{\begin{matrix}O_n^{(1)}(x,t)\\ P_n(x,t)\end{matrix}\right\} \quad \cdots \quad (5.1)$$

次に $t=0$ とおくと (4.1) において

$$\alpha=-i\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y},$$

であるから

$$O_1^{(1)}(x,y,0) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-y\sin\theta\cos\theta}\sin(x\sin\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\cos\left(x\,\mathrm{ch}u + \frac{y}{2}\mathrm{sh}2u\right)du$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\mathrm{sh}^{-1}\frac{x}{y}}^{\infty}\cos\left(x\,\mathrm{ch}u - \frac{y}{2}\mathrm{sh}2u\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x\,\mathrm{sh}u}\cos\left(\frac{y}{2}\mathrm{sh}2u\right)du + \frac{1}{2}\int_{\mathrm{sh}^{-1}\frac{x}{y}}^{\infty}\cos\left(x\,\mathrm{ch}u - \frac{y}{2}\mathrm{sh}2u\right)du, \quad \cdots (5.2)$$

$$O_2^{(1)}(x,y,0) = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x\,\mathrm{sh}u}\cos\left(\frac{y}{2}\mathrm{sh}2u\right)\mathrm{sh}u\,du - \frac{1}{2}\int_{\mathrm{sh}^{-1}\frac{x}{y}}^{\infty}\sin\left(x\,\mathrm{ch}u - \frac{y}{2}\mathrm{sh}2u\right)\mathrm{ch}u\,du, \quad \cdots (5.3)$$

等となり、特に $x=0$ とすると

$$\left.\begin{aligned} O_1^{(1)}(0,y,0) &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{y}{2}\mathrm{sh}v\right)dv = \frac{1}{2}K_0\left(\frac{y}{2}\right), \\ O_2^{(1)}(0,y,0) &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{y}{2}\sin2\theta}\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}E\left(\frac{y}{2}\right), \end{aligned}\right\} \cdots (5.4)$$

但し $E(z) = \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\int_0^{\sqrt{z}} e^{u^2}du = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \underset{z\gg1}{\sim} \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,z^n}$,

此の後の式は直接項別積分して確かめる事が出来る。
又 (4.2) から

$$\left.\begin{aligned} P_1(0,y,0) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(y\sec u\tan u)\sec u\,du = \int_0^{\infty}\cos\left(\frac{y}{2}\mathrm{sh}2u\right)du = \frac{1}{2}K_0\left(\frac{y}{2}\right), \\ P_2(0,y,0) &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (5.5)$$

6. 漸近関係

変数が充分大きい時には漸近展開があって、O_n については4節の積分表示からも導けるが、直接(2.1)の $\lambda(K\cos^2u-1)$ を展開して項別積分すれば容易である。

即ち

$$O_n^{(1)}(x,y,t) \doteqdot -\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m g_{n+2m}(x,y,t), \quad \cdots (6.1)$$

特に

$$\left.\begin{aligned} O_1^{(1)}(x,y,t) &\doteqdot -g_1 = \frac{x}{2(x^2+y^2)}\left[1-\frac{t}{R}\right], \\ O_2^{(1)}(x,y,t) &\doteqdot -g_2 = \frac{1}{2R}, \end{aligned}\right\} (6.2)$$

P 関数の場合は (4.3) を考えれば、$P_n(x,y,0)$ が判ればよく、又此の場合はよく知られている様にケルビン波系を与える。

此処では $P_1(x,y,0)$ について興味ある展開を示しておこう。

さて

$$\cos(x\,\mathrm{ch}\,u)=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\varepsilon_n J_{2n}(x)\,\mathrm{ch}\,2nu\,,\qquad \varepsilon_n=\begin{cases}1 & \text{for } n=0\\ 2 & \text{for } n\geq 1\end{cases}$$

$$\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{y}{2}\mathrm{sh}\,u\right)\mathrm{ch}\,nu\,du=\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)K_n\left(\frac{y}{2}\right),$$

よって

$$P_1(x,y,0)=\int_0^{\infty}\cos(x\,\mathrm{ch}\,u)\cos\left(\frac{y}{2}\mathrm{sh}\,2u\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\varepsilon_n J_{4n}(x)K_{2n}\left(\frac{y}{2}\right),\quad\cdots\cdots\quad(6.3)$$

又

$$\cos\left(\frac{y}{2}\mathrm{sh}\,2u\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\varepsilon_n\,\mathrm{ch}\,4nu\,I_{2n}\left(\frac{y}{2}\right),$$

$$\int_0^{\infty}\cos(x\,\mathrm{ch}\,u)\,\mathrm{ch}\,4nu\,du=-\frac{\pi}{2}Y_{4n}(x),$$

故に

$$P_1(x,y,0)\fallingdotseq-\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\varepsilon_n I_{2n}\left(\frac{y}{2}\right)Y_{4n}(x),\quad\cdots\cdots\quad(6.4)$$

此の(6.4)式は収斂しない事は容易に判るが、$\frac{x^2}{4y}\gg 1$ の時に有用である様に見える。

一方(6.3)式は $x^2/4y<\infty$ で収斂級数を与える事は注目すべきである。

又同様な展開法を(5.2), (5.3)の右辺第1項に適用出来るであろう。

以上。

附録A. P_1 函数の積分表示

その後少し(6.3)及び(6.4)の展開式で計算して見た所一致があまりよくないので(6.3)式が収斂して $P_1(x,y,t)$ になるかどうかには幾分疑問がもたれる。

又其の後少し検討した結果次の積分表示をえたので記す。

一般に

$$P_1(x,y,t) = \frac{Re}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\,ch^2u + \frac{iy}{2} sh2u + ix\,chu}\, du \qquad \text{----} (A.1)$$

今 $\rho = \frac{\sqrt{t^2+y^2}}{2}$, $\tan\gamma = \frac{y}{t}$, $y>0,\ t>0,\ x>0$,

とおくと

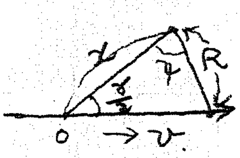
$$e^{-t\,ch^2u + \frac{i}{2} y\, sh2u} = e^{-\frac{t}{2} - \rho\, ch(2u-i\gamma)} = e^{-\frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-)^n I_n(\rho)\, ch\, n(2u-i\gamma)$$

一方 $I_n(\rho) = \frac{e^{\rho}}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{8\rho}} J_{2n}(v)\, dv$ であるから.

$$= \frac{e^{-\frac{t}{2}+\rho}}{2\sqrt{2\pi\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{8\rho} - iv\, ch(u-\frac{i\gamma}{2})}\, dv,$$

uについての積分は

$$\frac{Re}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv\, ch(u-\frac{i\gamma}{2}) + ix\, chu}\, du = \frac{Re}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iR\cos(u-i\psi)}\, du$$



$x - v\cos\frac{\gamma}{2} = R\cos\psi$, $v\sin\frac{\gamma}{2} = R\sin\psi$

であるから u-pl. で path を $i\psi$ だけずらせば、

$$= -\frac{\pi}{2} Y_0(R) \quad, R^2 = x^2 + v^2 - 2xv\cos\frac{\gamma}{2},$$

従って

$$P_1(x,y,t) = -\frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t}{2}+\rho}}{4\sqrt{2\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{8\rho}} Y_0(R)\, dR, \quad \text{--} (A.2)$$

がえられ、Y_0 を加法定理で展開して項別積分すれば、(6.3)或いは(6.4)の形の展開がえられる。

即ち

$$P_1(x,y,t) = -\frac{\pi}{2} e^{-\frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n(\rho) Y_{2n}(x) \cos n\gamma, \quad \text{-} (A.3)$$

$$P_1(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \varepsilon_n K_n(\rho) J_{2n}(x) \cos n\gamma, \quad \text{--} (A.4)$$

特に $P_1(0,y,t)=\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}K_0(\rho)$, ------ (A.5)

附録B $P_1(x,y,0)$ の漸近展開について

此の問題は従来詳しい計算が見られなかったので鞍部点法を利用して少し詳わしく論じて見る。(Watson p.235 参照)

$$P_1(x,y,0)=\frac{Re}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyf(u)}du, \quad \text{------} \quad (B.1)$$

但し
$$f(u)=\mathrm{sh}\varphi\,\mathrm{ch}u-\frac{1}{2}\mathrm{sh}2u, \quad \text{------} \quad (B.2)$$
$$\mathrm{sh}\varphi=\frac{x}{y},$$

定常点は $f'(u)=0$ で与えられ それをとくと

$$[\mathrm{sh}u]_{u=\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm\psi}, \text{ 但し } \mathrm{sh}\varphi=\frac{x}{y}=\sqrt{8}\,\mathrm{ch}\psi, \text{ -} (B.3)$$

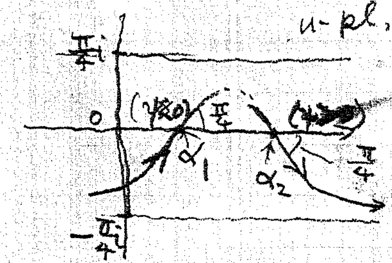
の様に2点があるので次の様な3つの case がある事になる。
尚此の時は次の様になる。

$$f(\alpha)=\frac{\mathrm{ch}^3\alpha}{\mathrm{sh}\alpha},\quad f''(\alpha)=\frac{\mathrm{ch}\alpha}{\mathrm{sh}\alpha}(1-2\mathrm{sh}^2\alpha),\quad f'''(\alpha)=-3\mathrm{ch}2\alpha, \quad \text{--} (B.4)$$

I) $\frac{x}{y}=\mathrm{sh}\varphi>\sqrt{8}$, ψ: 実, $f(\alpha)$ も実数.

$$f''(\alpha)=\mp2\sqrt{2+e^{\pm2\psi}}\,\mathrm{sh}\psi,\quad f'''(\alpha)=-3(1+e^{\pm2\psi}),$$

従って path は下図の様にえらべばよい。



此の時

$$F(v)=f(v+\alpha)-f(\alpha)$$
$$=c_0v^2[1+c_1v+c_2v^2+\cdots], \quad \text{--} \quad (B.5)$$
$$c_0=\frac{1}{2}f''(\alpha),\quad c_1c_0=\frac{1}{3}f'''(\alpha),\quad c_0c_2=\frac{f^{(4)}(\alpha)}{12},$$

とおけば

$$\frac{dv}{dF}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF^{\frac{n-1}{2}}, \quad \text{------} \quad (B.6)$$

の様に展開出来よう。従って

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dv}{dF}\frac{dF}{F^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dv}{F^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \text{--} \quad (B.7)$$

然して、実軸の上下の path で arg.(F) は 2π だけ変るから.

(B.6) から $\frac{1}{2}\frac{d}{d\bar{F}}(v_1-v_2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n a_{2n}\bar{F}^{n-\frac{1}{2}}$

で (B.5) から $a_0=\frac{1}{\sqrt{c_0}}$, $a_2=\frac{\frac{15}{8}c_1^2-\frac{3}{2}c_2}{c_0^{\frac{3}{2}}}$, $\Bigg\}$ ... (B.8)

此れ等の式から

$$P_1=\frac{Re}{2}\left[e^{iyf(\alpha)}\int_0^{\infty}e^{iy\bar{F}}\frac{d}{d\bar{F}}(v_1-v_2)\,d\bar{F}\right]+\Big[\quad\Big]_{\alpha_2}$$

$$=\left[Re\, e^{iyf(\alpha)}\sum(-)^n a_{2n}\int_0^{\infty}e^{-y\tau}\tau^{n-\frac{1}{2}}d\tau\, e^{(\frac{n+\frac{1}{2}}{2})\pi i}\right]_{[\alpha=\alpha_1]}+[\alpha=\alpha_2]$$

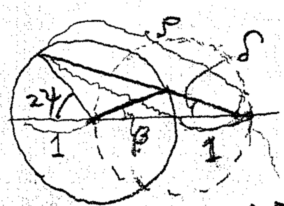
$$=\left[Re\, e^{iyf(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n a_{2n}e^{(\frac{n}{2}+\frac{1}{4})\pi i}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{y^{n+\frac{1}{2}}}\right]_{[\alpha=\alpha_1]}+[\alpha=\alpha_2]$$

$\alpha=\alpha_1$ $(\psi<0)$ では $f''>0$ で a_{2n} は実である。
然し $\alpha=\alpha_2$ $(\psi>0)$ では $f''<0$ で a_{2n} は虚である。
今 $a_{2n}=|a_{2n}|e^{(n+\frac{1}{2})\pi i}$ とおくと

$$P_1=\left[Re\, e^{iyf(\alpha_1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n a_{2n}e^{(\frac{n}{2}+\frac{1}{4})\pi i}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{y^{n+\frac{1}{2}}}\right]_{\alpha=\alpha_1}\ (\psi<0)$$
$$+\left[Re\, e^{iyf(\alpha_2)}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n|a_{2n}|e^{-(\frac{n}{2}+\frac{1}{4})\pi i}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{y^{n+\frac{1}{2}}}\right]_{\alpha=\alpha_2}\ (\psi>0)$$

... (B.9)

II) $\frac{x}{y}=sh\,\varphi<\sqrt{8}$ の場合 ψ は虚数となる。
今 $sh\,\varphi=\sqrt{8}\cos\psi$, $sh\,\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\psi}$ とおき
更に $2+e^{-2i\psi}=\rho e^{-i\delta}$, $\rho=\sqrt{5+4\cos 2\psi}$, $e^{2i\delta}=\frac{2+e^{2i\psi}}{2+e^{-2i\psi}}$,

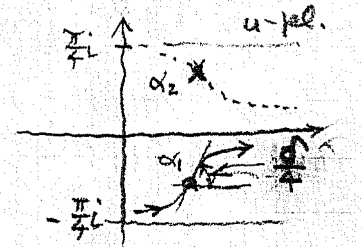


とおくと

$$\left.\begin{aligned}f(\alpha_1)&=\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{2}e^{(\psi-\frac{3}{2}\delta)i}\\ f''(\alpha_1)&=2i\sqrt{\rho}\,e^{-\frac{\delta}{2}i}\sin\psi\\ f'''(\alpha_1)&=-3(1+e^{-2i\psi})\end{aligned}\right\}\ (B.10)$$

$0\leq\delta\leq\frac{\pi}{6}$,

此の図で幾何学的に $\beta>\delta$, $\beta=2(\psi-\delta)$ $\therefore$ $\psi>\frac{3}{2}\delta$ となる。
$I\{f(\alpha_1)\}>0$ となるので次頁図の path に沿うて積分する。



Ⅰと全く同じ手順で (B·8) から

$$P_1 = \mathrm{Re}\left[e^{iyf(\alpha_1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n a_{2n}\, e^{(\frac{n}{2}+\frac{1}{4})\pi i}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{y^{n+\frac{1}{2}}}\right], \quad \text{---(B·11)}$$

をうる。(B·9) の場合 a_{2n}, $|a_{2n}|$ は実数であったが此場合では (B·10) から判る様に a_{2n} は複素数値をとる。

特に $a_0 = \frac{1}{\sqrt{c_0}} = \sqrt{\frac{2}{f''(\alpha_1)}} = e^{(\frac{\delta-\pi}{4})i}/\rho^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sin 4}$,

Ⅲ) $\frac{x}{y} = \sinh\varphi = \sqrt{8}$, $\psi = 0$ であって

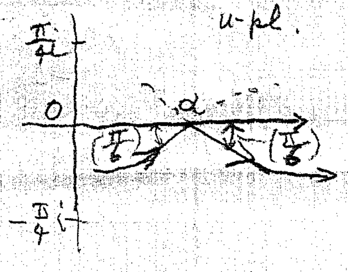
$f(\alpha) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$, $f'''(\alpha) = -6$, $f^{(4)}(\alpha) = 6\sqrt{3}$, $f^{(5)}(\alpha) = -30$, 等が与えられる。

従って $F(v) = f(v+\alpha) - f(\alpha) = \frac{v^3}{6}f'''(\alpha) + \frac{v^4}{24}f^{(4)}(\alpha) + \frac{v^5}{120}f^{(5)}(\alpha)$

$$= -v^3(1 + c_1 v + c_2 v^2 + \cdots) \quad \text{---(B·12)}$$

$$\frac{dv}{dF} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-F)^{\frac{n-2}{3}}, \quad a_n = -\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dv}{(-F)^{\frac{n+1}{3}}},$$

pathは 左図の如くとればよいから



$$\frac{1}{2}\frac{d}{dF}(v_1 - v_2) = i\sum a_n e^{-\frac{(n-2)}{3}\pi i}\sin\left(\frac{n-2}{3}\pi\right)(-F)^{\frac{n-2}{3}}$$

よって、

$$P_{-1} = \cancel{\mathrm{Re}} - e^{iyf(\alpha)}\sum a_n e^{-\frac{(n-2)}{2}\pi i}\sin\left(\frac{n-2}{3}\pi\right)\int_0^{\infty} e^{-y\tau}\tau^{\frac{n-2}{3}}d\tau$$

$$\therefore P_{-1} = \mathrm{Re}\left[e^{iyf(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{2}\pi i}\sin\left(\frac{n-2}{3}\pi\right)\frac{\Gamma(\frac{n+1}{3})}{y^{\frac{n+1}{3}}}\right] \quad \text{---(B·13)}$$

特に $a_0 = -1$, $a_1 = +\frac{2}{3}c_1 = -\frac{f^{(4)}(\alpha)}{36} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, ……

以上の展開の内，従来求められているものは I)及び III)の第1項のみである。此等の式で計算するとよく判る事であるが I)と III)は滑らかに接続しない。此の事は path を見るとよく判る。此の中間的な領域を見よう。

$$\bar{F}(v)=f(v+\alpha)-f(\alpha)=\frac{v^2}{2}f''(\alpha)+\frac{v^3}{6}f'''(\alpha) \quad , \quad \cdots \quad (B.14)$$

とおいて見ると $f'(\alpha)=0$, $f(\alpha)\fallingdotseq\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f'''(\alpha)\fallingdotseq -6$,

且つ $f''(\alpha)\fallingdotseq \pm 2\sqrt{3}\,sh\,\psi$

となる。今

$$u=v+\frac{f''(\alpha)}{f'''(\alpha)}, \quad \text{とおくと.}$$

$$\left.\begin{aligned}&\bar{F}\left(u-\frac{f''}{f'''}\right)=p-bu^3+3cu,\\ &\text{但し}\quad p=\frac{(f'')^3}{3(f''')^2},\quad b=-\frac{f'''}{6},\quad c=-\frac{(f'')^2}{6f'''}\end{aligned}\right\}(B.15)$$

よって $P_{-1}=\frac{Re}{2}e^{iy\{f(\alpha)+p\}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy(-bu^3+3cu)}du$,

さて.

I) b, c が正の実数ならば Airy の積分になって.

$$P_{-1}=Re\frac{e^{iy(f+p)}}{\sqrt[3]{by}}\int_0^\infty \cos\left(t^3-3\frac{cy^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{b}}t\right)dt$$

$$=Re\,e^{iy(f+p)}\times\frac{\pi}{3}\left(\frac{g}{2by}\right)^{\frac{1}{3}}\left\{J_{\frac{1}{3}}(g)+J_{-\frac{1}{3}}(g)\right\}, \quad (B.16)$$

但し $g=\frac{y}{\sqrt{6}}|p|$, $p=\frac{(f'')^3}{3(f''')^2}$, $b\fallingdotseq 1$, $f\fallingdotseq\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$p\fallingdotseq\frac{2}{3\sqrt{3}}sh^3\psi$,

$f''\gtrless 0$ に拘らず同じ式になるので此れは次の様に書いた方がよかろう

$$P_{-1}=\frac{\pi}{3}\cos(yf)\cos(yp)\sqrt[3]{\frac{g}{2by}}\left[J_{\frac{1}{3}}(g)+J_{-\frac{1}{3}}(g)\right], \quad \cdots (B.17)$$

但し $x>\sqrt{8}y$

II) $x < \sqrt{3}y$ ならば ψ は虚数となる。此の時 path は前と同様 $\mathcal{I}\{p\} > 0$ の様に選ぶ事にすれば

$$f''(\alpha) \doteqdot + i\, 2\sqrt{3}\sin\psi \quad , \quad \psi : \text{real, positive}$$

(B.16) において

$$p = -i|p| \, , \quad |p| = \frac{|f''|^3}{3|f'''|^2} \, , \quad q = |q| e^{\frac{3}{2}\pi i} , \quad |q| = \frac{4}{\sqrt{6}}|p| ,$$

とおけば

$$q^{\frac{1}{3}}\{J_{\frac{1}{3}}(q) + J_{-\frac{1}{3}}(q)\} = \{I_{-\frac{1}{3}}(|q|) - I_{\frac{1}{3}}(|q|)\}|q|^{\frac{1}{3}} =$$

$$= |q|^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}\right)K_{\frac{1}{3}}(|q|) \, ,$$

であるから (B.16) から

$$P_{-1} = Re\,\frac{e^{-|p|y + iyf}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{|q|}{2by}} \cdot K_{\frac{1}{3}}(|q|) \quad , \quad \cdots (B.18)$$

附録 C　$O_{-1}(x,y,0)$ の漸近展開

O_{-1} 函数の計算は A に示した様な積分表示がないので (5.2) 等から計算するのが恐らく最も簡単である。

此処では その漸近展開を考えよう。

(5.2) から

$$\left.\begin{aligned} O_{-1}(x,y,0) &= \frac{1}{2}\{\mathrm{I} + \mathrm{II}\} \, , \\ \mathrm{I} &= Re\int_0^\infty e^{-yg(u)}\,du \, , \\ \mathrm{II} &= Re\int_\varphi^\infty e^{iyf(u)}\,du \, , \quad sh\varphi = \frac{x}{y} \end{aligned}\right\} \quad (C.1)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} g(u) &= sh u\, sh\varphi - \frac{1}{2}sh 2u , \\ f(u) &= sh\varphi\, ch u - \frac{1}{2}sh 2u \, , \end{aligned}\right\} \quad (C.2)$$

I) 積分 I

$$\left.\begin{aligned} &g(0)=0, \quad g(u) = uf'(0) + \frac{u^2}{2}f''(0) + \frac{u^3}{6}f'''(0) + \cdots \\ &\frac{du}{df} = \sum_{n=0}^\infty a_n f^n \, , \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{du}{f^{n+1}} \, , \end{aligned}\right\} (C.3)$$

$a_0 = 1/f'(0)$,

$$\mathrm{I} = \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-yg}\frac{du}{dg}dg = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^\infty \frac{n!\,a_n}{y^{n+1}} \quad , \cdots\cdots \quad (c.4)$$

$$f'(0) = \mathrm{sh}\varphi - i\ ,\quad f''(u) = 0,\quad f'''(0) = \mathrm{sh}\varphi - 4i$$

$$a_0 = 1/(\mathrm{sh}\varphi - i)\ ,\quad a_{2n+1} = 0\ ,\quad a_2 = -\frac{1}{2}f'''/(f')^3\ ,\cdots\cdots$$

II) 積分 II

$$\left.\begin{aligned} &f(\varphi) = 0\ ,\quad f'(\varphi) = -\mathrm{ch}^2\varphi\ ,\quad f''(\varphi) = -\frac{3}{2}\mathrm{sh}2\varphi\ , \\ &f'''(\varphi) = -4 - 7\mathrm{sh}^2\varphi\ , \end{aligned}\right\} \quad (c.5)$$

$$\frac{df}{du} = \sum_{n=0}^\infty a_n f^n\ ,\quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{du}{f^{n+1}}$$

$$\mathrm{II} = \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{iyf(u)}\frac{du}{df}df = \mathrm{Re}\sum a_n i^{n+1}\int_0^\infty e^{-y\tau}\tau^n d\tau$$

$$= \mathrm{Re}\left[\sum_{n=0}^\infty a_n i^{n+1}\frac{n!}{y^{n+1}}\right], \quad \cdots\cdots \quad (c.6)$$

$$f(u+\varphi) = u f'(\varphi) + \frac{u^2}{2}f''(\varphi) + \frac{u^3}{6}f'''(\varphi)\ ,$$

$$a_0 = \frac{1}{f'(\varphi)}\ ,\quad a_1 = \frac{f''(\varphi)}{\{f'(\varphi)\}^3}\ ,\ \cdots\cdots$$

等であって a_n は常に実であるから

$$\mathrm{II} = \sum_{n=0}^\infty (-)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{y^{2n+2}}a_{2n+1}\ , \quad \cdots\cdots \quad (c.7)$$

となる。

$$\left.\begin{aligned} &\text{従って} \quad \mathrm{I} = O\left(\frac{1}{y}\right)\ , \\ &\text{に対し} \quad \mathrm{II} = O\left(\frac{1}{y^2}\right)\ , \end{aligned}\right\} \quad (c.8)$$

である。

以上.