"極小造波抵抗問題に関する覚書"
(第3報)

別所正利

昭和37年5月20日

目次

1. 緒言

前2報に於て船体中央縦断面上の2重吹出し分布(以下ミッチェル型分布と呼ぶ)について考えた。

そして特に無限吃水の場合は数学的に簡単でまとまった結論が得られる事を見て来たが、吃水が有限な場合や又別の型即ち圧力分布型の様な場合に極値問題はどういう事になるのか考えて見たい。

最近丸尾教授は細長い吃水の浅い船の理論を発表し特にその極値問題の解を求めている。*

此の様な船をまずミッチェル型圧力型の極限として、此処では仮に線分布と名づけたが、此の型の極値問題の解は前報で考えた船型は両端で丸味を持っているのに対して、両端が尖っている事が特徴であるが此の異った2種類の型の解の間の関係は一つの大きい問題である。

そこでまず2,3節に於て此の型の分布の問題を少しく考察し、又6節で没水体の極限としてもう一度考察する。更に7節に於ては2つの型の分布の特徴を又別の面から少し考えて見る事にしよう。

次にともかくも極値問題の解の型を集める意味で圧力分布及び没水体の問題を2,3取り上げて考察して見るが、かなり長期に亘ってまとめたので途中論旨が前後する等読み難い点を生じた事は残念とする所である。

2. ミッチェル型及び圧力型縦線分布

速度ポテンシャルはミッチェル型2重吹出し分布では

$$\varphi(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{0}\int_{-1}^{1}\eta(x',z')\frac{\partial}{\partial x'}S(P,Q)\,dx'dz' \quad , \cdots \qquad (2.1)$$

圧力分布型では

$$\varphi(P)=\frac{1}{4\pi\rho g}\iint_{S(z=0)}p(x',y')\frac{\partial}{\partial x}S(P,Q)\,dx'dy' \quad , \cdots \qquad (2.2)$$

$$P\equiv(x,y,z)\ ,\quad Q\equiv(x',y',z')\ ,\quad r=\overline{PQ}$$

*丸尾;水槽委員会講演資料 昭和37年5月

$$S(P,Q)=\frac{1}{r(P,Q)}-\lim_{\mu\to+0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{k\cos^2\theta+g+\mu i\cos\theta}{k\cos^2\theta-g+\mu i\cos\theta}e^{k(z+z')+ik(\varpi-\varpi')}\,dk\,d\theta, \quad \cdots \quad (2.3)$$

此処で近似的に η は船の半巾に等しく p は圧力であって近似的に船底の静水圧に等しく共に x-方向の2重吹出しとして表わされているので巾喫水が共に小さくなると明らかに同じ型になる。

此の様な場合

$$2\int_{-t}^{0}\eta(x,z)\,dz = H(x), \quad \text{近似的に横切面積},$$

$$\int P(x,y)\,dy = P(x), \quad \text{横切面の浮力}. \quad \cdots \quad (2.4)$$

とおくと (2.1), (2.2) は

$$\varphi(P)=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}H(x')\frac{\partial}{\partial x'}S\,dx'=\frac{1}{4\pi\rho g}\int_{-1}^{1}P(x')\frac{\partial}{\partial x'}S\,dx', \quad \cdots \quad (2.5)$$

となるから結局

$$P(x)=\rho g H(x). \quad \cdots \quad (2.6)$$

となり, $P(x)$ は線型理論的には正確に横切面の浮力分布に等しいから $H(x)$ はその水頭に等しい。

ミッチェル分布では船型と $\eta(x,z)$ との関係を求めるのが大変であるが圧力分布では比較的に簡単であるので此の様な関係を念頭に置いておくと便利であろう。

さて造波抵抗公式は(左右対称分布として)

$$R=\frac{\rho g^4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|F(g\sec^2\theta,\theta)\right|^2\sec^5\theta\,d\theta, \quad \cdots \quad (2.7)$$

但し

$$F(k,\theta)=2\int_{-t}^{0}\int_{-1}^{1}\eta(x,z)\,e^{kz-ikx\cos\theta}\,dx\,dz, \quad \cdots \quad (2.8)$$

或いは

$$F(k,\theta)=\frac{1}{\rho g}\iint_{S}p(x,y)\,e^{-ik\varpi}\,dx\,dy, \quad \cdots \quad (2.9)$$

同じ近似法をとると (2.8), (2.9) は (2.6) の関係を考えて全く同じ式になり。

$$F(k,\theta) = \int_{-1}^{1} H(x)\, e^{-ikx\cos\theta}\, dx, \qquad (2.10)$$

従って(2.7)は

$$R = \frac{\rho g^4}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} H(x)H(\xi)\, P_5(g\,\overline{x-\xi}, 0)\, dx\, d\xi, \qquad (2.11)$$

但し

$$P_5(x, 0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sec\theta)\sec^5\theta\, d\theta = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^4 Y_0(x), \qquad (2.12)$$

所で $P_5(x,0)$ は上式から判る様に $x=0$ の近くで $O(\frac{1}{x^4})$ の程に大きくなるので $H(x)$, $H'(x)$ が端点で零にならなければ(2.11)は積分出来ない。

元々此の様な近似が可能である為には船体表面上の各点 (x, y, z) が端点 $(0,0,0)$ に対して $4\sqrt{y^2+z^2}/gx^2$ が充分小さい範囲になければならないので此の様な制限は当然さけられない。

さて

$$H(\pm 1) = H'(\pm 1) = 0, \qquad (2.13)$$

とすると(2.11)は

$$R = \rho\int_{-1}^{1} H''(x)\, G^{(2)}(x)\, dx, \qquad (2.14)$$

$$G^{(2)}(x) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} H''(\xi)\, Y_0(g\,\overline{x-\xi})\, d\xi, \qquad (2.15)$$

と書け，此の型は前報で考えたものと同型であるから容易に積分出来るが(2.13)の条件から $H(x)$ と $H''(x)$ の関係は少々複雑である。

先ずフーリエ級数で展開するとすると(2.13)の条件を満足するには次の様にとればよい事が容易に判る。

$$\left.\begin{aligned} H''(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos n\theta, \qquad x = -\cos\theta, \\ H(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n}\left\{\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1}\right\}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

一方マシュウ函数に展開すれば

$$\left.\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty} C_n\, ce_n(\theta), \\ H''(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty} d_n\, ce_n(\theta), \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

A4×100

(2.13)を満足するには次の条件が必要である。

即ち
$$\sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} A_0^{(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} A_1^{(2n+1)} = 0$$

或いは
$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}\, ce_{2n}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{2n} C_{2n}\, ce_{2n}(0) = 0\\&\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}\, ce'_{2n+1}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{2n+1} C_{2n+1}\, ce'_{2n+1}(0) = 0\end{aligned}\right\} \quad (2.18)$$

但し ρ_n は固有値で $ce_n''(\theta) + (\rho_n - 2q\cos 2\theta)\, ce_n(\theta) = 0$ 。
前報の結果をその儘利用すれば (2.14) は

$$\frac{R}{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_0^{\pi} ce_n(\theta)\, G_1^{(2)}(-\cos\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n d_n^2 \quad \cdots (2.19)$$

但し
$$\mu_{2n} = -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(\frac{\pi}{2})}\right\}\frac{Fey_{2n}(0)}{Ce_{2n}(0)}, \quad \mu_{2n+1} = -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{kA_1^{(2n+1)}}{ce'_{2n+1}(\frac{\pi}{2})}\right\}\frac{Fey_{2n+1}(0)}{Ce_{2n+1}(0)}.$$

次に序でなので此の場合の表面変位を考えて見よう。
$y=0$ の線上では (2.5) により

$$-g\zeta(x,0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} H(x')\frac{\partial^2}{\partial x'^2} S(x-x',0,0)\,dx'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} H''(x')\, S(x-x',0,0)\,dx'$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} H''(x')\frac{dx'}{|x-x'|} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-1}^{1} H''(x')\{\mathbf{H}_0(g\overline{x-x'}) - Y_0(g\overline{x-x'})\}\,dx' \quad \cdots (2.20)$$

此の第1項は明らかに $|x| \leq 1$ で無限に大きくなって意味がないけれど此れは元々此の近似法に基づくものであるからその様な所は除外して考えない事にしよう。
さて上式をまた3部に別けよう。

$$\zeta(x,0) = \zeta_1(x,0) + \zeta_2(x,0) + \zeta_3(x,0) \quad (2.21)$$

此の内先ず第1項は(2.16)の展開を利用する方が便利で

$$g\zeta_1(-\mathrm{ch}u,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{|\mathrm{ch}u-\cos\theta|}\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cos n\theta$$

$$=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}u}\sum_{n=2}^{\infty}a_n e^{-nu}\ ,\qquad\cdots\cdots(2.22)$$

但し　$x=-\mathrm{ch}u$　,　$|x|>1$

後の２項はむしろマシウ函数に展開する方が便利で

$$4\zeta_2(-\mathrm{ch}u,0)=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-1}^{1}\cos(g\,\overline{x-\xi}\cos v)\cos v\,H''(\xi)\,d\xi\,dv,$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Ce_m(u)}{\lambda_m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}ce_m(v)\,ce_n(v)\cos v\,dv,\qquad(2.23)$$

但し　$\lambda_{2n}=\dfrac{ce_{2n}(\frac{\pi}{2})}{\pi A_0^{(2n)}}$　,　$\lambda_{2n+1}=-\dfrac{ce'_{2n+1}(\frac{\pi}{2})}{\pi k A_1^{(2n+1)}}$,

こゝに

$$4g\zeta_3(-\mathrm{ch}u,0)=\frac{d}{\mathrm{sh}u\,du}\sum_{n=0}^{\infty}d_n\int_0^{\pi}Y_0(g\,\overline{\cos\theta-\cos\vartheta})\,ce_n(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^2}\left\{\frac{d}{\mathrm{sh}u\,du}Fey_n(u)\right\}\qquad\cdots(2.24)$$

若し　$|x|<1$　ならば　$u=-i\theta$ とおいて

$$4g\zeta_3(-\cos\theta,0)=2\sum_{n=0}^{\infty}d_n\mu_n\left\{\frac{d}{\sin\theta\,d\theta}ce_n(\theta)\right\},\qquad\cdots(2.24')$$

但し　$\mu_n=-\dfrac{1}{2\pi\lambda_n^2}\dfrac{Fey_n(0)}{Ce_n(0)}$,

(2.15) と (2.20) 及び上式から

$$2g\zeta_3(x,0)=\frac{d}{dx}G^{(2)}(x),\qquad\cdots\qquad(2.25)$$

若し $H''(x)$ が前後対称ならば ζ_1 と ζ_2 も又前後対称となるので $\zeta_3(x,0)-\zeta_3(-x,0)$ を求める事は実験的に容易であるから此の式はその時に便利である。（勿論 $H''(x)$ を実験的に決める事は出来ないからその意味では何の役にも立たないが）

3. 前節の場合の極値問題

さて(2.11)の極小値について考えるに当り，先ず

$$\frac{R}{P} = \int_{-1}^{1} H(x)\, G(x)\, dx, \qquad (3.1)$$

$$G(x) = \frac{d^2}{dx^2} G^{(2)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^4 G^{(4)}(x), \qquad (3.2)$$

$$G^{(4)}(x) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} H(\xi)\, Y_0(q|x-\xi|)\, d\xi, \qquad (3.3)$$

とおき(2.17)上式の展開を仮定すれば(3.3)は前報と全く同様の積分方程式であるから

$$G^{(4)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mu_n\, Ce_n(\theta), \qquad (3.4)$$

となる。所で(3.2)から$G^{(4)}(x)$のxの3次式迄は$G(x)$に響いて来ない。

即ち $G^{(4)}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$, (3.5)

に対応する解は$G(x)$には関係せず従って(3.1)から抵抗に関係しない。此の意味で此の様な解をQuasi-Waveless solutionと呼ぶ事にしよう。

(3.5)の解は前報から明らかな様にそのA, B, C及びD（3次モーメントが与えられる場合）問題の解であるから，今の場合前報で考えた様な先の丸い解は任意常数倍して加減しても抵抗は変らない事になる。

然し乍ら此等の解は(2.13)の条件を満たさないので抵抗積分が収斂しないから此の意味では興味がないが6節で示す様に没水体の極限の意味に解すれば確かに此の様なQuasi-Waveless solutionがある事になる。

今は(3.1)の積分が存在するもののみ考える事にすると(2.13)は4つの条件を与え(3.5)は4つの任意常数を提供するから解は一義的に定まる事になる。

さて前報にいうA問題即ち排水量が与えられる問題を考えよう。此の場合前後対称のもののみ考えて，

$$\nabla = \int_{-1}^{1} H(x)\, dx = \pi \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} A_0^{(2n)}, \qquad (3.6)$$

極値条件は前同様.

$$G(x) = \lambda \;;\; 常数 \qquad \cdots \qquad (3\cdot7)$$

従って

$$R/\rho g\nabla = \lambda/g \qquad \cdots \qquad (3\cdot8)$$

(3·7) が成立つ為には

$$G^{(4)}(x) = \alpha_0' + \frac{\alpha_2'}{2!}x^2 + \frac{\lambda}{4!}x^4 = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_2\cos 2\theta + \alpha_4\cos 4\theta,$$

$$\alpha_4 = \lambda/8\times 4! = \lambda/192\,, \qquad \cdots \qquad (3\cdot9)$$

であればよい。 α_0, α_2 は任意常数である。

従って, (3·4) から

$$-C_{2n} = \frac{1}{\mu_{2n}}\left[\alpha_0 A_0^{(2n)} + \alpha_2 A_2^{(2n)} + \alpha_4 A_4^{(2n)}\right], \qquad \cdots \qquad (3\cdot10)$$

C_{2n} は (2·18) 即ち端点の条件も満足しなければならない。此れと (3·6) から常数はすべて定まる。

即ち

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 C_{00} + \alpha_2 C_{0,2} + \alpha_4 C_{04} &= \frac{\nabla}{\pi} \\ \alpha_0 D_0 + \alpha_2 D_2 + \alpha_4 D_4 &= 0 \\ \alpha_0 E_0 + \alpha_2 E_2 + \alpha_4 E_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots \qquad (3\cdot11)$$

$$C_{2n,2m} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A_{2n}^{(2\nu)}A_{2m}^{(2\nu)}}{\mu_{2\nu}}, \quad D_{2n} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A_{2n}^{(2\nu)}}{\mu_{2\nu}}ce_{2\nu}(0), \quad E_{2n} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A_{2n}^{(2\nu)}}{\mu_{2\nu}}\rho_{2\nu}\, ce_{2\nu}(0),$$

よって

$$\alpha_0 = \frac{\nabla}{\pi\Delta}\begin{vmatrix} D_2 & D_4 \\ E_2 & E_4 \end{vmatrix}, \quad \alpha_2 = \frac{\nabla}{\pi\Delta}\begin{vmatrix} D_4 & D_0 \\ E_4 & E_0 \end{vmatrix}, \quad \alpha_4 = \frac{\lambda}{192} = \frac{\nabla}{\pi\Delta}\begin{vmatrix} D_0 & D_2 \\ E_0 & E_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{00} & C_{02} & C_{04} \\ D_0 & D_2 & D_4 \\ E_0 & E_2 & E_4 \end{vmatrix}, \qquad \cdots \qquad (3\cdot12)$$

(3·8) から

$$\frac{R}{\rho g\nabla^2} = \frac{1}{192\pi g\Delta}\begin{vmatrix} D_0 & D_2 \\ E_0 & E_2 \end{vmatrix}, \qquad \cdots \qquad (3\cdot13)$$

此の方法では計算が厄介であるので (2·14), (2·15) を利用して見よう。

A) 別法　(2·17) 下式の展開を仮定し, (2·18) 上式の条件を考えれば, 条件式は

A4×100

$$\int_{-1}^{1} H''(x)\,dx = \left[H'(x)\right]_{-1}^{1} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} A_0^{(2n)} = 0$$

$$\nabla = \int_{-1}^{1} H(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} H''(x)\, x^2\,dx = $$

$$= \frac{\pi}{8}\left\{ 2\sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} A_0^{(2n)} + \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} A_2^{(2n)} \right\} = \frac{\pi}{8}\sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} A_2^{(2n)}, \qquad \cdots (3.14)$$

極値条件は上の2条件を考慮して

$$G^{(2)}(-\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n}\, d_{2n}\, ce_{2n}(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_2 \cos 2\theta, \quad \cdots (3.15)$$

$$d_{2n} = \frac{1}{\mu_{2n}}\left\{\alpha_0 A_0^{(2n)} + \alpha_2 A_2^{(2n)}\right\} \cdots (3.16)$$

α_0とα_2は(3.14)から決められる。

即ち

$$\alpha_0 C_{0,0} + \alpha_2 C_{0,2} = 0$$
$$\alpha_0 C_{0,2} + \alpha_2 C_{2,2} = \frac{8}{\pi}\nabla, \qquad (3.17)$$
$$\alpha_0 = \frac{8\nabla}{\pi}\frac{-C_{02}}{\left\{C_{00}C_{22} - (C_{02})^2\right\}}, \quad \alpha_2 = \frac{8\nabla}{\pi}\frac{C_{0,0}}{\left\{C_{00}C_{02} - C_{02}^2\right\}},$$

(2.14)から

$$\frac{R}{\rho} = 4\nabla\alpha_2$$

前報の記号を使えば

$$\frac{R}{\rho g \nabla \left(\frac{\nabla}{8}\right)} = \frac{16}{g^3} C_{w2}, \qquad \left(\frac{\nabla}{8} \equiv \frac{\nabla}{L^3}\right) \cdots \quad (3.18)$$

が得られる。

一方 ⊗の断面積は

$$-\int_{-1}^{0} H''(x)\, x\, dx = H(0) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ce_{2n}(\theta)\cos\theta\, d\theta,$$

$$C_p = \nabla / 2H(0), \qquad (3.19)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ce_{2n}(\theta)\cos\theta\, d\theta = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \left\{\frac{(-1)^{r+1}}{4r^2-1}\right\},$$

此の解と前の解(3.13)とは一見、かなり異なるし、又前述の様な訳で Quasi-Waveless solution だけ異なっているかも知れないが今の所よく判らない。

然し(3.18)等は前報でよく調べてあるので此処でのべる必要もなかろう。

B問題) 次に此の方法によって前後の非対称性が在る場合を考えて見よう。

条件式は

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} H''(x)\,dx = \pi \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} A_0^{(2n)} = 0 \\
&-\int_{-1}^{1} H''(x)\,x\,dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} A_1^{(2n+1)} = 0 \\
&\nabla = \int_{-1}^{1} H(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} H''(x)\,x^2\,dx = \frac{\pi}{8} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} A_2^{(2n)}, \\
&m\nabla = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} H(x)\,x\,dx = \frac{1}{12}\int_{-1}^{1} H''(x)\,x^3\,dx = -\frac{\pi}{96} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} A_3^{(2n+1)},
\end{aligned}\right\} \quad (3.20)
$$

従って d_{2n} は (3.16) で与えられる。反対称部分は同様にして

$$
d_{2n+1} = \frac{1}{\mu_{2n+1}} \left\{ \alpha_1 A_1^{(2n+1)} + \alpha_3 A_3^{(2n+1)} \right\}, \quad \cdots \quad (3.21)
$$

条件式から

$$
\alpha_1 = \frac{96 m \nabla C_{1,3}}{\pi \{ C_{11} C_{33} - C_{13}^2 \}}, \quad \alpha_2 = \frac{-96 m \nabla C_{1,1}}{\pi \{ C_{11} C_{33} - C_{13}^2 \}}, \quad \cdots \quad (3.22)
$$

となり抵抗は (3.18) の他に次の R' を加えればよい

$$
\frac{R'}{\rho (m\nabla)^2} = \frac{(96)^2}{2\pi} \frac{C_{11}}{(C_{33} C_{11} - C_{13}^2)} \quad \cdots \quad (3.23)
$$

C 問題) 前後対称で2次モーメントが与えられる場合は、条件式は (3.14) の上に更に

$$
4\varepsilon^2 \nabla = \int_{-1}^{1} x^2 H(x)\,dx = \frac{\nabla}{6} + \frac{\pi}{192} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} A_4^{(2n)}, \quad \cdots \quad (3.24)
$$

特に (3.16) の解を代入した時の ε を ε_0 と記すと

$$
\varepsilon_0^2 = \frac{1}{24} - \frac{(C_{02} C_{04} - C_{00} C_{24})}{96 (C_{00} C_{22} - C_{02}^2)}, \quad \cdots \quad (3.25)
$$

今

$$
\gamma = 768 (\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2), \quad \cdots \quad (3.26)
$$

とおき 極値問題をとくと (3.17) の α_0, α_2 を使って

$$
d_{2n} = \frac{1}{\mu_{2n}} \left\{ (\alpha_0 + \beta_0) A_0^{(2n)} + (\alpha_2 + \beta_2) A_2^{(2n)} + \beta_4 A_4^{(2n)} \right\}, \quad \cdots \quad (3.27)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta_0 = \frac{\nabla \gamma}{\pi \Delta} \begin{vmatrix} C_{22} & C_{24} \\ C_{02} & C_{04} \end{vmatrix}, \quad \beta_2 = \frac{\nabla \gamma}{\pi \Delta} \begin{vmatrix} C_{24} & C_{02} \\ C_{04} & C_{00} \end{vmatrix}, \quad \beta_4 = \frac{\nabla \gamma}{\pi \Delta} \begin{vmatrix} C_{02} & C_{22} \\ C_{00} & C_{02} \end{vmatrix}, \\
&\Delta = \begin{vmatrix} C_{00} & C_{02} & C_{04} \\ C_{02} & C_{22} & C_{24} \\ C_{04} & C_{24} & C_{44} \end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \quad (3.28)
$$

A4 X 100

$$G^{(2)}(-\cos\theta) = (\alpha_0+\beta_0)\frac{1}{2} + (\alpha_2+\beta_2)\cos 2\theta + \beta_4 \cos 4\theta , \quad \cdots \quad (3.29)$$

$$\frac{R}{\rho \nabla^2} = \frac{32\, C_{00}}{\pi (C_{00}C_{22} - C_{02}^2)} + \frac{\gamma^2}{2\pi}\frac{\begin{vmatrix} C_{04} & C_{24} \\ C_{02} & C_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} , \quad \cdots \quad (3.30)$$

但し此の Δ は (3.28) で与えられるものとする。

さて次に g が充分大きい時 A問題の解 (3.18) の性質はすでにのべた所であるから (3.19) の漸近値について一寸ふれておこう。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ce_{2n}(\theta)\cos\theta\, d\theta \doteqdot \frac{n!\, e^{g}}{2^{n+\frac{3}{2}}\, g^{n+1}}\, ce_{2n}(0) , \quad \cdots \quad (3.31)$$

此れから前報の関係式を利用して

$$C_p \doteqdot 2\sqrt{\pi}\,\overline{P}_0 , \quad \cdots \quad (3.32)$$

が出て来るが此れは前報 (4.17) の2倍である。所が計算結果によれば $g \leqq 10$ 迄は $\delta_0 > C_p$ となっているので此の式は幾分怪しい。

次に $g \to 0$ の時の A問題を考えるに

$Y_0(gx) \doteqdot \frac{2}{\pi}\log(\frac{\gamma}{2}gx)$, なる故

端点の条件と排水量を考えれば

$$H''(x) = \frac{8\nabla}{\pi}\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta} , \quad \cdots \quad (3.33)$$

とおけばよく、此の時

$$G^{(2)}(-\cos\theta) = \frac{4\nabla}{\pi}\cos 2\theta , \quad \cdots \quad (3.34)$$

従って $\quad R/\rho g \nabla(\frac{\nabla}{g}) = \frac{128}{\pi g} , \quad \cdots \quad (3.35)$

又 $\quad C_p = \frac{\nabla}{2H(0)} = \frac{3\pi}{16} \doteqdot .589 , \quad \cdots \quad (3.36)$

又 $\quad H(-\cos\theta) = \frac{2\nabla}{\pi}(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin 3\theta) , \quad \cdots \quad (3.37)$

最後に少し数値を掲げておこう。

Fr.	g	$\frac{16}{g^3}C_{W_2}$	C_p	$C_w' = \frac{32}{g^2}t^2 C_{W_2}$, $d/L = 0.03$	$.04$	$.05$
.7071	1	44.60	—	.3214	.5714	.8928
.5000	2	25.46	.6031	.3666	.6518	1.0184
.3976	$\sqrt{10}$	11.94	.6078	.2719	.4833	.7552
.3536	4	5.090	.5813	.1466	.2606	.4072
.3195	$\sqrt{24}$	1.636	—	.0577	.1026	.1602
.2887	6	.3349	.4931	.01447	.02572	.04019
.2659	$\sqrt{50}$	.06522	—	.003320	.005902	.009222
.2500	8	.01475	.4305	.0008494	.001510	.002360
.2364	$\sqrt{80}$	.003126	.4085	.0002013	.0003579	.0005592
.2236	10	.000528	.3869	.0000380	.0000676	.0001056

但し左記はA問題の解であって、

$$C_w = \frac{R_w}{\frac{\rho}{2}V^2\left(\frac{\overline{B}}{2}\right)^2},$$

$\overline{B}$は平均巾とし

$$\overline{B} = \frac{\nabla}{L \cdot d},$$

dは吃水とする。

此れを前報の値と比較する為に前報5節の(5.9)を利用すればA問題の解としてgが充分大きいと前報の記号で

$$C_w = \frac{R_w}{\frac{\rho}{2}V^2\left(\frac{\overline{B}}{2}\right)^2} \fallingdotseq C_{w_0} L_0(gt)$$

となる。

此れはgの大きい、吃水の小さい所でないと具合が悪いので下表$g \geq 3 \sim 5$から成立つと考えられる。

Fr	g	C_w', $d/L = .03$	$.04$	$.05$
.7071	1	1.101	1.278	1.441
.5000	2	1.066	1.247	1.415
.3976	$\sqrt{10}$	.353	.398	.461
.3536	4	.120	.141	.158
.3195	$\sqrt{24}$	.0333	.0388	.0442
.2887	6	.00619	.00719	.00811
.2659	$\sqrt{50}$	.00109	.00129	.00143
.2500	8	.000234	.000274	.000305
.2364	$\sqrt{80}$	.0000471	.0000547	.0000603
.2236	10	.00000757	.00000872	.00000963

此れを上表と比較して見れば特に低速に於て此の分布をQuasi-Waveless Solutionと呼ぶ事が当を得たものである事がよく判るであろう。

4. 圧力型横線分布

圧力分布型の問題を考え、特に生成波の波長に比して進行方向の長さが充分短いとすると又問題は簡單になって来る。

さて (2.9) から 其の場合

$$\int p(x,y)\,e^{-ikx\cos\theta}dx = \rho g H(y)\ , \quad \cdots \qquad (4.1)$$

とおいて

$$\bar{F}(k,\theta)=\int_{-1}^{1}H(y)\,e^{-iky\sin\theta}dy\ , \quad \cdots \qquad (4.2)$$

の様になるものとしよう。 尚此の節では左右対称な場合のみ考える事にする。

さて

$$R = \rho\int_{-1}^{1}H(y)\,G(y)\,dy\ , \quad \cdots \qquad (4.3)$$

$$G(y) = \frac{g^4}{\pi}\int_{-1}^{1}H(\eta)\,P_5(0, g\overline{y-\eta})\,d\eta\ , \quad \cdots \qquad (4.4)$$

となるが

$$P_5(0,gy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(gy\sec^2\theta\sin\theta)\sec^5\theta\,d\theta = \int_0^{\infty}\cos\left(\frac{gy}{2}\,\mathrm{sh}\,2u\right)\mathrm{ch}^4u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{gy}{2}\,\mathrm{sh}\,u\right)\left\{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\mathrm{ch}\,u+\frac{1}{8}\mathrm{ch}\,2u\right\}du$$

$$= \frac{3}{16}K_0\left(\frac{gy}{2}\right)-\frac{1}{16}K_2\left(\frac{gy}{2}\right) = \frac{1}{4}K_0\left(\frac{gy}{2}\right)-\frac{1}{2g^2}\frac{d^2}{dy^2}K_0\left(\frac{gy}{2}\right)\ ,^{*} \quad \cdots \qquad (4.5)$$

よって (4.4) は又部分積分すれば

$$G(y) = \frac{g^4}{4}\left(1-\frac{2}{g^2}\frac{d^2}{dy^2}\right)\bar{F}(y)\ , \quad \cdots \qquad (4.6)$$

$$\bar{F}(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(\eta)\,K_0\left(\frac{g}{2}|y-\eta|\right)d\eta\ , \quad \cdots \qquad (4.7)$$

但し

$$H(\pm 1) = 0\ , \quad \cdots \qquad (4.8)$$

$$\int_{-1}^{1}H(y)\,dy = \nabla\ , \quad \cdots \qquad (4.9)$$

の下における極値条件は明らかに、

$$G(y) = C\ ,\ \text{常数}\ , \quad \cdots \qquad (4.10)$$

* 丸尾孟：造船協会論文集 81号（昭和24年7月）

となるが(4.6)を微分方程式と見れば此の条件は$F(y)$では

$$F(y)=\frac{8}{g^2}C+\alpha\,ch\left(\frac{g}{\sqrt{2}}y\right),\qquad \alpha\ 常数 \quad\cdots\quad (4.11)$$

となり，α，Cは(4.8)，(4.9)から決められる。

さて　$y=-\cos\theta$，$\eta=-\cos\vartheta$ とおいて次の積分を考えよう。

$$I_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}ce_{2n}(\vartheta,-q)\,K_0\left(\frac{g}{2}|\cos\theta-\cos\vartheta|\right)d\vartheta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{g}{2}\cos\theta\,sh u\right)du\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{g}{2}\cos\vartheta\,sh u\right)ce_{2n}(\vartheta,-q)\,d\vartheta,\quad\cdots\quad(4.12)$$

此処に　$q=k^2=\left(\frac{g}{4}\right)^2\ (=-\frac{5}{4})$，

次別積分によって

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{g}{2}\cos\vartheta\,sh u\right)ce_{2n}(\theta,-q)=(-)^n\frac{A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(0,q)}Ce_{2n}(u,q),$$

$$\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{g}{2}\cos\theta\,sh u\right)Ce_{2n}(u,q)\,du=(-)^n\frac{\pi A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(0,q)}Fek_{2n}(-i\theta,-q),$$

が証明出来るから

$$I_{2n}=\pi\left\{\frac{A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(0,q)}\right\}^2Fek(-i0,-q)=\lambda_{2n}\,ce_{2n}(\theta,-q),\quad\cdots\quad(4.13)$$

$$\lambda_{2n}=\pi\left\{\frac{A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(0,q)}\right\}^2\frac{Fek_{2n}(0,-q)}{Ce_{2n}(\frac{\pi}{2},-q)},\quad\cdots\quad(4.14)$$

となる。　今

$$H(y)=\frac{1}{\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\,ce_{2n}(\theta,-q)\quad,\quad\cdots\quad(4.15)$$

と展開すれば

$$F(-\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\lambda_{2n}\,ce_{2n}(\theta,-q)\ .\quad\cdots\quad(4.16)$$

従って

$$\left.\begin{aligned}1&=2\sum_{n=0}^{\infty}(-)^nA_0^{(2n)}ce_{2n}(\theta,-q),\\ ch\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^nb_{2n}\,ce_{2n}(\theta,-q),\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad(4.17)$$

の様に展開出来るから，(4.16)と(4.11)から

$$a_{2n}=\frac{(-)^n}{\lambda_{2n}}\left\{\frac{16}{g}CA_0^{(2n)}+\alpha\,b_{2n}\right\},\quad\cdots\quad(4.18)$$

となる。

常数は、(4.8) と (4.9) から

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\nabla}{\pi} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n a_{2n}A_0^{(2n)} = \frac{16}{g^4}C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{A_0^{(2n)}\}^2}{\lambda_{2n}} + \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{2n}A_0^{(2n)}}{\lambda_{2n}}, \\
0 &= \frac{16C}{g^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n A_0^{(2n)}}{\lambda_{2n}}ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2},-q\right) + \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n b_{2n}\,ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2},-q\right)}{\lambda_{2n}},
\end{aligned}
\right\} \quad (4.19)
$$

から決まり、此の時

$$R = \rho C\nabla, \quad (4.20)$$

となる。

此の様に綺麗な形をうるけれども今の場合が問題になるのは $g\to 0$ の場合であるからあまり実用的な形ではない。

$g\to 0$ とすると $K_0\left(\frac{g}{2}y\right) \doteqdot -\log\left|\frac{\gamma g y}{4}\right|,$

で (4.11) は

$$F(y) = \frac{8}{g^4}C + \alpha\left(1+\frac{g^2}{4}y^2\right), \quad (4.21)$$

となるが今 (4.8), (4.9) を満足する解として

$$H(y) = \frac{2}{\pi}\nabla\sin\theta, \quad (4.22)$$

とおけば

$$F(y) = \frac{\nabla}{\pi}\left[\log 2 - \frac{1}{2} - y^2\right], \quad (4.23)$$

となるから (4.21) から

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{\nabla}{\pi}\cdot\frac{4}{g^2}, \\
C &= \frac{g^4\nabla}{2\pi}\left[1+\frac{g^2}{4}\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)\right],
\end{aligned}
\right\} \quad (4.24)
$$

よって (4.20) より

$$\frac{R}{\rho g\nabla\left(\frac{\nabla}{g}\right)} = \frac{4g}{\pi}\left[1+\frac{g^2}{4}\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)\right], \quad (4.25)$$

となる。

(4.22) の型の解は前揚丸尾教授によって与えられたものである。

(4.25) は $g\to 0$ で零になる点で (3.35) と甚だしく異っている。即ち高速では此の型は縦長の物体に比して甚だしく抵抗が小さい事になる事はよく知られた事実でもある。

5. 円形圧力分布

前節迄の問題は線上の特異点分布を取扱ったが此節では面分布の最も簡単な場合として圧力が円形領域上に点対称に分布している場合を考えよう。

抵抗は

$$R=\frac{\rho g^4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|F(g\sec^2\theta,\theta)\right|^2\sec^5\theta\,d\theta, \qquad (5.1)$$

$$F(g\sec^2\theta,\theta)=\frac{1}{\rho g}\iint P(x,y)\,e^{-ik\varpi}dx\,dy=2\pi\int_0^1 H(r)J_0(kr)\,r\,dr, \qquad (5.2)$$

但し $P=\rho g H$，即ち H は圧力水頭とする。

よって

$$\frac{R}{\rho}=2\pi\int_0^1 H(r)\,r\,dr\,G(r), \qquad (5.3)$$

但し

$$G(r)=2g^2\int_0^1 H(\rho)\,K^{(2)}(r,\rho)\,\rho\,d\rho, \qquad (5.4)$$

$$K^{(2)}(r,\rho)=g^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}J_0(gr\sec^2\theta)J_0(g\rho\sec^2\theta)\sec^5\theta\,d\theta, \qquad (5.5)$$

此れは然し次の $K(r,\rho)$ から微分によって導かれる。
即ち

$$K^{(2)}(r,\rho)=\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\right)\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\right)K(r,\rho), \qquad (5.6)$$

$$K(r,\rho)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}J_1(gr\sec^2\theta)J_1(g\rho\sec^2\theta)\sec\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\infty}J_1(gr\,\mathrm{ch}^2u)J_1(g\rho\,\mathrm{ch}^2u)\,du, \qquad (5.7)$$

所で

$$J_1(kr)J_1(k\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}J_0(kR)\cos\varphi\,d\varphi=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}e^{ikR\cos u}\cos\varphi\,d\varphi\,du$$

$$R^2=r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi$$

又

$$\int_0^{\infty}e^{iz\,\mathrm{ch}^2u}du=e^{\frac{iz}{2}}\int_0^{\infty}e^{\frac{iz}{2}\mathrm{ch}2u}du=\frac{\pi i}{4}e^{\frac{iz}{2}}H_0^{(1)}\left(\frac{z}{2}\right),$$

故に (5.7) は

$$K(r,\rho)=\frac{i}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}e^{\frac{igR}{2}\cos u}H_0^{(1)}\left(\frac{gR\cos u}{2}\right)\cos\varphi\,d\varphi\,du, \qquad (5.8)$$

の様な積分表示が出来る。

さて、

極値条件は A 問題では明らかに

$$G(r) = C \quad ; 常数 \tag{5.9}$$

で此の時

$$R = \rho \, \nabla C \,, \tag{5.10}$$

で

$$\nabla = 2\pi \int_0^1 H(r)\, r\, dr, \tag{5.11}$$

先ず $g \to 0$ の極限を考えて見よう。

(5.8) において

$$\frac{i}{4\pi} e^{\frac{igR\cos u}{2}} H_0^{(1)}\left(\frac{g}{2}R\cos u\right) \xrightarrow[g \to 0]{} -\frac{1}{4\pi} Y_0\left(\frac{gR\cos u}{2}\right) \to \frac{1}{2\pi^2} \log\left(\frac{\gamma g}{4} R\cos u\right)$$

かつて

$$K(r,\rho) \doteqdot -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \log\left|\frac{\gamma g}{4}R\cos u\right| \cos\varphi\, d\varphi\, du = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \log|R| \cos\varphi\, d\varphi$$

所で

$$\log R = \frac{1}{2}\log(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi)$$

$$= \log r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n}{n}\cos n\varphi \,, \quad \text{for } r > \rho$$

$$\log \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \frac{\cos n\varphi}{n} \,. \quad \text{for } \rho > r$$

よって

$$K(r,\rho) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{\rho}{r}\right) & \text{for } r > \rho \\ \frac{1}{4}\left(\frac{r}{\rho}\right) & \text{for } r < \rho \end{cases} \tag{5.12}$$

此れを (5.6), (5.4) に代入し, (5.9) の極値条件を入れると

$$C = \frac{2g^2}{r}\frac{d}{dr} r \int_0^1 H(\rho)\left\{\frac{d}{d\rho}\rho\, K(r,\rho)\right\} d\rho \tag{5.13}$$

となるから

$$\frac{C}{4g^2} r = \int_0^1 H(\rho)\left\{\frac{d}{d\rho}\rho K(r,\rho)\right\} d\rho$$

$$= \frac{2}{4}\int_0^r H(\rho)\frac{\rho\, d\rho}{r} + \frac{1}{4}\int_r^1 H(\rho)\, d\rho \frac{d}{d\rho}(r) \,,$$

即ち

$$\frac{C}{2g^2} r^2 = \int_0^r H(\rho)\rho\, d\rho \,, \tag{5.14}$$

を得る。

此の積分方程式は両辺を微分して見れば明らかに

$$H(r) = \frac{C}{g^2} , \qquad (5.15)$$

なる解を持つが(5.11)の条件から常数Cは決められて

$$C = \frac{g^2}{\pi} \nabla , \qquad (5.16)$$

よって(5.10)より

$$\frac{R}{\rho g \nabla \left(\frac{\nabla}{g}\right)} = \frac{4}{\pi} g , \qquad (5.17)$$

を得る。

此の抵抗値は前節の極限値と一致するので円形分布も又高速に適している事が判る。

いづれにしても此の場合極値問題が存在する事は確かであろう。

一般の場合にはH(r)を次の様に展開するのが便利であろう。即ち

$$H(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta) , \qquad (5.18)$$

但し $r = \sin\frac{\theta}{2}$,

そうすれば(5.2)から

$$\bar{H}(K,\theta) = \frac{2\pi}{K} \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{2n+1}(K) , \qquad (5.19)$$

排水量は

$$\nabla = 2\pi \int_0^1 H(r)\, r\, dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} H(\sin\tfrac{\theta}{2}) \sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} a_0 , \qquad (5.20)$$

抵抗は

$$\frac{R}{\rho} = \sum_{n,m=0}^{\infty} (-)^{n+m} a_n a_m R_{n,m} , \qquad (5.21)$$

$$R_{n,m} = \frac{(-)^{n+m}}{\pi} g^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2n+1}(g \sec^2\theta) J_{2m+1}(g \sec^2\theta) \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{(-)^{n+m}}{\pi} g^2 \int_0^{\infty} J_{2n+1}(g \cosh^2 u) J_{2m+1}(g \cosh^2 u)\, du , \qquad (5.22)$$

の様に書ける。

gが小さい場合は既に考えたから、今度はgが大きい場合を少し考えて見よう。

gが充分大きければ

$$J_{2n+1}(z) = (-)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(\overline{2n+1}^2 - \frac{1}{4}\right)}{2z}\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

故 (5.22) は

$$R_{n,m} \doteqdot \frac{g}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\sin(2g\sec\theta) - \frac{C_{n,m}}{2g}\cos^2\theta\cos(2g\sec\theta)\right]\cos\theta\, d\theta,$$

但し $C_{n,m} = \overline{2n+1}^2 + \overline{2m+1}^2 - \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2g\sec\theta)\cos\theta\, d\theta \doteqdot \frac{\sqrt{2\pi}}{4\sqrt{g}}\sin\left(2g+\frac{\pi}{4}\right).$$

を利用すれば

$$R_{n,m} \doteqdot \frac{g}{\pi^2}\left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2g}}\sin\left(2g+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{C_{n,m}\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2g^3}}\cos\left(2g+\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad \cdots (5.23)$$

今仮に a_0, a_1 のみとって $O(1/\sqrt{g^3})$ を省略すれば

$$\frac{R}{\rho} \doteqdot (a_0-a_1)^2\,\frac{g}{\pi}\left\{1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2g}}\sin\left(2g+\frac{\pi}{4}\right)\right\}, \quad \cdots (5.24)$$

となるから $a_0 = a_1$ とおけば R/ρ は少くとも $O(1/\sqrt{g^3})$ となる。

此の考察を進めて行けば前々報7節と全く同様な過程で周辺で圧力が零になる様な分布を得る事になる。

6. 没水体

もう一度線上分布にかえって、今度は水面下 f の所で $-1<x<1$ の間に x 方向の2重吹出しが分布しているものと考えよう。

抵抗は

$$R = \rho\int_{-1}^{1} H(x)\,G(x)\,dx, \quad \cdots (6.1)$$

$$G(x) = \frac{g^4}{\pi}\int_{-1}^{1} H(\xi)\,P_5(gx-\xi, 2gf)\,d\xi, \quad \cdots (6.2)$$

と与えられる。

極値問題は $G(x)$ を x の ± 1 の間で例えば常数に保つ事である。所が $P_5(g\overline{x-\xi}, 2gf)$ は今は $f \neq 0$ なので $\overline{x-\xi}$ に関して正則であるから、$G(x)$ が此の間で常数であるならば $x \to \pm\infty$ に於ても常数でなければならない。

然るに $P_5(x,t)$ は $x \to \infty$ で零となるから $G(\infty) = 0$ 即ち此の常数は零に等しい。

そうすれば $H(\xi) = 0$ 以外の解はありえないから、結局極値問題の解は恒等的に零である様な無意味な解以外にありえない。

然し (6.2) を与えられた $G(x)$ に関する積分方程式と見るならばその解 $H(x)$ は一義的に決まる。

従って数値的には極値問題の解は殆ど常に存在すると考えられる。*

此の解法をもう少し合理化するには (6.2) と (3.2) との親近性に留意して

$$G(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^4 G^{(4)}(x), \qquad (6.3)$$

$$G^{(4)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H(\xi) P_1(g\overline{x-\xi}, 2gf)\, d\xi, \qquad (6.4)$$

とおこう。

(6.4) も (6.2) と全く同様な性質をもっているけれども少くとも数値的には与えられた $G^{(4)}(x)$ に対して唯一つの解 $H(x)$ を持つ。

所で (6.3) の関係から $a_0, \sim a_4$ を任意常数として

$$G^{(4)}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \qquad (6.5)$$

とおけば $\qquad G(x) = 0, \qquad (6.6)$

となるから (6.1) から抵抗は零となる事になる。

勿論上述の様に $G^{(4)}(x)$ を (6.5) の様にする様な $H(x)$ は恒等的に零になるので理論的には興味がないけれども、数値解析的には (6.4) を (6.5) によって解けば任意常数を4つ含む解が得られてその解は (6.3) から明らかに (6.6) を

*G. Weinblum; D.T.M.B. Report No. 758 (May 1951)

A4×100

満足するので抵抗は非常に小さいと考えられる。

(6.2)を直接数値的に解く方法に較べると此の方法は任意常数を含むので便利であろうと思われる。

此の様な解を矢張3節と同様 Quasi-Waveless solution と呼ぶ事にしよう。

$f \to 0$ とすると(6.4),(6.5)の解は3節式いは前報で考えたものと同じであるから恒等的に零でない解を持つ事になる。

従って3節の問題を没水体の極限と考えるならばそこでのべた様に理論的にも Quasi-Waveless solution を持つ訳である。

さて此の様な訳で没水体には極値問題が存在しないで然も抵抗はかなり小さくする事が出来るとすると、その最小値は零であると考えざるを得ない。

そこで実際それを充分小さくし得る事を示そう。

先ず前後対称なもののみ考える事にして

$$H(x) \equiv H(-\cos\theta) = \frac{\varphi(\theta)}{\sin\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{\cos 2n\theta}{\sin\theta}, \quad \cdots \quad (6.7)$$

とおこう。

$$R_5(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m x^{2m}}{(2m)!} U_{m+2}(t), \quad (6.8)$$

但し $U_n(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t\sec^2\theta} \sec^{2n+1}\theta\, d\theta,$

と展開出来るから(6.2)は

$$\frac{1}{g^4} G(-\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{2n} \frac{(-)^m g^{2m} U_{m+2}(t)}{(2m)!} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2n\vartheta (\cos\theta - \cos\vartheta)^{2m} d\vartheta,$$

ところで

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2n\vartheta (\cos\theta - \cos\vartheta)^{2m} d\vartheta = \sum_{r=0}^{m} \frac{(2m)!\,\cos^{2r}\theta}{2^{2m-2r}(2r)!\,(n+m-r)!\,(m-n-r)!},$$

であるから

$$\frac{1}{g^4} G(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{m} \frac{(-)^m g^{2m} U_{m+2}(t)\, x^{2r} a_{2n}}{2^{2m-2r}(2r)!\,(n+m-r)!\,(m-n-r)!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r (gx)^{2r}}{(2r)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n a_{2n} C_{2n,2r}, \quad \cdots \quad (6.9)$$

但し

$$C_{2n,2r} = \left(\frac{g}{2}\right)^{2n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-)^s g^{2s} U_{r+n+s+2}(t)}{2^{2s}\, s!\,(2n+s)!}, \quad (6.10)$$

今必要なだけ大きい数Nをとって

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n a_{2n} C_{2n,2r} = 0, \quad \text{for } r=0, \cdots, (N-1)\text{迄}, \quad \cdots (6.11)$$

とすれば

$$G(x) = O\left\{\frac{(gx)^{2N}}{(2N)!}\right\}, \quad \cdots \quad (6.12)$$

となるから(6.9)の級数が收斂するならばNのとり方によって$G(x)$を充分小さくする事が出来る答である。

今排水量が与えられるとすれば(6.7)から

$$\nabla = \int_{-1}^{1} H(x)\,dx = \pi a_0, \quad \cdots \quad (6.13)$$

であるから(6.11)と合わせて$(N+1)$ケの方程式を得る。

従って今未知数a_nを$M(\geq N+1)$ケとればa_nは$(M-N+1)$ケだけ不定な係数を残して一義的に定まる。

そしてその様なa_nによって(6.12)が成立するから、Nを充分大きくとって$G(x)$を幾らでも小さくする事が出来、従って又(6.1)からRをいくらでも小さくする事が出来る事になる。

此の操作は$g/2f$が小さければ数値計算上も割合簡単であると思われる。(10桁程度の容量で計算するとして$g/2f<4\sim5$迄)然し此値が大きい時、即ち深度が小さいか、速度が低い時には、級数の收斂が遅いので実行は不可能に近いと思う。

最後にもう一つの極限として巾も長さも短い垂直線上の分布の問題が考えられるが、此れも上と殆ど同様の討論で極値問題の解がない事が云えるが、実用上の興味もうすいので省略しよう。直観的に云えば此の場合はとにかく排水量を水面下深くに持って行けば行く程抵抗はどんどん小さくなると云う事であろうか。

さて此の節の考察から推察すれば、前節で少し考えた有限喫水の垂直舷側船の極値問題の解はそれを数値的に解いて行くに際して、かなりの不安定さを示す可能性が充分にありそうである。

従って予かじめ(6.3),(6.4)を導いた様な操作をとっておく方がよいかも知れない。

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

7. Influence function

極値問題においては第1報以来、Gと記して来た函数が重要な役割を演じているのを見て来た。

此れを我々は次の様な意味でInfluence functionと呼ぼう。

さて第1報(2.4)にかえて、今ある点(x, z)に僅かな変化あって排水量が$\Delta\tau$だけ増えたとしよう。

$$\frac{R}{\rho g} = \int_{-\tau}^{0}\int_{-1}^{1} H(x,z)\, G(x,z)\, dx\, dz, \quad \cdots \qquad (7.1)$$

$$G(x,z) = \frac{g^3}{\pi}\int_{-\tau}^{0}\int_{-1}^{1} H(\xi,\zeta)\, P_{-5}(g\,\overline{x-\xi}, -g\,\overline{z+\zeta})\, d\xi\, d\zeta, \quad \cdots \qquad (7.2)$$

とかけるから2次の項を無視すると

$$\frac{\delta R}{\rho g\, \delta\tau} = 2G(x,z), \quad \cdots \qquad (7.3)$$

此のInfluence function Gは第1報(2.7)から

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g\frac{\partial}{\partial z}\right) G(x,z) = 0, \quad \cdots \qquad (7.4)$$

の様な微分方程式を満足するから$G(x,0)$が与えられれば

$$G(x,z) = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{\pi|z|}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi,0)\, e^{\frac{g(x-\xi)^2}{4z}}\, d\xi, \quad (z<0) \qquad (7.5)$$

の様な表現が出来る。

即ち$G(x,z)$のz方向への変化の様子は熱伝導率$1/g$の物体の中を伝わる温度分布の様子に等しい事からその大体の様相を直観的に想像する事が出来る。

先ず始めに垂直舷側無限吃水の場合は

$$G(x,0) = -\frac{g^2}{\pi}\int_{-1}^{1} H(\xi)\, P_{-3}(g\,\overline{x-\xi}, 0)\, d\xi$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{-1}^{1} H(\xi)\, P_{-1}(g\,\overline{x-\xi}, 0)\, d\xi$$

$$= -\frac{1}{8g^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \Gamma(gx), \quad \cdots \qquad (7.6)$$

但し$\Gamma(gx)$は第1報(2.5)によるものである。

さて$G(x,z)$を求めるには$G(x,0)$をxの全域について知ら

なければならない訳であるが $|x|>1$ では表示式も面倒であり，且つ $x=1$ の所でどの様な不連続性を持つものかも計算して見ていないので此処では，とにかく $|x|\leq 1$ の内の値のみに注目しておく。

さて，緒論 A問題では(3.6)から

$$\Gamma(gx) = \frac{1}{2} C_{w0} = \text{const.}$$

故に

$$G(x,0) = 0 \quad \text{for} \quad |x| \leq 1 \qquad \cdots (7.7)$$

B)問題でも同じく(3.13)から

$$\Gamma(gx) = \frac{1}{2} C_{w0} - 2\alpha C_{w1} x,$$

故

$$G(x,0) = 0 \quad \text{for} \quad |x| \leq 1 \qquad \cdots (7.8)$$

C)問題では(3.26)から

$$\Gamma(gx) = \frac{1}{2} C_{w0}\left(1 - \gamma \frac{C_{02}}{C_0 E}\right) + \gamma C_{w2}(2x^2-1),$$

$$\therefore \quad G(x,0) = -\frac{\gamma}{2g^2} C_{w2}, \qquad \cdots (7.9)$$

の様になる。

一方此の3節の場合は

$$G(x,0) = \frac{g^3}{\pi}\int_{-1}^{1} H(\xi) P_5(g\overline{x-\xi},0)\,d\xi = \frac{1}{\pi g}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_{-1}^{1} H''(\xi) P_1(g\overline{x-\xi},0)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{g}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 G^{(2)}(x), \qquad \cdots (7.10)$$

但し(2.15)の $G^{(2)}(x)$ の定義による。

此の A問題の解の場合は(3.15)により

$$G^{(2)}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_2(2x^2-1),$$

$$\therefore \quad G(x,0) = \frac{4}{g}\alpha_2 = \frac{2}{g^3}\nabla C_{w2}, \qquad \cdots (7.11)$$

此の他の場合は一切省略するが前節の考察と考え合せると(7.7)式の $G(x)=0$ $|x|<1$ は最もと肯かれる次第である。

又(7.9)は一見逆説的に見える。即ちA問題の解より C_0 が大きい解にあっては $\gamma>0$ であるから，(7.9)から，どこかに排水量を附け加えると，抵抗が減る可能性がある事になる。此れに反して(7.11)は全く常識的であって此の場合

は排水量を減らす以外に抵抗を減らす方法はない。

　我々は従来此の報告で考えた様な先の尖った船を主として考えて来たので(7.11)の様な常識を持っているのではないかと考えられる。

従って前報で考えた様な先の丸い型の船をはっきりと区別して考えた例はないので(7.9)の様な式の意味を具体的に掴む事は今の所出来ない訳である。

8. 結言

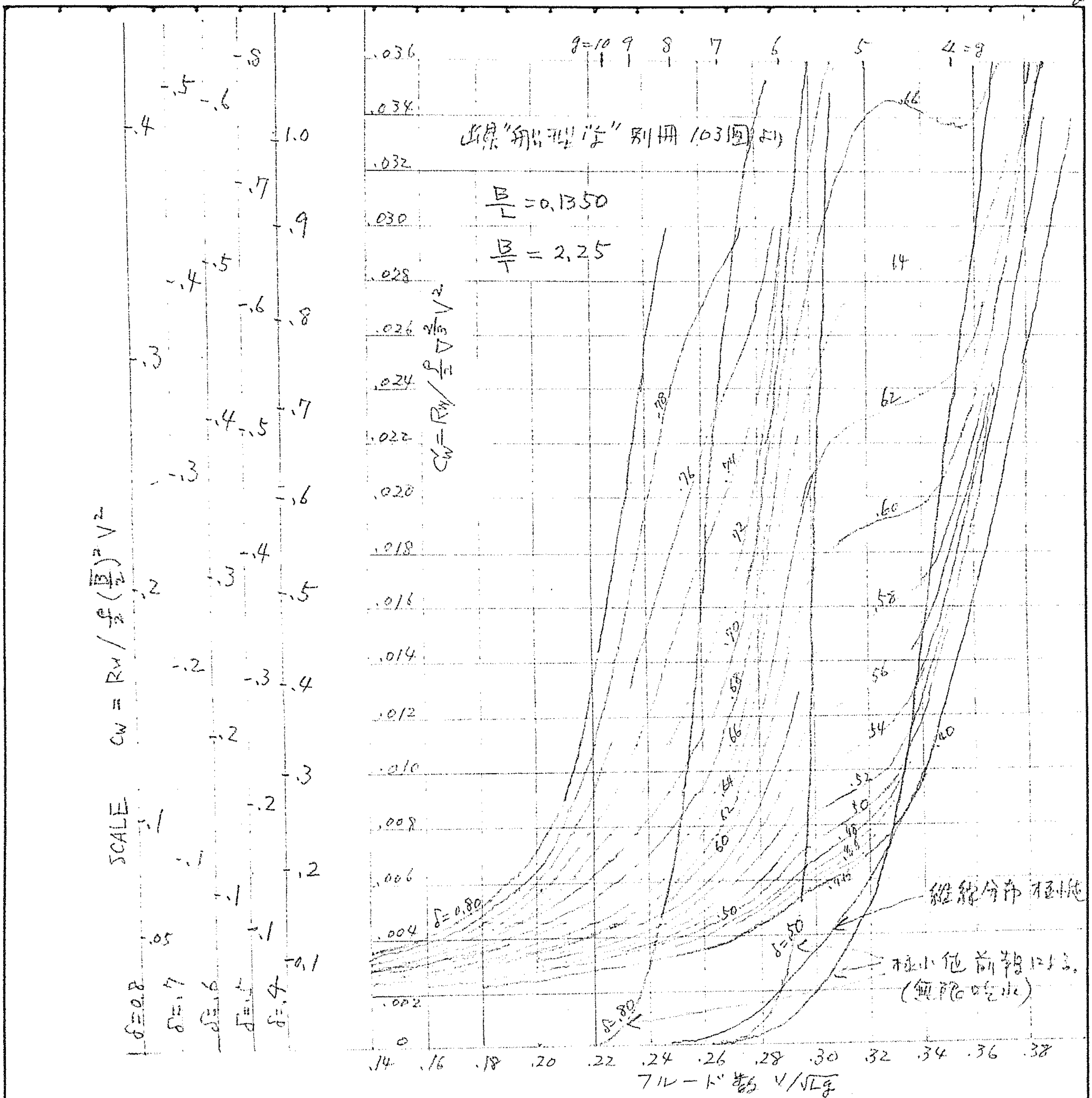
　さて以上の討論によって、極値問題に関する理論的なそして又数値計算上の問題点の幾つかが、かなりはっきりして来た様に思われる。

　特に6節の没水体に関する考察に関聯して導入したQuasi-Waveless solutionと云う考え方は乾教授のWaveless shipと云う考え方を実際上支持するものとして注目に値しよう。

　此の様な解の簡単な求め方として前報に於て紹介した極小船型群(此れはむしろQuasi-Waveless Groupとでも呼ぶ方が適当であろう)は便利で然も実用的ではないかと考えられる。

　最後に附録として山県"船型学"所載の剰余抵抗値図の中に前報及び此の報告によって得られた抵抗値を適当に換算してプロットして見た。　換算の仕方によってはかなり値を異にするが、とにかく低速では此等の方法による解は平行部を持たない~~所~~為もあり、ひどく低い値を与える。　尚普通造波抵抗の計算値は低速では実験値の略々4倍程度になるものであるから低速における此等の値が如何に小さいものであるかが理解出来よう。

以上。



但し $C_W' = A C_W$, $A = (\frac{B}{2})^2 / \nabla^{\frac{2}{3}}$, $\nabla' = \frac{\nabla}{LT} = B C_b$

$A = \frac{1}{4} (\frac{B^2}{LT})^{\frac{2}{3}} C_b^{\frac{4}{3}} = 0.1130\ C_b^{\frac{4}{3}}$

$\delta = C_b$	.4	.5	.6	.7	.8
A	.0333	.0449	.0571	.0702	.0838

岩田達三 "高速艇の造波抵抗に関する研究" より

Mod. No 57.

C_p	$C_\otimes$	$\frac{\nabla}{(L/10)^3}$	d/L
.511	.824	1.854	.0348

$$C_w' = R_w / \frac{\rho}{2} V^2 \nabla^{\frac{2}{3}} , \quad C_w = R_w / \frac{\rho}{2} V^2 \left(\frac{\overline{B}}{2}\right)^2 = 21.2\, C_w'$$

但し $\overline{B} = \nabla / L d$

。 $r = R_w / \rho g \nabla \left(\frac{\nabla}{L^3}\right)$.

$\frac{\ell}{v}$	Fn	No.57 C_w'	(Taylor) C_w'	No.57 r	(Taylor) r	Min. r	No.57 C_w	Taylor C_w	Min. C_w
2	.500	.0248	.0275	13.6	14.3	25.5	.525	.582	.492
4	.354	.0090	0102	2.46	2.88	5.09	.190	.216	.195
6	.289	0080	.0070	1.46	1.28	.335	.169	.148	.020
8	.250	.0035	.0030	.48	.41	.015	.074	.064	.001
10	.224	.0040	.0020	.44	.22	001	.085	.042	.000

但し Min. r, Min. C_w とあるは前報3節 A問題の解によるものとする。此れは一定の船型ではなく速度に応じて抵抗最小となる様な船型であるから上記値は単に参考程度のものと解釈されたい。尚 C_p は大体似通った値となっている。

A4×100

実線は 前報の資料に基いて丸尾教授の計算による
点線は $\frac{4}{\pi}(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin 3\theta)$