

第 2 編
覚 書 の 部

“造波機の理論に関する覚書”

別 所 正 利

内容目次

1. 序論及び記号等
2. 速度ポテンシャルと無限遠方の波
3. 水深が有限な場合
4. 応用例

1. 序論及び記号等

造波機の理論として筆者の知っている資料は僅か*なものであるが、実際にそれを利用している例は入手の容易な刊行物では殆ど見られない様であるので、以下簡単な要約を記し、現在見られる各種造波機に応用して、その大体の特性を求めて概念的理解の用に供するものである。

従って詳しい計算は行わず、造波機を充分離れた所の波についてのみ考える事とし、直接造波機に働く力等については考えない。

此の様な問題については一部計算例*はあるが、他の型式については未だ解かれておらず、今後の興味をさそう次第である。

記号等；

$\sigma = 2\pi/T$, T は波の周期

$\nu = \sigma^2/g$ ；水深無限ならば $\nu = 2\pi/\lambda$, λ は波長

V ；波速, 水深無限ならば $V = \sqrt{g\lambda/2\pi}$,

h_w ；波の振巾(半波高)

h_p ；圧力水頭

p ；圧力, $h_p = p/\rho g$, ρ は水密度, g は重力の常数

ϕ ；速度ポテンシャル

x, y ；垂直上方に y 軸をとり原点を水面においた座標

η ；水面変位

$P \equiv (x, y)$, $Q \equiv (x', y')$

$r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$, $r_s = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y'+2D)^2}$

D ；水路深さ

B ；水路巾

C ；物体境界線左から右に長さを測る。

* T. H. Havelock ; Phil. Mag. (1929)
田才福造；造協論文集105号(昭和34年7月)

- n ; C の法線で, 水中に向けてとる。
- μ ; レーリーの仮想摩擦係数, 運算の後零とおく。
- a ; ストローク

2. 速度ポテンシャルと無限遠方の波^{*}

ベルヌーイの式から自乗の項を省略して

$$p/\rho \approx \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g y = 0 \quad \text{for } y = 0, \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

同様に表面の連続性から

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{for } y = 0, \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

よって

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \text{for } y = 0, \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

今すべての量は T なる周期で振動して定常状態に達しているとすれば

$$\varphi = \text{Re} \{ \Phi e^{i\sigma t} \} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\eta = \text{Re} \{ H e^{i\sigma t} \} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

$$p/\rho = \text{Re} \{ P e^{i\sigma t} \} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

の様に書き, Φ, H, P 等を複素数として取扱かえば正弦, 余弦項の式を一つにまとめてとける。

先ず (2.3) は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \nu \Phi = 0, \quad \text{for } y = 0, \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

さて単位吹出しが Q 点にある時 (2.7) 式を満足する P 点のポテンシャルは,

$$S(P, Q) = \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - 2 \int_0^\infty e^{K(y+y')} \frac{\cos K(x-x')}{K - \nu + \mu i} dK, \quad \dots\dots (2.8)$$

で与えられる。

そこでグリーンの定理を使って, 一般に

$$\Phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_c \left\{ \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n'} S(P, Q) - \Phi(Q) \frac{\partial}{\partial n'} S(P, Q) \right\} ds', \quad (2.9)$$

但し, n' は Q 点に関する法線とする。

特に $\nu |x - x'|$ が充分大きいとすると (2.8) 式中の波の部分は,

$$S(P, Q) \rightarrow -2\pi i e^{\nu(y+y') - i\nu|x-x'|}, \quad \dots\dots (2.10)$$

$$\nu|x-x'| \gg 1$$

* T. H. Havelock ; 前出, F. Ursell ; Proc. Roy. Soc. vol. 220 (1953)
 佐野静雄 “応用数学” 156頁

従って (2.9) 式も $\nu|x|$ が充分大きければ,

$$\phi(P) \xrightarrow{\nu|x| \gg 1} -i \int_c \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \right\} e^{\nu|y+y'| - i\nu|x-x'|} ds', \dots \quad (2.11)$$

従って (2.1), (2.5) 式から

$$H(x) \xrightarrow{\nu|x| \gg 1} \frac{\sigma}{g} \int_c \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \right\} e^{\nu y' - i\nu|x-x'|} ds', \dots \quad (2.12)$$

以上は一般式であるから、普通の場合は与えられた境界条件から問題を解かねばならないが、

- i) 水面上の圧力分布が与えられる場合
- ii) $x=0$ の線に関し左右対称で且つ c がこの線である場合

には簡単な解が既に求められており、次の通りである。

$$H(x) \rightarrow \frac{\nu}{gi} e^{-i\nu x} \int_c p(x') e^{i\nu x'} dx', \quad \text{for } x > x', \quad \dots \quad (2.13)$$

$$H(x) \rightarrow -\frac{2\sigma}{g} e^{-i\nu x} \int_c u(y) e^{\nu y'} dy', \quad \text{for } x > 0, \quad \dots \quad (2.14)$$

ここに $u(y)$ は c 上の x 方向の速度の振巾である。

3. 水路深さが有限の場合

この場合 (2.1) ~ (2.3) の条件の他に更に、

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \text{for } y = -D, \quad \dots \quad (3.1)$$

でなければならない。

この場合単位吹出しの速度ポテンシャルは、

$$S_D(P, Q) = \log r_1 + \log r_2 + \int_0^\infty \left\{ e^{Ky'} + e^{-K(y'+2D)} \right\} \frac{\cosh K(y+D)}{\cosh KD} \cos K(x-x') \left\{ \frac{K+\nu}{K \tanh KD - \nu + \mu i} \right\} \frac{dK}{K}, \dots \quad (3.2)$$

この式の右辺の積分は $K=0$ で $1/K$ のオーダーになるから確定的意味を有しないので少し変形しなければならない。

先ず、

$$S_D(P, Q) = I + J \quad \dots \quad (3.3)$$

$$I = \log r_1 + \log r_3 - \int_0^\infty \left\{ e^{\frac{Ky'}{e} - K(y'+2D)} \right\} \frac{\cosh K(y+D)}{\cosh KD} \cos K(x-x') \frac{dK}{K}, \quad (3.4)$$

$$J = \int_0^\infty \left\{ e^{\frac{Ky'}{e} - K(y'+2D)} \right\} \frac{\cosh K(y+D)}{\cosh KD} \cos K(x-x') \left(\frac{1 + \tanh KD}{K \tanh KD - \nu + \mu i} \right) dK, \quad (3.5)$$

とおけば、 J は確定する。(3.4)の積分は、

$$\frac{1}{\cosh KD} = 2e^{-KD} (1 - e^{-2KD} + e^{-4KD} - \dots),$$

の様に展開して項別積分すれば未定の常数を除いて、

$$I = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \log \{ (x-x')^2 + (y-y'-2nD)^2 \} \{ (x-x')^2 + (y+y'-2nD)^2 \},$$

となる。

一方、

$$\frac{\sinh \frac{\pi x}{D}}{\cosh \frac{\pi x}{D} - \cos \frac{\pi y}{D}} = \frac{2D}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + (y+2nD)^2},$$

なる公式を利用すれば、やはり常数を別として、

$$I = \frac{1}{2} \log \left\{ \cosh \frac{\pi(x-x')}{D} - \cos \frac{\pi(y-y')}{D} \right\} \left\{ \cosh \frac{\pi(x-x')}{D} - \cos \frac{\pi(y-y')}{D} \right\}, \dots (3.6)$$

となる。

さて S_D の内の波の成分は、

$$S_D(P, Q) \xrightarrow{\nu|x-x'| \gg 1} -2\pi i f(K_0 D, K_0 y) \frac{\cosh K_0(y+D)}{\cosh K_0 D} e^{K_0 y' - i K_0 |x-x'|}, \quad (3.7)$$

$$\text{但し } K_0 \tanh K_0 D = \nu, \quad K_0 = 2\pi/\lambda, \quad \dots (3.8)$$

$$f(K_0 D, K_0 y) = \frac{1}{2} \{ 1 + e^{-2K_0(D+y)} \} \frac{1 + \tanh K_0 D}{\tanh K_0 D + K_0 D \operatorname{sech}^2 K_0 D}, \quad \dots (3.9)$$

となり、これを(2.10)式と比較して、

$$S_D/S = f(K_0 D, K_0 y'), \quad \text{for } y = 0, \quad \dots (3.10)$$

を得る。

従って出来る波の長さは(3.8)式から、振巾は(3.10)から求まる。

普通は波長は深さと同程度の大きさと考えてよい。かつ今 $K_0 D = 2\pi D/\lambda$ を今 1 より大きいとし、深さ無限大のとき得られる波長を $\lambda_0 = 2\pi/\nu$ とおくと (3.8) から、

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \tanh \frac{2\pi D}{\lambda} = 1 - 2e^{-\frac{4\pi D}{\lambda}}, \quad \frac{2\pi D}{\lambda} \gg 1, \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

又 (3.9) から $y' = 0$ とおくと、

$$f(K_0 D, 0) \approx 1 - \left(\frac{8\pi D}{\lambda} - 2\right) e^{-\frac{4\pi D}{\lambda}}, \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

$y' = -D$ ならば上式の略々 2 倍となる。

さて、数値例として、 $\lambda = 2D$ とおくと、

$$\lambda/\lambda_0 \doteq .996, \quad f(K_0 D, 0) \doteq .98$$

又、 $\lambda = 4D$ とおくと、

$$\lambda/\lambda_0 \doteq 0.90, \quad f(K_0 D, 0) \doteq 0.80$$

の程度であって、水深の影響は普通の場合あまり大きくはないものと考えられる。

4. 応用例

2 節の結果を利用して各種造波機の概略の特性を列記して見よう。

其等の特性として細い事を除いて、大体次の項目が考えられよう。

- a) 波高対ストローク比； s (圧力式の場合はストロークの替りに圧力水頭をとる。) この値が波長とどう云う関係にあるか、又達し得られる最高値はどれ位であるか。
- b) 排除水量比； q 、波の一山の水量と造波機の一揺れの水量との比であって、波を作るのに、大体どれ位の水量を動かさねばならぬかを示す。明らかにこの値は小さい方が望ましい。
- c) 仕事率；波が持つエネルギーは単位長さ当たり、 $\frac{1}{4} \rho g h_w^2 B$ であるから単位時間に持ち去るエネルギーは、馬力に直すと、

$$\rho g = 1,000 \text{ (kg/m}^2\text{)}, \quad 1 \text{ HP} = 75 \text{ kg} \cdot \text{m/sec として、}$$

$$\frac{10}{3} B h_w^2 V \text{ (HP)}, \quad \text{但し } V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad \text{(m, kg, sec)} \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

で与えられる事になる。

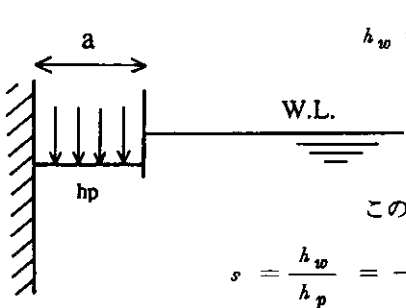
実際の駆動力を求めるには造波機に働く力を計算しなければならないが前述の如く今は考えない。

以下、各種のものについて a), b) を求めよう。

i) 圧力分布型

空気圧式はこの型の典型である。

半波高 h_w は、(2.13) から、



$$h_w = \frac{\nu}{i} \int_{-a}^a \Pi(x') e^{i\nu x'} dx' , \dots\dots\dots (4.2)$$

$$\text{但し } \Pi(x) = \frac{p}{\rho g} = h_p , \dots\dots\dots (4.3)$$

この場合 h_p は常数と考えてよいだろうから,

$$s = \frac{h_w}{h_p} = -2i \sin\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) , \dots\dots\dots (4.4)$$

表面変位 η は (2.1), (2.9) から計算しなければならぬが, 近似的には (2.1) から

$$\frac{p}{\rho g} \doteq -\eta , \dots\dots\dots (4.5)$$

でオーダーは間違いないだろう。
 波の一山の平均水面上の水量は単位巾当り,

$$\frac{2}{\pi} h_w \lambda , \dots\dots\dots (4.6)$$

であるから排除水量比は,

$$q \doteq \frac{2}{\pi} h_w \lambda / h_p a = \frac{2\lambda}{\pi a} s , \dots\dots\dots (4.7)$$

波長の小さい所では上式は明らかに適用すべきではない。
 さて (4.4) 式を見れば,

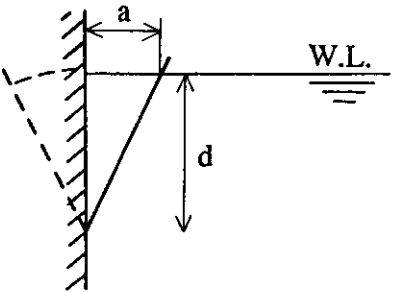
$$a/\lambda = 1/4 , \frac{3}{4} , \frac{5}{4} , \dots\dots\dots (4.8)$$

とすれば, $|s| = 2$ となって s 比は最高となる。
 又一方 (4.7) から見れば, a は小さい程 q が大きく, 従って, 上式と合せ考えると a は $\frac{1}{4}$ 波長ととるのが最も良い様に思われる。

最後にこの型式即ち水面で波を造る型式は現在空気式以外に殆ど見られない様であるが, (4.5) 式が近似的に成立つとすると, 空気圧のかわりに板をおいてもよい訳で, この様な型式は装置が水中に殆ど入らない点で保守その他便利な面が多い様に思われるし, 又特性的にもこの節の最後に述べる様に捨て難い利点がある様に思われる。

ii) フラップ型

最もよく用いられる平板フラップ型では右図の記号を用い (2.14) 式から,



$$u(y) = i\sigma \frac{a}{d}(d+y) , 0 > y > -d , \dots (4.9)$$

と考えると,

$$s = \frac{h_w}{a} = \frac{2i}{d} \int_{-d}^0 (d+y) e^{\nu y} dy = 2i \left[1 - \frac{1-e^{-\nu d}}{\nu d} \right] , \dots\dots\dots (4.10)$$

一般には, $\nu d = 2\pi d/\lambda$ は 1 より大きいと考えられるから

$$s \doteq 2i \left(1 - \frac{\lambda}{2\pi d}\right) \underset{d \gg \lambda}{\doteq} 2i, \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

逆に $d \ll \lambda$ ならば,

$$s \xrightarrow{\lambda \gg d} i \frac{2\pi d}{\lambda}, \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

次に q は,

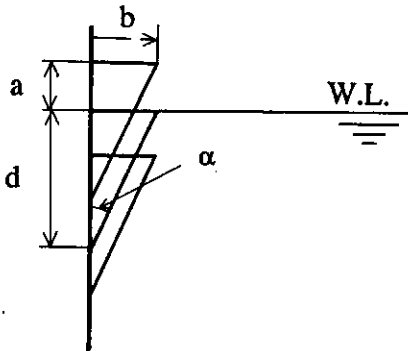
$$q = \frac{\frac{2}{\pi} h_w \lambda}{\frac{a}{2} d} = \frac{4}{\pi} \frac{\lambda}{d} s, \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

此の型では (4.11) に見る如く s が波長によってあまり変らない点の特徴であろう。

iii) プランジャー型

此の型は前二者に比して理論的解析は複雑で、正確には田才氏(前出)等の方法で問題を解かねばならないと考えられるが、此処では波長はプランジャーの巾(b)に比して充分大きいと考えて (2.14) 式にあてはめて考えて見よう。

a) 左図の如き直線的な形では、



$$u(y) \doteq i \sigma a \sin \alpha, \quad 0 > y > -d, \quad \dots\dots (4.14)$$

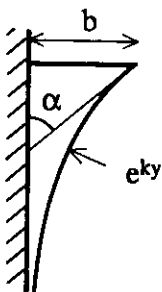
とおくと、

$$s = \frac{h_w}{a} = 2i \sin \alpha \left(1 - e^{-\frac{2\pi d}{\lambda}}\right), \quad (4.15)$$

$$q \doteq \frac{\frac{2}{\pi} h_w \lambda}{a b} = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{b} s, \quad \dots\dots (4.16)$$

となり、(4.15) から s の直線性は前項の型よりもよさそうであるが、一方 $\sin \alpha$ が掛っているのでストロークは長くなる。

b) 次に形を exponential にすると (K を与えられた値とする。),



$$u(y) \doteq i \sigma a b K e^{Ky}, \quad \text{for } y < 0, \quad \dots\dots (4.17)$$

$$K b = \tan \alpha, \quad K = \frac{2\pi}{\mu},$$

$$s = \frac{h_w}{a} = \frac{4\pi b i}{\lambda + \mu} = \frac{2i \tan \alpha}{1 + \frac{\mu}{\lambda}}, \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

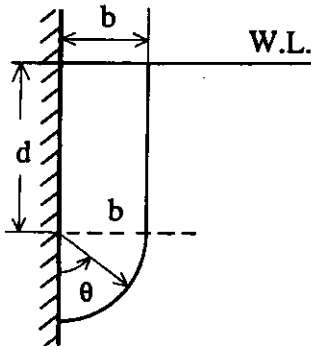
$$q = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{b} s, \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

となって、前者と殆ど変らなくなる。

我々の実験室において此の型のものを試作実験して見た結果では、実験範囲も狭い故為もあって殆ど上の直線式の(4.15)が適用出来る様であった。

又實際上 exponential curve とする事は水面附近の形状が急になりすぎて、実行不能の様である。

c) 次にあまり必要はない様に思われるし、又一方簡単には取り扱えない場合であるけれども比較のために簡略化して示そう。



それは左図の如く、直線と4分円弧から成る場合で今 $d \gg b$ とし、

(2.11)式で右辺第2項を無視したもので表わされるとすると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = i \sigma a \cos \theta, \quad \dots \dots \dots (4.20)$$

となって、

$$s = \frac{h_w}{a} = 2i\nu b \int_0^{\pi/2} \cos \theta e^{-\nu d - \nu b \cos \theta + i\nu b \sin \theta} d\theta$$

であるが、 $\nu b = 2\pi b/\lambda \ll 1$ とすると、

$$s \doteq \frac{4\pi b}{\lambda} e^{-\frac{2\pi b}{\lambda}}, \quad \dots \dots \dots (4.21)$$

となって波長が小さくなってくると非常に効率が悪い。

此の型では d の部分を大きくする事は何等意味がない様に思われる。

さて最後に実際の造波機の運動は常に高周波部分を含むと考えられる。今例えば2倍の周波数の成分を考えると、その成分について上述のすべての式で σ を2倍に従って ν は4倍波長 λ は $\frac{1}{4}$ とすれば結論はすべて同じとなり此等の結果を加え合えれば求むる波が得られる。

従って ii), iii) の型では s は波長によってあまり変わらず、むしろ波長が小さいと大きくなるから、此の倍周波分は殆ど其の倍かむしろ僅かに強調されてくるので波形は崩れてくる。

一方、i) の型では σ を仮に $1/4$ 波長にとるとすると倍周波数成分は略々 $1/3$ に減ってくるから、外に出て行く波は前二者に比しきれいになると考えられる。

以上

“波の強制力其の他に関する覚書”

別 所 正 利

内 容 目 次

1. 序 言
 2. グリーン函数
 3. 波なし分布
 4. 一様流れのない場合 (2次元)
 5. 物体に働く周期的力 (2次元)
 6. 一様流れのある場合 (3次元)
 7. 結 言
- 参考文献
図一葉

1. 序 言

現在波浪中の諸問題は花岡の華麗な理論、丸尾の円熟した考察等によって理論的には略々完成しているにも拘わらず、理論が難解であり、数値計算が複雑であり又其の夫々の項が物理的に親密な諸量にはっきりと結びつけられていない為に、実用上はフルードクリロップ理論に2次元の計算の諸結果理論的成果を参照してストリップ法を用いている様である。⁸⁾⁹⁾

従って今後の発展の為には此等の理論相互間の関係をはっきり認識すると云うことが重要な問題であると考えられる。

特に花岡の理論はすべて線型的に整備されているので他の理論との比較に当ってはかなりの困難を感じる。

例えば丸尾によれば振動しつつ運動する様な物体に働く力 F_i はベルヌーイの定理

$$p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} q^2, \quad \dots \dots \dots (1.1)$$

に順じて

$$F_i = \rho \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial n} dS - \frac{\rho}{2} \iint_S q^2 \frac{\partial x_i}{\partial n} dS, \quad \dots \dots \dots (1.2)$$

但し $i = 1, 2, 3$ で $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$ とする。

であって、此の右辺第2項はラガリーの公式で与えられ従って基本振動部分を含まない⁶⁾から F_i の基本振動部分 \tilde{F}_i は

$$\widetilde{F}_i = \rho \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial n} dS, \quad \dots\dots\dots (1.3)$$

であると云う。

一方花岡によれば φ を擾乱のポテンシャルとして

$$p \doteq \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho V \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \dots\dots\dots (1.4)$$

であるから

$$\widetilde{F}_i = \rho \iint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial x_i}{\partial n} dS, \quad \dots\dots\dots (1.5)$$

であると云う。¹⁾

此の形は明らかに (1.3) と異なる。

然し乍ら花岡の境界条件。¹⁾

$$\frac{\partial}{\partial n} \overline{\varphi}_i = \frac{\partial \overline{\varphi}_i}{\partial y} \Big|_{y=0} = \left(-i\omega + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial x_i}{\partial n}, \quad \dots\dots\dots (1.6)$$

但し φ_i は

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial \overline{\varphi}_i}{\partial n} = - \frac{\partial x_i}{\partial n}, \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

の様な境界条件を持つ函数とし、上横棒は今後共複素共軛値を意味するものとする。

又、 φ は $e^{i\omega t}$ に比例するものとする。

(1.6) を使って (1.5) を $y=0$ の面上で部分積分すると、形式的に (1.3) に移行する事が証明出来る。

或いは又、後述の花岡の第2定理 (6.6) を用いれば (1.5) 右辺第2項は、(1.7) を使って、

$$\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x_i}{\partial n} dS = - \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} dS = - \iint_S \varphi_i^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dS, \quad \dots\dots (1.8)$$

此処に φ_i^* は後述の φ_i の逆ポテンシャルである。

であるから、此れは2次の項であって線型理論の観点から考えれば当然省略すべき項となる。

此の様に線型的立場に立って言えば、花岡理論における (1.5), (1.6) 両式は (1.3), (1.7) 式と等価である事になるが、(1.6) の境界条件よりは (1.7) の方が直観的に理解しやすいし、又2次元問題等の他の分野では (1.3), (1.7) 式の記述になっているので便利であろう。

さて、此の覚書の目的は波の強制力等に関する Haskind-花岡の公式の説明であるが、順序と

して速度ポテンシャル，特に2次元の境界値問題等についても考察する。

2. Green 函数

先ず x の正の方向に単位速度の流れがあるものとし z -軸を上方にとり，速度ポテンシャルを，

$$\varphi'(x, y, z, t) = \operatorname{Re}(i\omega a e^{i\omega t} \varphi(x, y, z)), \dots\dots\dots (2.1)$$

とおく。但し， t は時間， ω は円周波数， a は振動の振幅とする。

水面 $z=0$ では，

$$L(\varphi) = 0, \quad z=0, \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

但し，

$$L \equiv \lim_{\mu \rightarrow +0} \left[(i\omega + \frac{\partial}{\partial x} + \mu)^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \right], \dots\dots\dots (2.3)$$

g は重力の常数とする。

此の条件を満足し且つ点 $Q \equiv (x', y', z')$ に $\frac{1}{r}$ の様な特異点を持つ函数は，¹⁾³⁾

$$G(P, Q) = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{g}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa e^{\kappa(z+z') + i\kappa(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')}}{(\kappa \cos \theta + \omega - \mu i)^2 - g\kappa}, \dots\dots\dots (2.4)$$

但し， $P \equiv (x, y, z)$ ， $Q \equiv (x', y', z')$ ， $r_1 = \overline{PQ}$ ， $r_2 = \overline{P\bar{Q}}$ ， $\bar{Q} \equiv (x', y', -z')$

$$\tilde{\omega} = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \tilde{\omega}' = x' \cos \theta + y' \sin \theta$$

即ち，

$$L_P G(P, Q) = 0, \quad \text{for } z=0, \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

一方

$$L^* \equiv \lim_{\mu \rightarrow +0} \left[(i\omega + \mu - \frac{\partial}{\partial x})^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \right], \dots\dots\dots (2.6)$$

を導入すると，

$$L_Q^* G(P, Q) = 0, \quad \text{for } z'=0, \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

が容易に判る。

(2.7) の条件は，花岡の reverse flow potential⁵⁾ の水面条件であるから，*印によってそれを表わす事にすると，

$$G(Q, P) = G^*(P, Q), \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

の様に書ける。

即ち一般にグリーン函数は $G(P, Q) = G(Q, P)$ なる対称性を持っているが我々の場合は此の(2.8)式を持っている訳である。

特に一様流れのない場合は，

$$L \equiv L^* = [(i\omega + \mu)^2 + g \frac{\partial}{\partial z}], \quad G(P, Q) = G(Q, P), \quad \dots\dots (2.9)$$

である。

さて、

$$\iint \left\{ \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q) - G(P, Q) \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n} \right\} dS$$

なる面積分を、 P 点の周り及び物体の表面、水面、無限遠方の円筒面、底面上に積分すると零になる筈である。

此の内 P の周りの積分は $4\pi\varphi(P)$ 底面の積分は零、円筒面の積分は φ と G が共に発散波を持つと考えられるので零水面上の積分は、

$$- \iint_{z'=0} \left\{ \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial z_Q} G(P, Q) - G(P, Q) \frac{\partial \varphi}{\partial z_Q} \right\} dx dy,$$

であるから (2.2), (2.7) を代入して部分積分し、 φ が無限遠で高々発散波を持つとすれば矢張零になる。

従って、

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} G(P, Q) - \varphi \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q) \right\} dS_Q, \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

が得られる。

又、
$$H(\kappa, \theta) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{\kappa z - i\kappa \tilde{\omega}} dS, \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

なる函数を定義すると (2.1), (2.4) を使って、(2.10) から、

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \right) \frac{1}{r_1} dS - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa \cos \theta + \omega - \mu i)^2 + g\kappa}{(\kappa \cos \theta + \omega - \mu i)^2 - g\kappa} H(\kappa, \theta) e^{\kappa z + i\kappa \tilde{\omega}} d\kappa dS, \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

なる表示式も得られる。¹⁾

3. 波なし分布

φ は (2.10) 以外に又波なし分布と適当な波源の組合せで表わす事も出来る。^{10) 13)}

そこで一般の波なし分布について考えて見よう。

さて (2.2) は実虚部共に満足しなければならないから其の夫々については、

$$L L^* \text{ or } L \bar{L} \equiv \left\{ \left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \right\} \left\{ \left(-i\omega + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

なる演算について水面上で零にならなければならない。

尚、此処では波のないものを考えるから μ を考える事は必要がないので以下とつた式を扱う。

そこで更に

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{L} &\equiv \left[\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - g \frac{\partial}{\partial z} \right], \\ \overline{L} &\equiv \left[\left(-i\omega + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - g \frac{\partial}{\partial z} \right], \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

なる随伴演算子を導入して、

$$\varphi = \overline{L} \widetilde{L} \overline{L} f, \dots\dots\dots (3.3)$$

な函数 f を考えると

$$\begin{aligned} L\varphi &= L \overline{L} \widetilde{L} \overline{L} f \\ &= \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \right)^4 - 2g^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 6\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^4 \right) + g^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] f, \end{aligned} \dots\dots\dots (3.4)$$

であるから逆に f が水面に関して上下反対称でありさえすれば水面条件を満足し、然も波のないポテンシャル φ を (3.3) 式によって求める事は容易に出来る。¹⁵⁾

例えば f として、

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{2\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{2\ell+1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.5)$$

とすれば (3.3) の演算によって波のないポテンシャルが求められる。

特に次の場合は至極簡単である。

i) $\omega = 0$ の場合¹⁵⁾ は、

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial z} = \overline{L}, \quad \widetilde{L} = \overline{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - g \frac{\partial}{\partial z}, \dots\dots\dots (3.6)$$

$$L \widetilde{L} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - g^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

特に2次元では $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 故、

$$L \widetilde{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g^2 \right), \dots\dots\dots (3.7)$$

となるから、例えば

$$f_n = \frac{\sin n\theta}{r^n}, \quad \zeta = x + iz = \tau e^{i\theta}, \quad n \geq 1, \dots \quad (3.8)$$

とおくと、

$$\tilde{L} f_n = g \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\zeta^n} - \frac{i n}{g \zeta^{n+1}} \right],$$

となるから一度 x で積分して

$$\varphi_n(x, z) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\zeta^n} - \frac{i n}{g \zeta^{n+1}} \right], \quad \dots \quad (3.9)$$

更には

$$\varphi_0(x, z) = \operatorname{Re} \left[\log \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right) + \frac{2i}{g(\zeta^2 - 1)} \right],$$

が波なし分布の全体である。

ii) 一様流れがなければ¹³⁾

$$L = \bar{L} = -\omega^2 + g \frac{\partial}{\partial z}, \quad \tilde{L} = \overline{\tilde{L}} = -\omega^2 - g \frac{\partial}{\partial z}, \quad \dots \quad (3.10)$$

$$L \tilde{L} = \left(\omega^4 - g^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

であるから、2次元では $\zeta = x + iz$ とおいて、上と同様にして、

$$\varphi_n = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\zeta^n} - \frac{i n}{K \zeta^{n+1}} \right\}, \quad K = \frac{\omega^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \dots \quad (3.11)$$

(3.9), (3.11) の $n=1$ の場合の流線を第1図に夫々実線点線で示す。鎖線は(3.9)で φ_0 も含めた場合であるが此の場合は(3.9)から判る様に水面に特異点があるので波はないとしてもモーメント・ロスを伴う様な事になる。

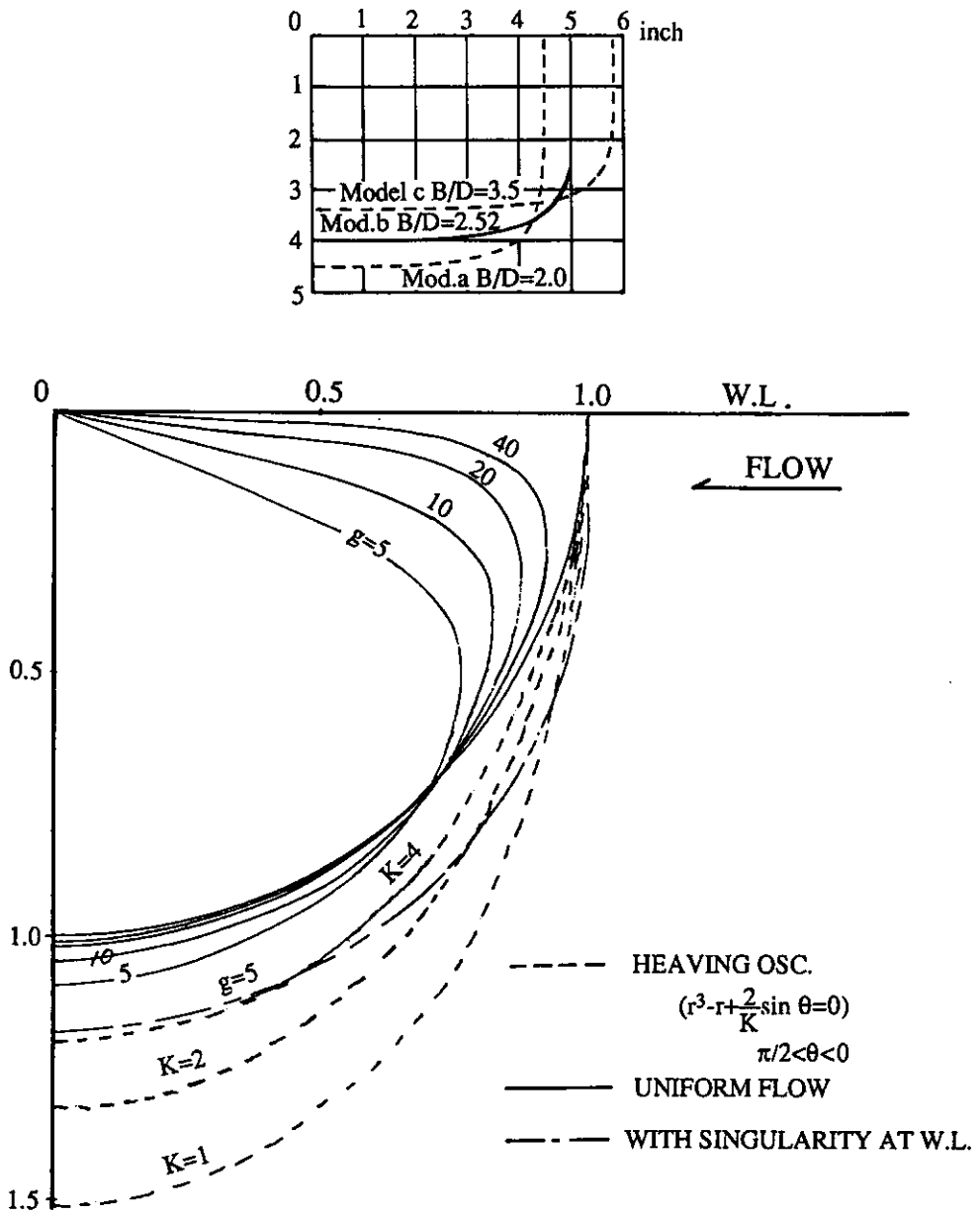
さて此の様に上下動の場合は K が大きいと極めて円筒に近い¹⁷⁾

その他の場合には簡単には求められないが φ_n を n ケ考えて n ケの点について流れ函数を与えれば大抵の場合解が得られる筈である。

特に K が大きいと $\varphi_n \rightarrow \frac{\sin n\theta}{r^n}$ で上下反対称のポテンシャルであるから此の時ローリング問題は鏡像を考えた物体の回転運動のポテンシャルで近似出来る。

一方、此の問題で $K \rightarrow 0$ では(3.11)から判る様に $\varphi_n \rightarrow \cos n\theta / r^n$ で上下対称なポテンシャルで近似出来る。^{1) 2)}

又、此の極限で Ursell は波の振巾が消える様な断面(第1図上図)を発見し、¹³⁾ 此れは実験的にもある程度確認された。¹⁴⁾



第 1 図

此の様な波なし分布（準波なしと呼ぶ）を系統的に見出すのは簡単ではなさそうだが、とにかくいくらかありそうで、しかもその中には割合簡単な形のものも含まれていそうである。

逆に云えば、横揺れ等では波が大きい方が良いのであるから、やはり形状に注意しないとイケないと云う事である。

4. 一様流れのない場合 (2次元)

簡単の為に2次元で考えるが此の節の結論を3次元に拡張するには殆ど問題がない。

今、垂直軸として y を上向きにすると § 2 のグリーン函数は

$$G(P, Q) = \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - 2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{\kappa(y+y')} \frac{\cos \kappa(x-x')}{\kappa - K - \mu i} d\kappa, \dots \quad (4.1)^{17)}$$

但し、 $P \equiv (x, y)$, $Q \equiv (x', y')$, $r_1 = \overline{PQ}$, $r_2 = \overline{P\bar{Q}}$, $\bar{Q} \equiv (x', -y')$,
 $K = \omega^2/g = 2\pi/\lambda$, λ は波長等である。

よって

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_c \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} G(P, Q) - \varphi \frac{\partial}{\partial n} G(P, Q) \right\} ds_Q, \dots \quad (4.2)^{17)}$$

x が充分大きいと、

$$G(P, Q) \xrightarrow{|x| \gg 1} -2\pi i e^{K(y+y') + iK|x-x'|}, \dots \quad (4.3)^{17)}$$

であるから

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &\xrightarrow{x \gg 1} -2\pi i e^{Ky + iKx} H^+(K), \\ &\xrightarrow{x \ll -1} -2\pi i e^{Ky - iKx} H^-(K), \end{aligned} \dots \quad (4.4)^{17)}$$

但し、

$$H^{\pm}(K) = \frac{1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{Ky \mp iKx} ds, \dots \quad (4.5)$$

一方では φ は波源と波なし分布の和で表わされる¹³⁾から、例えば

$$\varphi(x, y) = AG(x, y; 0, 0) + B \frac{\partial}{\partial x'} G(x, y; 0, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(x, y), \dots \quad (4.6)$$

此処に f_n は (3.11) で与えられるものとする。

従って (4.3), (4.4), (4.6) から、

$$H^+(K) = A - iB, \quad H^-(K) = A + iB, \dots \quad (4.7)$$

次に境界条件を考えよう。

i) 左右ゆれ

$$\begin{aligned} &\text{ポテンシャル } \varphi_1', \text{ 振幅 } a_1, \varphi_1' = i\omega a_1 e^{i\omega t} \varphi_1, \\ &C \text{ 上で } \frac{\partial \varphi_1'}{\partial n} = -i\omega a_1 e^{i\omega t} \frac{\partial x}{\partial n} \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n} \equiv -\frac{\partial x_1}{\partial n}, \quad \varphi_1 = -y, \quad \dots \quad (4.8)$$

ii) 上下ゆれ

ポテンシャル φ_2' , 振巾 a_2 , $\varphi_2' = i\omega a_2 e^{i\omega t} \varphi_2$,

よって,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= -\frac{\partial y}{\partial n} \equiv -\frac{\partial x_2}{\partial n}, \\ \varphi_2 &= x \equiv x_1, \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.9)$$

iii) 横ゆれ

ポテンシャル φ_3' , 振巾 a_3 , $\varphi_3' = i\omega a_3 e^{i\omega t} \varphi_3$,

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = -\left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}\right), \quad \varphi_3 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad \dots \quad (4.10)$$

iv) 波の反射

$$\left. \begin{aligned} \text{入射波 } \varphi_0' &= \frac{g a_0}{\omega i} e^{Ky + iKx + i\omega t} \\ \varphi_0 &= e^{Ky + iKx}, \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.11)$$

反射波 $\varphi_4' = \frac{g a_0}{\omega i} e^{i\omega t} \varphi_4$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} &= -\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} (e^{Ky + iKx}), \\ \varphi_4 &= -\varphi_0 = i e^{Ky + iKx}, \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.12)$$

此処で φ_i の共軛函数, 即ち流れ函数を ψ_i とした。

さて此等の境界条件は φ_i がすべて複素数であるから夫々実虚部の2つの条件を表わしている訳であり, 上の様に定義すると虚部はすべて零という齊次の境界条件になる訳である。

(4.6) から

$$\varphi_i = A_i \tilde{G} + B_i \tilde{G}_x' + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(i)} \tilde{f}_n, \quad i=1 \sim 4, \quad \dots \quad (4.13)$$

但し右辺の \sim 印は流れ函数を意味するものとしよう。

今,

$$A_i = \alpha_i e^{i\epsilon_i}, \quad B_i = \beta_i e^{i\delta_i}, \quad A_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} + i\beta_n^{(i)}, \quad \dots \quad (4.14)$$

$$\tilde{G} = \tilde{G}_e + i\tilde{G}_s, \quad \tilde{G}_x' = \tilde{G}_e' + i\tilde{G}_s', \quad \dots \quad (4.15)$$

と実虚部を分離すると (4.1) から先ず,

$$\left. \begin{aligned} -G_s &= -2\pi e^{Ky} \cos Kx, & G_s &= -2\pi e^{Ky} \sin Kx, \\ G_s &= -2\pi e^{Ky} \sin Kx, & G_s &= 2\pi e^{Ky} \cos Kx, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.16)$$

更に簡単の為に物体が左右対称であるとする。すると φ_1, φ_3 は x に関し反対称で $A_i = 0, A_{2n+1}^{(i)} = 0, \varphi_2$ は x に関し対称で $B_i = 0, A_{2n}^{(i)} = 0$ となる。

(4.8) から (4.12) 迄の境界条件を ϕ_i に関して書いて見ると、
 $i = 1, 3$)

$$\left. \begin{aligned} \beta_i \cos \delta_i \tilde{G}'_e - \beta_i \sin \delta_i \tilde{G}'_s + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n}^{(i)} \tilde{f}_{2n} &= \begin{cases} -y, & \text{for } i=1, \\ -\frac{x^2+y^2}{2}, & \text{for } i=3, \end{cases} \\ \beta_i \cos \delta_i \tilde{G}'_s + \beta_i \sin \delta_i \tilde{G}'_e + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n}^{(i)} \tilde{f}_{2n} &= 0, \end{aligned} \right\} (4.17)$$

$i = 2$)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 \cos \varepsilon_2 \tilde{G}_e - \alpha_2 \sin \varepsilon_2 \tilde{G}_s + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1}^{(2)} \tilde{f}_{2n+1} &= x, \\ \alpha_2 \cos \varepsilon_2 \tilde{G}_s + \alpha_2 \sin \varepsilon_2 \tilde{G}_e + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n+1}^{(2)} \tilde{f}_{2n+1} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.18)$$

$i = 4$)

此の場合は対称性から 4 組の方程式群が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 \cos \varepsilon_4 \tilde{G}_e - \alpha_4 \sin \varepsilon_4 \tilde{G}_s + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1}^{(4)} \tilde{f}_{2n+1} &= e^{-Ky} \sin Kx, \\ \alpha_4 \cos \varepsilon_4 \tilde{G}_s + \alpha_4 \sin \varepsilon_4 \tilde{G}_e + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n+1}^{(4)} \tilde{f}_{2n+1} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_4 \cos \delta_4 \tilde{G}'_e - \beta_4 \sin \delta_4 \tilde{G}'_s + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n}^{(4)} \tilde{f}_{2n} &= 0, \\ \beta_4 \cos \delta_4 \tilde{G}'_s + \beta_4 \sin \delta_4 \tilde{G}'_e + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n}^{(4)} \tilde{f}_{2n} &= e^{Ky} \cos Kx, \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.20)$$

此等の聯立方程式の内右辺が 0 になる式について考えると G, f_n 等が互に一次独立とするすべての係数が零となって意味のない解しか得られない事になるから、解が得られるとするならば、此等の函数の間の一つの関係が存在する事を意味する。

即ち (4.17) 第 2 式は $i = 1, 3$ に対し同じ式であると考えられるので、

$$\frac{\beta_1 \cos \delta_1}{\beta_3 \cos \delta_3} = \frac{\beta_1 \sin \delta_1}{\beta_3 \sin \delta_3} = \frac{\beta_{2n}^{(1)}}{\beta_{2n}^{(3)}}, \quad \text{よって } \delta_1 = \delta_3, \quad \dots\dots\dots (4.21)$$

次に (4.17) 第2式と (4.20) 第2式, (4.18) 第2式と (4.19) 第2式は (4.16) を考えると, やはり夫々同じ式と考えられるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_4 \cos \epsilon_4}{\alpha_2 \cos \epsilon_2} &= \frac{\alpha_4 \sin \epsilon_4}{\alpha_2 \sin \epsilon_2} = \frac{\beta_{2n+1}^{(4)}}{\beta_{2n+1}^{(2)}}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_4 \\ \frac{\beta_4 \cos \delta_4 - \frac{1}{2\pi K}}{\beta_1 \cos \delta_1} &= \frac{\beta_1 \sin \delta_4}{\beta_1 \sin \delta_1} = \frac{\beta_{2n}^{(4)}}{\beta_{2n}^{(1)}}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.22)$$

更に (4.19), (4.20) の夫々第1式と第2式も (4.16) を考えれば夫々に同じ方程式と考えられるので, 解く必要もなく,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_4 \cos \epsilon_4}{\alpha_4 \sin \epsilon_4} &= \frac{-\alpha_4 \sin \epsilon_4 - \frac{1}{2\pi}}{\alpha_4 \cos \epsilon_4} = \frac{\alpha_{2n+1}^{(4)}}{\beta_{2n+1}^{(4)}}, \\ \frac{\beta_4 \cos \delta_4}{\beta_4 \sin \delta_4} &= \frac{-\beta_4 \sin \delta_4 - \frac{1}{2\pi K}}{\beta_4 \cos \delta_4 - \frac{1}{2\pi K}} = \frac{\alpha_{2n}^{(4)}}{\beta_{2n}^{(4)}}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.23)$$

此等の式から, 先ず φ_1, φ_2 の諸係数が判れば φ_3 については, 波の振巾だけ判ればその虚部については (4.21) で各係数が決まってしまう, φ_4 については (4.22) でその虚部については各係数の比が求まり, 且つ (4.23) で波の振巾迄求まってしまう。

即ち, 計算すれば,

$$\left. \begin{aligned} A_4 &= \alpha_4 e^{i\epsilon_4} = -\frac{\sin \epsilon_2}{2\pi} e^{i\epsilon_2}, \\ B_4 &= \beta_4 e^{i\delta_4} = -\frac{i \sin \delta_1}{2\pi K} e^{i\delta_1}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.24)$$

結局の所, 今の場合は $i=1, 2$ について各2組, $i=3$ については実部のみ1組, 合計5組の聯立方程式を解けば, それで充分である事になる。此れを3次元で考えると波源の置き方等の点でうまく成功しない。

5. 物体に働く力 (2次元一様流れなし)

さて周期的な力は (1.3) の形で与えられるから, 無次元的に考えて, j なる方向の φ_j による力を,

$$\left. \begin{aligned} F_{i,j} &= \int_c \varphi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = - \int_c \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds, \\ \text{モーメントは } F_{i,3} &= \int_c \varphi_i \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds = - \int_c \varphi_i \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} ds, \end{aligned} \right\} \dots\dots (5.1)$$

と定義しておこう。((4.8), (4.9), (4.10) の境界条件を使ってある。)

特に波の強制力は,

$$E_i = + \int_c (\varphi_0 + \varphi_4) \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial n} - x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right\} ds = - \int_c (\varphi_0 + \varphi_4) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds, \quad \dots (5.2)$$

と書ける。

$$\text{今,} \quad \int (\varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}) ds, \quad i = 1 \sim 4$$

なる積分を物体表面 c と水表面 F と無限遠の下半円上にとると, F 上では水面条件で消え, 下半円上でも φ_i, φ_j が共に外側に出て行く波と考えられるのでやはり消える。⁴⁾

よって,

$$\int_c \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds = \int_c \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds, \quad \dots (5.3)$$

(5.1) で考えれば,

$$F_{ij} = F_{ji}, \quad \dots (5.4)$$

此等の関係は計算で確かめられている様である。¹¹⁾¹²⁾

次に (5.2) 式について考えるに $\varphi_0 + \varphi_4$ の境界値は (4.12) であるから, 更に (4.4) を使って,

$$\begin{aligned} E_i &= \int_c \left\{ \varphi_i \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_0 + \varphi_4) - (\varphi_0 + \varphi_4) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right\} ds \\ &= -2\pi H_i^-(K) + \int_c \left\{ \varphi_i \frac{\partial \varphi_4}{\partial \nu} - \varphi_4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} \right\} ds, \end{aligned}$$

即ち (5.3) によって,

$$\begin{aligned} E_i &= -2\pi H_i^-(K) = -2\pi (A_i + i B_i) \\ &= \int_c \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{Ky + iKx} ds, \quad \dots (5.5) \end{aligned}$$

此れ等が Haskind の関係である。⁴⁾

此の式は E_i が運動 i による波の入射波と同じ方向に進むものの振巾に比例する事を示している。

又, 最右辺第1項はフルード・クリロッフの力を示しており, 第2項は, それを運動 i によるダブルレットだけ補正すればよい事を示している。

さて次に、

$$\int \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} - \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) ds ,$$

なる積分を考えよう。^{4) 16)}

今度は φ_i は波が外に出るのに対し、 $\overline{\varphi_j}$ は波が内側に向いている、いわば吸収ポテンシャルであるから、無限大半円上の積分は有限になる。⁴⁾

(4.4) を代入して計算すると、

$$\int_c \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} - \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) ds = 2\pi^2 i \{ H_i^+ \overline{H_j^+} + \overline{H_i^+} H_j^+ + H_i^- \overline{H_j^-} + \overline{H_i^-} H_j^- \} , \dots \quad (5.6)$$

これは明らかに虚数値である。

又、 $j = 1, 2, 3$ では

$$\frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}$$

であるから、

$$F_{ij} = - \int_c \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds = - \int_c \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds + 2\pi^2 i \{ \sum H_i H_j \} ,$$

即ち、

$$Im \{ F_{ij} \} = 2\pi^2 Re \{ H_i^+ \overline{H_j^+} + H_i^- \overline{H_j^-} \} = 4\pi^2 Re \{ A_i \overline{A_j} + B_i \overline{B_j} \} , \dots \quad (5.7)$$

特に $i = j$ ならば、

$$Im \{ F_{ii} \} = 4\pi^2 \{ A_i \overline{A_i} + B_i \overline{B_i} \} , \dots \quad (5.8)$$

である。^{4) 16)}

これはよく知られたダムピングが生成波高の自乗に比例する力であると云う式であって、(5.5) と較べれば判る様にこれは (5.5) の絶対値の自乗になっている。⁴⁾

即ち、

$$Im \{ F_{ii} \} = E_i \overline{E_i} , \dots \quad (5.9)$$

これは3次元では勿論一般には成立しないが、 $E_i \overline{E_i}$ を各方向に積分したものがダムピングに等しくなる事になる。⁴⁾

此の式から種々の面白い実験が考えられるであろう。

尚、此処でダムピングと強制力が結びついているから、例えばダムピングは大きい波からの力は少いと云う様なうまい具合にはゆかない事になる。

又、ダムピングの極大な船と云う様な問題も考えられるが、此の為には例えば (4.5) 式の絶対値の自乗の変分をとれば積分方程式が得られるけれども此の方程式の核 e^{Ky+iKx} は正則であるので極値は存在しない。換言すればダムピングはいくらでも大きく出来る事になる。

さて最後に従来、力は(5.1)等で c 上で積分して求めている。¹⁰⁾¹¹⁾¹²⁾

これは等角写像が簡単に判る場合は便利であるが、形が図式的に与えられる様な場合はむしろ(4.16)以下の聯立方程式を直接といった方が便利であろう。

その様な時には、 $j = 1, 2$ については、

$$F_{ij} = \int_c \varphi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \int_c x_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds + \int_{c'} (\varphi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} - x_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}) ds, \dots \quad (5.10)$$

とおいて c' を適当な曲線にとれば簡単な計算(級数)に還元出来る。 $j = 3$ にはこれはうまくない。

6. 一様流れのある場合(3次元)

此の場合も§4, 5と同様な考察をすれば面白い結果が出そうであるが、これは大変面倒なことなので、(5.3), (5.5), (5.6)の拡張についてだけ考える。

矢張、運動 i によるポテンシャルを φ_i とし、 $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu}$ が実数となる様に選んでおく。

$i = 1 \sim 6$, として、7は波の反射、0は入射波を意味するものとする。

先ず花岡⁵⁾に従って φ の逆ポテンシャル φ^* を(2.6)を満足し、且つ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\varphi}^*}{\partial n}, \dots \quad (6.1)$$

の様に定義する。

グリーン函数は(2.4)と同様にして、

$$G^*(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{g}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa e^{\kappa(z+z') + i\kappa(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')}}{\alpha \kappa d\theta} \\ = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{g}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa e^{\kappa(z+z') - i\kappa(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')}}{(\kappa \cos \theta + \omega - \mu i)^2 - g\kappa} d\theta, \dots \quad (6.2)$$

となるから(2.4)と較べて、

$$G^*(x, y, z; x', y', z') = G(-x, -y, z; -x', -y', z') \\ = G(-x, y, z; -x', y', z'), \dots \quad (6.3)$$

である。

これから(2.9)と同様にして、

$$\varphi^*(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu} - \varphi^* \frac{\partial}{\partial \nu} \right\} G^*(x, y, z; x', y', z') dS, \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu} - \varphi^* \frac{\partial}{\partial \nu} \right\} G(-x, y, z; -x', y', z') dS, \dots \quad (6.4)$$

が得られる。

此の様に φ^* は φ と丁度反対側に波を持っており、且つ (6.1) の条件をも満たすから、最初の定義から考えて、全く一樣流れの方向を逆にしただけの違いであると考えられる。

従って、境界値が前後対称（今左右は対称として考えない。）と非対称な部分に別けられるとすると、

即ち、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_s + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_a$$

φ も φ^* も夫々別けられて、

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_a, \quad \varphi^* = \varphi_s^* + \varphi_a^*$$

即ち、

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_s, \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_a$$

そうすると上の考察から、⁵⁾

$$\varphi_s^*(x, y, z) = \varphi_s(-x, y, z), \quad \varphi_a^*(x, y, z) = -\varphi_a(-x, y, z), \quad \dots \quad (6.5)$$

従って、今

$$\iint_{S+F+R} \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial n} - \varphi_j^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS,$$

なる積分を考えると前同様 F, R 上の積分は消えて、花岡の第2定理がなり立つ。⁵⁾

即ち、

$$\iint_S \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial n} - \varphi_j^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS = 0, \quad j, i \neq 0, \quad \dots \quad (6.6)$$

前同様周期力として、

$$F_{ij} = - \iint_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dS, \quad i, j = 1 \sim 6, \quad \dots \quad (6.7)$$

とおくと (6.1) を使って (6.6) から

$$F_{ij} = - \iint_S \varphi_j^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS, \quad \dots \quad (6.8)$$

従って境界条件の対称性に従って (6.5) から

$$F_{ij} = \pm F_{ji}, \quad \dots \quad (6.9)$$

が成立つ⁵⁾ が一般には、

$$F_{ij} - F_{ji} = \iint_S (\varphi_j - \varphi_j^*) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS, \quad \dots\dots\dots (6.10)$$

である。

然し乍ら (6.5) の関係があるから、元々境界値問題を解く時に対称部分と非対称部分に別けて解いておけば宜しい。

次の波の強制力については、

$$\varphi_0 = e^{\kappa_0 z - i \kappa_0 (x \cos \chi + y \sin \chi)} \quad \dots\dots\dots (6.11)$$

$$\omega = \kappa_0 (c - \cos \chi), \quad \kappa_0 = g/c^2,$$

としておけば前と同じ様に、

$$E_i = - \iint_S (\varphi_0 + \varphi_1) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = \iint_S \left(\varphi_i^* \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \varphi_0 \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} \right) dS, \\ + \iint_S \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \varphi_i^* - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} \right) dS,$$

で上の定理から此の第2項は消え、従って、

$$E_i = \iint_S \left(\varphi_i^* \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} \right) e^{\kappa_0 z - i \kappa_0 (x \cos \chi + y \sin \chi)} dS, \quad \dots (6.12)$$

所で (6.2), (6.4) から φ^* を (2.12) の様にかくと、

$$\varphi^*(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \right) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) dS \\ - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa \cos \theta + \omega - \mu i)^2 + g \kappa}{(\kappa \cos \theta + \omega - \mu i)^2 - g \kappa} H^*(\kappa, \theta) e^{\kappa z - i \kappa \tilde{\omega}} d\kappa d\theta, \quad \dots\dots\dots (6.13)$$

ここに、

$$H^*(\kappa, \theta) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{\kappa z + i \kappa \tilde{\omega}} dS, \quad \dots\dots\dots (6.14)$$

であるから (6.12) は、

$$E_i = -4\pi H_i^* \{ \kappa_0(x), \chi \}, \quad \dots\dots\dots (6.15)$$

の様にも書ける。

これがHaskindの定理の拡張である。

花岡は(6.12)の右辺を彼の境界値を使って変形し、且つ $\varphi_i = \pm \varphi_i^*$ の様な場合のみ考えて、

$$E_i^{(H)} = \iint_S P_i \frac{\partial}{\partial n} e^{\kappa_0 z - i \kappa_0 \varpi(x)} dS, \quad \dots\dots\dots (6.16)$$

を導いた。⁵⁾

此処に P_i は運動 i による圧力である。

此の式を流れのない場合に適用して(5.5)と比較すると、フルード・クリロッフの力がぬけているから、此の式はその様に理解すべきなのであろう。

さて次に(5.6)拡張を考えよう。

$$\iint_{S+F+R} \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} - \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS,$$

を考えると、此の場合も F 上の積分は消えるが R 上の積分は残る。今これを Q

$$\iint_S \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} - \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS = Q_{ij} = \iint_R \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial r} - \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right) r d\varphi dz, \quad \dots\dots\dots (6.17)$$

として計算出来る。

即ち無限遠方の波さえ判れば計算出来る訳であるが面倒なので今の此の儘にしておく。

然し例えば $i = j$ とおくと、これは明らかに散乱波の失うエネルギーであるから、前と全く相似な関係を持つ事になる。

7. 結 言

以上、Haskind - 花岡の波の強制力等に関する公式の説明を終えたい。

此等の公式は、今後の理論的、実験的研究の上で、重要な役割を演ずるであろう事は充分予想出来る。

然し一方では又此等の公式をよく理解する為には、もう一度境界値問題を考えて見る必要がある様である。

此の様な過程を経て、始めてストリップ法との比較も可能になり、又波浪中の諸問題、例えば運動、抵抗増加等の極値問題(これは2次元で考えた様に確かに関連のある問題である)、等にとりかかる事が出来るのではあるまいか。

以 上

参考文献

- 1) 造船協会60周年記念双書 第2卷
- 2) " " 第6卷
- 3) " " 第8卷
- 4) J. N. Newman; J. S. R. SNAME, vol. 6 No. 3 (1962)
- 5) 花岡達郎; 第9回応力連合講演会 (1959)
- 6) 丸尾 孟; " (1959)
- 7) G. Vossers; I. S. P. vol. 7 (1960)
- 8) 福田淳一他; 造協論文集110号 (1961)
- 9) " " 111号 (1962)
- 10) 田才福造 ; " 105号 (1959)
- 11) " " 110号 (1961)
- 12) 田村欣也 ; 三菱研究報告
- 13) F. Ursell; Q. J. M. A. M. vol. 2 (1949)
- 14) W. C. McLeod & T. Hsieh; Schiffstechnik Bd 10 (1963)
- 15) 別所正利; 防大欧文紀要 2卷2号 (1962)
- 16) " ; 造協論文集 103号 (1958)
- 17) F. Ursell; Q. J. M. A. M. vol. 7 (1954)

浮遊式消波装置の Feasibility Study

別 所 正 利

内 容 目 次

1. はじめに
 2. 理 論
 3. 種々の場合
 4. 結 び
- 参考文献
附 録

1. はじめに

水の波を消す原理として考えられるものは、

- A) 波のエネルギーを他のエネルギーに転換して波を小さくする。
 - B) 波を反射，散乱させて所望の場所に不必要な波が出来ないようにする。
- の2つであろう。

Aの代表的なものは、ビーチ式消波装置であってこの場合は反射波を小さくするという意味の波消しである。又、波のエネルギーは渦にそして最後に熱エネルギーに転換される。

この場合、波のエネルギーは水の中に戻されているが、これはしかし系外に引き出して仕事をさせてもよい筈である。

これは波力利用（発電等）のアイデアであるが、このように考えてみると、これは逆に見れば波消し装置と見なす事も出来る事になり、もし波のエネルギーをすべて利用出来たとするともはやそこから出て行く波はなくなるからそれは完全な消波装置にもなっているわけであって、波消し装置の研究は一方では波力利用の研究でもある。

実際、J. H. Milgramは水槽端にフラップ式造波機をおき、それを制御して逆に波を消す事に成功し、又T. Y. Wuは水中翼が振動する時波のエネルギーを吸収しうる条件を理論的に求めた。

Bの代表的なものは防波堤であろう。波のエネルギーは殆どそのまま反射される。この方式の場合の問題点は波の反射による反力が大洋波を考える場合非常に大きい点である。

この原理に基づく消波装置は現在の所これ以外あまり例がないように思われるが、可能性の大きい分野のように見える。

こゝではこれ以上とりあげない事とし、もっぱら浮遊式のをAの原理の面から考える事にしよう。

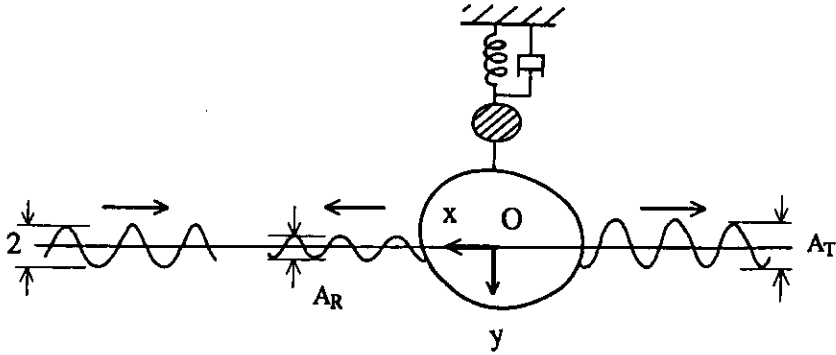
この方式はアイデアとしてはBの原理から発生したと考えられるけれど、波が透過せず又反射波もなくなるとすれば、それは理想的な波消し装置となるであろう。

もし上述のような機能が発揮出来るとすれば、それはもはや波消しというよりは波吸収装置と言う方が適当であろう。

以下、簡単の為に2次元問題とし単一波長の正弦波についてのみ考察する事にする。

2. 理論

下図のように波高が2の入射波の中で物体が原点を中心として振幅 X , Y , θ の単弦運動をしているとしよう。



反射波の振幅を A_R , 透過波のを A_T とすると A (20) 式より,

$$A_T + A_R = \frac{H_2^+(K)}{H_2^+(K)} + 2iKY H_2^+(K) \quad , \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

$$A_T - A_R = \frac{H_1^+}{H_1^+} + 2iK \{ X H_1^+(K) + \theta H_3^+(K) \} \quad ,$$

一方振巾は運動方程式から (物体は左右対称とする。),

$$KY = H_2^+(K) / C_2 \quad , \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

$$KX = D_1 / \Delta \quad , \quad K\theta = D_3 / \Delta \quad ,$$

で与えられるものである。

しかし、

$$KY = \frac{i}{2H_2^+} \quad \text{or,} \quad C_2' = -2i |H_2^+|^2, \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

とする事が出来れば

$$A_T + A_R = 0, \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

となる。

(2.3) のようにするには図のような力学系を系外に作り、

$$\nabla + f_{22c} + \delta_2 = (B + S_2) / K, \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\mu_2 = 1, \quad \text{(附録参照)}$$

とすればよい。

この時、 X, θ は自由に動いているとすると、

$$A_R - A_T = \frac{H_1^+}{H_1^+} \frac{\Delta}{\Delta}, \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

となっている。

(2.5) において $\mu_2 = 1$ であるから系外に物体がなす仕事率は、**heaving** による **damping** に等しい事になりそれはこの場合、

$$W = \frac{1}{2} N_2 |\dot{Y}|^2 = \frac{\rho}{2} \omega^2 |Y|^2 |H_2^+|^2 = \frac{\rho g^2}{8\omega} = \frac{E_W}{2}, \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

$$\text{但し, } E_W = \frac{\rho g}{4} V_W = \frac{\rho g^2}{4\omega}, \quad V_W = g / \omega,$$

で E_W は単位振巾の入射波の運ぶ単位時間当りのエネルギーである。

つまり入射波の半分のエネルギーは系外に吸収された事になるから、残っているのは半分で波高は (2.4) から $A_R = -A_T$ である故、

$$|A_T| = |A_R| = 1/2, \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

とならなければならないが実際 (2.6) からそうなっている事がわかる。

rolling を考える必要がなければ **swaying** についても全く同様であって、後の半分のエネルギーを回収出来る事になる。

$$\text{一般には附録のようにして } Re \{ C_1' C_3' - (C_{13}')^2 \} = 0, \beta_1 = 1, \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

$$\text{の時} \quad A_R = A_T, \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

$$\text{となるから } Y \text{ が (2.3) も満たすならば, } A_R = A_T = 0, \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

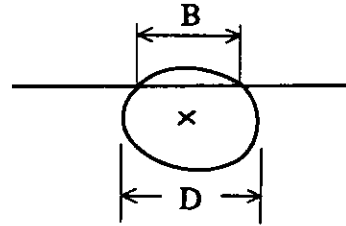
となって所望の条件が得られる。

なお、 $A_R = 0$ となると漂流力も 0 になる⁴⁾ ので都合が良いであろう。

3. 種々の場合

i) 部分没水門柱

原点を中心にとれば rolling は考えなくともよい。
 y 方向の条件 (2.5) は次のようになる。



$$K = \frac{\omega^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{B + s_2}{\nabla(1 + k_2) + \delta_2},$$

$$\dots\dots\dots (3.1)$$

これは系の固有周期である。

$s_2, \delta_2 \approx 0, k_2 \doteq 1$ とすると

$$\frac{\lambda}{2\pi} \doteq \frac{2\nabla}{B} \doteq \frac{\pi}{4\alpha} D, \quad (B = \alpha D), \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

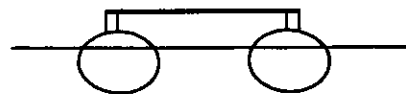
であるから $\lambda = 100 \text{ m}$ とすると $D \doteq \frac{2}{\pi^2} \alpha \lambda = 20 \alpha \text{ m}$ の程度となる。

α を小さくすれば D も小さくなるがその場合は非線型な減衰が出て来るであろう (浸水面の変化による) から注意しなければならない。

又 $s_2 = \delta_2 = 0$ の時はこの周波数は所謂波無し周波数に略々等しいからやはり注意しなければならない。

x 方向には復原力がないので附加しなければならない。その値は静的復原力 (上下方向の) と同程度の大きさでなければならない事は明らかであろう。

そのような装置は繫留装置を工夫して可能であるように思われるが、それが出来なければ図のように上下方向の仕掛を 2 段、3 段と装備する事が考えられるがこれを図のように一体化するならば、これは roll 方向も考えた事に等しくなるからこの場合は roll の周期を理論に合うように調整すればよい。



なお、波のパワーは単位半高について、

$$E_W = \rho g^2 / 4 \omega = \frac{\rho g}{4} \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}}$$

であるから $\lambda = 100 \text{ m}$, 波高 2 m とすると、

$$E_w / 75 \div 30 \text{ H.P./m}$$

の程度である。

ii) 筏

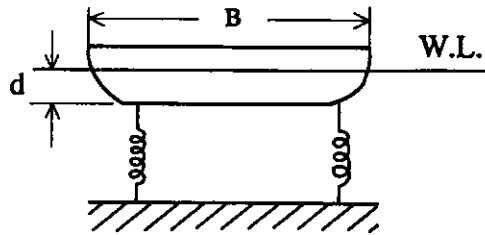
sway-motionによる波がrollingによるものより充分小さいならばrollingのみ考えればよく、

$$K = \frac{\nabla m + s_3}{\nabla(1+k_3)\kappa^2 + \delta_3}, \quad (3.3)$$

となるが $s_3, \delta_3 \div 0, k_3 \div 1$ とすると、

$$\nabla m = \frac{B^3}{12}, \quad \nabla \kappa^2 \div \nabla \frac{B^3}{12}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \div \frac{1}{d}, \quad \dots\dots (3.4)$$



となって d が大きくなりすぎるから、復原力を少なくする必要がある。その

ためには半没体として水線面積を小さくするかもしれないが、それはバネ系を装着する事である。

一方 y 方向に関しても前項で見たように半没体としなければ浮体の大きさは非常に大きいものになってしまうので図のような筏はあまり現実的ではなく、前項の最後に指摘したように半没体を何個かならべたような筏の方が現実的であるように思われる。

又このような筏を剛につくるのは大変であろうから剛性による撓みをも考慮した理論を考える必要がある。

iii) 筏(続)

そのような訳で筏で波消しを実現するのは難かしいが、仮にそれが出来たとしても上下動とrollingの両方に対して別々の適当な減衰を加えるのは大変であるから、これを一つに出来ないだろうか。

これを正面から考えるのは大変であるが、次の定理を利用して逆に考えて行くと簡単にとける。

「波の問題では時間軸を逆にした運動が一般に存在する」

今の場合ある1点に力学系を付け加えて(力を加えて)波を消す事が出来るならば逆にその点に力を加えて片方にだけ波が出て行くような運動があると言う事である。

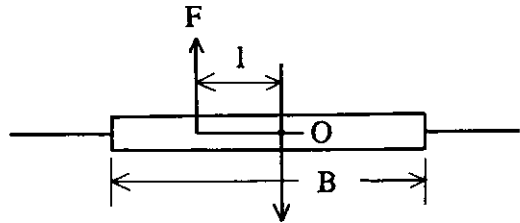
そのような点を探して見よう。

図の θ 点に F なる力をかけるとすると運動方程式は、

$$\left. \begin{array}{l} K C_2 Y = F \\ K C_3 \theta = \theta F \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} C_2 = \nabla + f_{22} - B/K \\ C_3 = \nabla \kappa^2 + f_{33} - \nabla m / K \end{array} \right\}, \dots\dots\dots (3.5)$$

夫々正負の方向に出て行く波の振幅は、

$$\begin{aligned} \bar{A}^+ &= iK\{YH_2^+ + \theta H_3^+\}, \\ \bar{A}^- &= iK\{YH_2^- + \theta H_3^-\} \\ &= iK\{YH_2^+ - \theta H_3^+\}, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.6)$$



よって、今 \$\bar{A}^- = 0\$ になる為には

$$YH_2^+ = \theta H_3^+, \text{ for } \bar{A}^- = 0, \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

でなければならない。
一方、(3.5) から

$$\ell C_2 Y = C_3 \theta, \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

でなければならないから (3.7) は、

$$\ell C_2 H_3^+ = C_3 H_2^+$$

or

$$\ell = \frac{C_3 H_2^+}{C_2 H_3^+}, \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

又、正方向に出て行く波の振幅が1である為には (3.7) と (3.6) から、

$$Y = 1/2iKH_2^+, \quad \theta = 1/2iKH_3^+, \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

$$\text{よって (3.5) から } F = C_2/2iH_2^+ = C_3/2i\ell H_3^+, \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

のように力も決まる。

このような \$\ell\$ が real でありうるであろうか。(real でなければ定点ではなく正負に振動する事になるから)

\$K \to 0\$ とすると、

$$H_3^+(K)/H_2^+(K) \xrightarrow{K \to 0} \frac{-iK \nabla \bar{OM}}{B - K(1 + k_2) \nabla},$$

であるから (3.9) より

$$\ell \xrightarrow{K \to 0} \frac{i}{\bar{OM}} \left(\kappa^2 + \frac{f_{22}}{\nabla} - m/K \right), \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

よって \$\ell\$ は rolling の同調点で real になり得、その時、

$$\ell \xrightarrow{K \to 0} \frac{|H_3^+|^2}{\nabla \bar{OM}} \to K^2 \nabla \bar{OM} = \frac{K^2 B^3}{12}, \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

となって \$\ell\$ は非常に小さい事がわかる。

今度は逆に ℓ 点に $-F^*$ なる力が働いて入射波があるとすると運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} KC_2 Y + F^* &= H_2^+ \\ KC_3 \theta + \ell F^* &= H_3^+ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.14)$$

波が消える為には、 $Y = i / 2K \overline{H_2^+}$, $\theta = i / 2K \overline{H_3^+}$,
でなければならないから、上式に代入して、

$$F^* = C_2 / 2i \overline{H_2^+} \quad , \quad \ell F^* = \overline{C_3} / 2i \overline{H_3^+} \quad , \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

よって、 $\ell = \overline{C_3 H_2^+} / \overline{C_2 H_3^+}$,

この後の式は ℓ は real とするから (3.9) の ℓ に等しく、又

$$F^* = -F \quad , \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

となっている事がわかる。

又 ℓ 点の変位は $(Y + \ell \theta)$ であるから、

$$\frac{F^*}{Y + \ell \theta} = \frac{-\overline{C_2}}{1 + \ell \overline{H_2^+} / \overline{H_3^+}} = \frac{-\overline{C_2 C_3}}{C_3 + \ell^2 C_2} \equiv C \quad , \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

となって F^* は ℓ 点の変位に比例する事がわかり、上式から所要の大きさが計算出来る。

$K \rightarrow 0$ の時は (3.13) によって ℓ が与えられ、その時、

$$C \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{B - K(1 + k_2) \nabla - i K |H_2^+|^2}{1 + i K \{ B - K(1 + k_2) \nabla \}} \rightarrow -\overline{C_2} \quad , \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

となって、これは上下動のみで波を消す場合の条件に略々等しい。

一方、 ℓ が real である為の条件は rolling の同調点であったから、結局前節で見たような困難は同じであるが、1点において力を加えて波を消す事は原理的には可能であると思われる。

iv) 垂直平板

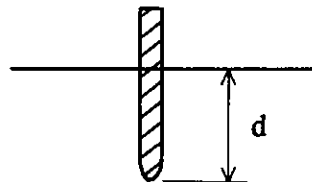
今度は上下動によって殆ど波が起
きない場合であるがこの時は A (17)
により、

$H_4^+ = -H_4^-$ であるから A (20) 第
1式は、

$$A_R + A_T = 1 \quad , \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

となる。

従って波を全部消す事は出来ず、
理想的に行っても半分であるし、又
 $A_R = 0$ ならば $A_T = 1$, $A_T = 0$ なら
ば $A_R = 1$ であるがこの点は次項



で考えよう。

rollingの同調点は $s_1, s_{1s}, \delta_1, \delta_s \neq 0$ とすると、

$$\nabla \kappa^2 (1 + k_s) = \frac{\nabla m}{K} + \frac{f_{1s}^2}{\nabla + f_{110}} \quad , \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

であるから更に $k_s = 1, f_{1s}^2 / (\nabla + f_{110}) \doteq \frac{\nabla}{2} \cdot \frac{d^2}{4}, \nabla \kappa^2 \doteq \nabla \frac{d^2}{12}$,

とおくと、
$$K \doteq m / \left(\frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{8} \right) = 24 m / d^2 \quad , \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

となるから $\lambda = 100 \text{ m}, d = 10 \text{ m}$ とすると $m \equiv \overline{GM} \doteq \frac{1}{4} \text{ (m)}$ の程度となる。

又、外力の系の着点の位置は、A (43) により ℓ_w であるから、

$$\ell_w \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{k_1 \ell_1}{1 + k_1} \doteq \frac{d}{4} \left(k_1 \doteq 1, \ell_1 \doteq \frac{d}{2} \right) \quad , \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

となる。

このように rolling の条件を満足させる事は容易に見えるが上下方向には波が起きないとすると波は半分しか消せない訳である。

又渦減衰のようなものも大きいと考えられるので実験的によく検討する必要がある。

つまり渦減衰が造波減衰より大きいならば波を消すには逆に仕事を供給してやらねばならない事になり、又それが丁度等しくなれば外部に系をつくる必要はない。

なおその時は反射波は残るので漂流力が働く故それをとめる必要があるがその繋留点は上の考察から ℓ_w がよいことになる。

V) 垂直平板 (続)

(3.14) により $A_R = 0$ ならば $A_T = 1, A_T = 0$ ならば $A_R = 1$ であるが、そのような場合の実現性について考えて見よう。

A (18) により、

$$A_R = \frac{H_{1s}^+}{H_1^+} + i K H_1^+ (X + \ell_w \theta)$$

又A(34) より

$$K (X + \ell_w \theta) = \frac{\Delta_s}{(1 + \beta) \Delta \overline{H_1^+}} \quad , \quad \Delta = \Delta_o - i \Delta_s \quad ,$$

よって、

$$A_R = i \frac{H_{1s}^+}{H_1^+} + \frac{i \Delta_s H_1^+}{(1 + \beta) \Delta \overline{H_1^+}} \quad , \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

従って、

$$\frac{\Delta_s}{\Delta} = -(1+\beta) \frac{H_{1s}^+}{H_{1c}^+}, \quad \text{for } A_R=0, A_T=1, \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

$$\frac{\Delta_s}{\Delta} = i(1+\beta) H_{1c}^+ / H_{1s}^+, \quad \text{for } A_R=1, A_T=0, \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

ここで, $\Delta = \Delta_e - i \Delta_s = |\Delta| e^{i(\pi+\delta)}, \quad \pi > \delta > 0, \quad \dots\dots\dots (3.26)$

$$H_{1c}^+ = H_{1e} + i H_{1s}^+ = |H_{1c}^+| e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{2})}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \dots\dots\dots (3.27)$$

$$H_{1e}^+ = -i |H_{1c}^+| \cos \alpha, \quad H_{1s}^+ = +i |H_{1c}^+| \sin \alpha,$$

なお,

$$\alpha = \tan^{-1} \left\{ \frac{\pi I_1(Kd)}{K_1(Kd)} \right\}, \quad \dots\dots\dots (3.28)^3$$

なる関係がある。

このようにおくと (3.24), (3.25) は,

$$(1+\beta) \sin \delta e^{-i\delta} = \begin{cases} -\sin \alpha e^{i\alpha} & \text{for } A_R=0 \\ -i \cos \alpha e^{i\alpha} & \text{for } A_T=0 \end{cases}$$

となり, 結局これを満足するには,

$$\delta = \pi - \alpha, \beta = 0, \quad \text{for } A_R=0, \quad \dots\dots\dots (3.29)$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \beta = 0, \quad \text{for } A_T=0, \quad \dots\dots\dots (3.30)$$

でなければならない。

$\beta = 0$ でなければならない事は A_R or A_T のどちらかが1つまり入射波のエネルギーが完全に反射又は透過する事から明らかであろう。

いずれにしても δ を上のように調のえる事は可能であろう。

VI) 造波機型式 (フラップ式)

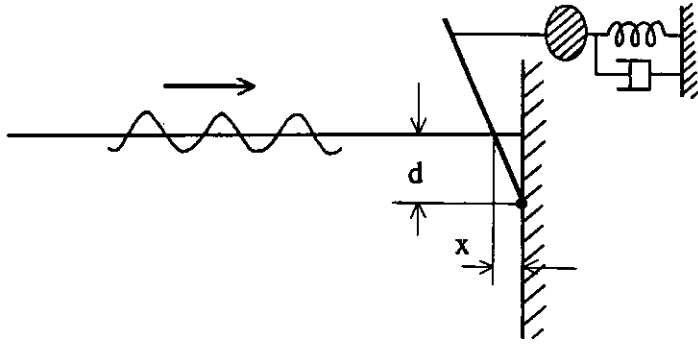
J. H. Milgramによって研究された例であるが, こゝでは水深は充分深いとし又受動的な図のような機械系を附加するものとして考えよう。

今迄の例と異なるのは波は壁によって完全に反射される点である。

$$H_1^+ = 1, \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

又, 振幅 X のフラップ式造波装置の起す波については Havelock により A(10) の形で,

$$H^+(K) = -2 \int_0^d (d-y) e^{-Ky} dy$$



$$= -\frac{2d}{K} + \frac{2}{K^2} (1 - e^{-Kd}) \xrightarrow{K \rightarrow 0} -d^2, \quad \xrightarrow{K \rightarrow \infty} -\frac{2d}{K}, \quad \dots \quad (3.32)$$

従って反射波は

$$A_R = 1 + iKH^+(K), \quad \dots \quad (3.33)$$

と表わされ $A_R = 0$ とする為には,

$$X = -\frac{1}{iKH^+} \left. \begin{array}{l} \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{1}{iKd^2} \\ \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2id} \end{array} \right\} \quad \dots \quad (3.34)$$

一方フラップに働く動水圧は反射波も含めると入射波のみの倍となるから,

$$p = 2\rho g e^{-Ky}$$

よってフラップのなす仕事は,

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^d p(y) \dot{X}(d-y) dy, \quad \dots \quad (3.35)$$

所で,

$$\int_0^d p(y)(d-y) dy = -\rho g H^+(K), \quad \dots \quad (3.36)$$

$\dot{X} = i\omega X = -\omega/KH^+$ であるから,

$$W = \frac{\rho g^2}{2\omega} = 2E_W, \quad \dots \quad (3.37)$$

しかしフラップがつくる波の振幅は(3.33)により単位振幅であるからその為に必要なパワーは E_w で後の半分のパワーは系外に供給したことになる。

後で図のような系をつくって波と同調させ、波のパワーを吸収することが出来る。

4. 結 び

以上の考察から浮遊式消波装置はその動揺周期を入射波のそれに同調させ、さらに適当な減衰を附加すれば効率よく波を消す事がわかり、又その時漂流力も小さくなる事がわかった。

そして又この時機械的減衰系の替りに発電機を使う事にすれば波からエネルギーを取り出す事が出来、その量は波が消えた時に最大である事は明らかであるから波力の利用と波消しは両立する概念である。

しかし実用的には種々の波長に対してよく効くものを考えねばならず、又渦減衰等も一般に形状がスマートな形ではないと考えられるのでその形状に応じて実験的に検討する必要がある。

以 上

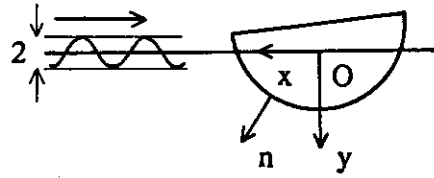
参考文献

- 1) J. H. Milgram; J. F. M. vol. 43 (1970), pp. 845—859
- 2) T. Y. Wu; J. S. R., March, 1972.
- 3) J. Kotik; J. S. R., October, 1963.
- 4) 別所正利; 防大理工学研究報告, 3巻1号, 昭和40年5月
- 5) " ; " , 3巻3号, 昭和41年1月

A 附録

必要な理論式は大体文献(4)(5)に従うが、あいまいな点もあるので以下にまとめて記す。

座標軸等は図のようにとる。



速度ポテンシャルを $\Phi(x, y, t)$,
 圧力を $P(x, y, t)$, 水面変位を $H(x, t)$ とし、それらを

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \text{Re} \{ \varphi(x, y) e^{i\omega t} \}, \\ P(x, y, t) &= \text{Re} \{ p(x, y) e^{i\omega t} \}, \\ H(x, t) &= \text{Re} \{ \eta(x) e^{i\omega t} \}, \end{aligned} \right\} \dots(1)$$

とおくと, $p(x, y) = \rho i \omega \varphi(x, y)$, (2)

$$\eta(x) = \frac{\omega}{i g} \varphi(x, 0) , \dots\dots\dots (3)$$

水面条件は,

$$K \varphi(x, 0) + \varphi_y(x, 0) = 0 , K = \omega^2 / g = 2 \pi / \lambda , \dots\dots\dots (4)$$

である。

入射波は, $\eta_0(x, t) = \text{Re} \{ e^{i K x + i \omega t} \}$, (5)

とするとそのポテンシャル等は,

$$\Phi_0(x, y, t) = \text{Re} \{ \varphi_0(x, y) e^{i\omega t} \} ,$$

$$\varphi_0(x, y) = \frac{i g}{\omega} \phi_0(x, y) , \dots\dots\dots (6)$$

$$\phi_0(x, y) = e^{-K y + i K x} ,$$

とかける。

線型性を仮定すると全ポテンシャルは,

$$\varphi(x, y) = i \omega \sum_{j=0}^4 X_j \phi_j(x, y) , \dots\dots\dots (7)$$

ここに, $X_1 \equiv X$, $X_2 \equiv Y$, $X_3 \equiv \theta$, $X_0 = X_4 = 1/K$ は夫々の振幅とする。

境界条件は,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \varphi_j &= -i \omega X_j \frac{\partial x_j}{\partial n} , & \frac{\partial}{\partial n} \phi_j &= -\frac{\partial}{\partial n} x_j , & j &= 1, 2, 3, \\ \frac{\partial}{\partial n} \varphi_4 &= -\frac{\partial}{\partial n} \varphi_0 , & \frac{\partial}{\partial n} \phi_4 &= -\frac{\partial}{\partial n} \phi_0 , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

但し, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $\frac{\partial}{\partial n} x_3 = y \frac{\partial x}{\partial n} - x \frac{\partial y}{\partial n}$,

$|x| \gg 1$ では,

$$\phi(x, y) \xrightarrow{|x| \gg 1} i H^\pm(K) e^{-Ky \mp iKx} \quad \dots\dots\dots (9)$$

但し上側符号は $x > 0$ の時, 下側のは $x < 0$ の時とする。

又,

$$H^\pm(K) = \int_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-Ky \pm iKx} ds, \quad \dots\dots\dots (10)$$

ポテンシャルをその実虚部にわけて,

$$\phi = \phi_c + i \phi_s, \quad \dots\dots\dots (11)$$

とかくと, それに応じて

$$H_{c,s}^\pm = \int_C \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_{c,s} - \phi_{c,s} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-Ky \pm iKx} ds, \quad \dots\dots\dots (12)$$

とかく事が出来るが, この H_c, H_s は実であるとは限らない。

物体が左右対称ならば, 上下動では

$$H_2^+(K) = H_2^-(K), \quad \dots\dots\dots (13)$$

で H_{2c}^+, H_{2s}^+ は共に実数値をとる。

左右, 回転動では

$$H_j^+(K) = -H_j^-(K), \quad j = 1, 3, \quad \dots\dots\dots (14)$$

で H_{jc}^+, H_{js}^+ は共に虚である。

散乱波については,

$$\begin{aligned} H_4^+(K) &= H_{4c}^+ + i H_{4s}^+ \\ H_4^-(K) &= \overline{H_{4c}^+} + i \overline{H_{4s}^+} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。

又,
$$H_3^\pm(K) = \ell_w H_1^\pm(K), \quad \ell_w; \text{ real} \quad \dots\dots\dots (16)$$

なる関係があり, 散乱波については,

$$H_4^\pm(K) = \frac{H_{2s}^+}{H_2^+} \pm \frac{H_{1s}^+}{H_1^+}, \quad \dots\dots\dots (17)$$

なる簡単な関係があり, 波については H_1^+ と H_2^+ がわかればすべてわかる事になる。

外に出て行く波の振幅は, (1), (9)によって,

$$\sum_j \eta_j(x) = \frac{\omega}{i g} \sum_j \varphi_j = \frac{\omega^2}{g} \sum_j X_j \phi_j \rightarrow iK \sum_j X_j H_j^\pm(K) e^{\mp iKx} ,$$

であるから反射波の振幅は,

$$A_R = iK \sum_{j=1}^4 X_j H_j^+(K) , \quad \dots\dots\dots (18)$$

入射波も含めた透過波のそれは,

$$A_T = 1 + iK \sum_{j=1}^4 X_j H_j^-(K) , \quad \dots\dots\dots (19)$$

そうすると (13), (14), (15) を代入して,

$$\begin{aligned} A_R + A_T &= 1 + i (H_4^+ + H_4^-) + 2iKYH_2^+ , \\ A_R - A_T &= -1 + i (H_4^+ - H_4^-) + 2iK \{XH_1^+ + \theta H_3^+\} , \end{aligned}$$

所で

$$\left. \begin{aligned} 1 + i \{H_4^+ + H_4^-\} &= H_2^+ / \overline{H_2^+} \\ 1 + i \{H_4^- - H_4^+\} &= -H_1^+ / \overline{H_1^+} \end{aligned} \right\}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} A_T + A_R &= \frac{H_2^+}{\overline{H_2^+}} + 2iKYH_2^+ , \\ A_R - A_T &= \frac{H_1^+}{\overline{H_1^+}} + 2iK \{XH_1^+ + \theta H_3^+\} , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

を得る。

次に i 番目の運動による j 方向の力又はモーメントは $Re \{ F_{ij} e^{i\omega t} \}$, とすると

$$\begin{aligned} F_{ij} &= - \int_C p_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\rho i \omega \int_C \varphi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \rho \omega^2 X_i \int_C \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds \\ &= \rho \omega^2 X_i f_{ij} , \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここに

$$f_{ij} = \int_C \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = - \int_C \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds = f_{j,i} , \quad \dots\dots (22)$$

となる。

但し, $i, j = 1, 2, 3$

波の力は $Re\{E_j e^{i\omega t}\}$ とおくと,

$$E_j = - \int (p_0 + p_4) \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\rho g H_j^+(K) , \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。

運動方程式は系外の力を F_j ($j=1, 2, 3$) とすると,

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 M X &= F_{11} + F_{3,1} + E_1 + F_1 , \\ -\omega^2 I \theta - W m \theta &= F_{1,3} + F_{33} + E_3 + F_3 , \\ -\omega^2 M Y + \rho g B Y &= F_{22} + E_2 + F_2 , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

M は質量, I は質量慣性モーメント, $W = g M$, $m = \overline{GM}$, B は水線幅とする。

(21) を代入し, $M = \rho \nabla$, $I = \rho \nabla \kappa^2$ とすると, 上式は

$$\left. \begin{aligned} -K(\nabla + f_{11}) X - K f_{13} \theta &= -H_1^+(K) + F_1 / \rho g , \\ \{-K(\nabla \kappa^2 + f_{33}) + \nabla m\} \theta - K f_{31} X &= -H_3 + F_3 / \rho g , \\ \{-K(\nabla + f_{22}) + B\} Y &= -H_2^+ + F_2 / \rho g , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} \text{今 } F_j \text{ が } \frac{1}{\rho g} F_1 &= (K \delta_{11} - s_{11} - i K \mu_1) X + (K \delta_{13} - s_{13} - i K \mu_{13}) \theta , \\ \frac{1}{\rho g} F_3 &= (K \delta_{33} - s_{33} - i K \mu_3) \theta + (K \delta_{31} - s_{31} - i K \mu_{31}) X , \\ \frac{1}{\rho g} F_2 &= (K \delta_{22} - s_{22} - i K \mu_2) Y , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

のように与えられる。つまり外部にこのような力学系を考えると,

$$\left. \begin{aligned} (26) \text{ から } C_1' X + C_{13}' \theta &= H_1^+ / K , \\ C_3' \theta + C_{31}' X &= H_3^+ / K , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

$$C_2' Y = H_2^+ / K , \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1' &= \nabla + f_{11e} + \delta_{11} - s_{11} / K - i(\mu_1 + |H_1^+|^2) , \\ C_3' &= \nabla \kappa^2 + f_{33e} + \delta_{33} - s_{33} / K - \frac{\nabla m}{K} - i(\mu_3 + |H_3^+|^2) , \\ C_2' &= \nabla + f_{22e} + \delta_{22} - (B + s_{22}) / K - i(\mu_2 + |H_2^+|^2) , \\ C_{13}' &= f_{13e} + \delta_{13} - \frac{s_{13}}{K} - i(\beta_{13} + H_1^+ \overline{H_3^+}) , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

$f_{i,jc}$ は $f_{i,j}$ の real part を意味する。なお $Im\{f_{i,j}\} = -H_i \overline{H_j}$ である。
ここで

$$\mu_j = \beta_j |H_j^+|^2, \quad \mu_{1,3} = \beta_{13} H_1^+ H_3^+ = \mu_{31}, \dots \quad (31)$$

とおいておこう。

$$\text{そうすると先ず (29) の解は, } KY = H_2^+(K)/C_2^+ \quad (32)$$

で特に同調時には

$$KY = \frac{i}{(1+\beta_2) \overline{H_2^+}}, \text{ for } \nabla + f_{22c} + \delta_2 = \frac{B+s_2}{K} \quad (33)$$

次にもし θ を考える必要がなければ X について上式と同形になるが一般には,

$$KX = D_1/\Delta, \quad K\theta = D_3/\Delta \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= C_1^+ C_3^+ - (C_{13}^+)^2, \\ D_1 &= C_3^+ H_1^+ - C_{13}^+ H_3^+, \quad D_3 = C_1^+ H_3^+ - C_{13}^+ H_1^+, \end{aligned} \right\} \dots \quad (35)$$

$$\text{ここで更に, } \beta_1 = \beta_3 = \beta_{13}, \quad (36)$$

とおくと D_1, D_3 は実になって

$$X/\theta = D_1/D_3 = \ell \quad (37)$$

なる ℓ は実になる。(rolling 中心)

さて同調時には

$$\text{Re}\{C_1^+ C_3^+ - (C_{13}^+)^2\} = 0 \quad (38)$$

の時 $\text{Im}\{C_1^+ C_3^+ - (C_{13}^+)^2\} = -(1+\beta) |H_1^+|^2 \{C_1^+ \ell_w^2 + C_3^+ - 2\ell_w C_{13}^+\}$,
となるので

$$\left. \begin{aligned} K\theta &= \frac{i}{1+\beta_1} \frac{\ell_w C_1^+ - C_{13}^+}{H_1^+} / (\ell_w^2 C_1^+ + C_3^+ - 2\ell_w C_{13}^+), \\ KX &= \frac{i}{(1+\beta_1)} \frac{(C_3^+ - \ell_w C_{13}^+)}{H_1^+} / (\ell_w^2 C_1^+ + C_3^+ - 2\ell_w C_{13}^+), \end{aligned} \right\} \dots \quad (39)$$

よつて,

$$KXH_1^+ + K\theta H_3^+ = i H_1^+ / (1+\beta) \overline{H_1^+} \quad (40)$$

左右動と rolling は元来独立でないから系外の力も独立にする必要はなく, ある1点に作用させればよいと考えられる。

それを $F_3 = \ell F_1$ とおくと (27), (36) から

$$\left. \begin{aligned} \ell \delta_1 &= \delta_{13}, \quad \ell \delta_{13} = \delta_3, \quad \delta_3 = \ell^2 \delta_1, \\ \ell s_1 &= s_{13}, \quad \ell s_{13} = s_3, \quad s_3 = \ell^2 s_1, \\ \ell \mu_1 &= \mu_{13}, \quad \ell \mu_{13} = \mu_3, \quad \mu_3 = \ell^2 \mu_1, \end{aligned} \right\} \dots \quad (41)$$

でなければならず、この最後の式から

$$\beta_3 |H_3^+|^2 = \beta_1 \ell^2 |H_1^+|^2, \quad \dots\dots\dots (42)$$

であるから結局 $\ell = \ell_w,$ (43)

でなければならない。

従って力は

$$\frac{F_1}{\rho g} = (\kappa \delta_1 - s_1 - i \mu_1)(X + \ell_w \theta), \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$F_3 = \ell_w F_1$$

となる。

以上

「流体力学における境界積分方程式について」

別所正利*

“On The Boundary Integral Equation in Hydrodynamics”

By Masatoshi Bessho

内容目次

1. 序論
 2. 境界積分方程式
 3. 2次元問題
 4. 3次元問題
 5. 回転体
 6. 結論
- 参考文献

1. 序論

最近特に海洋構造物に作用する流体力の造波理論的計算法の普及は目ざましくその信頼性も高まり実用的方法としての評価も略々確立されて来たように見える。

それと同時に計算法も段々と進歩し計算機の大容量化とあいまって複雑な3次元的構造物や船体のようなものについての計算も日常化しつつあるようである。^{1) 3)}

このような計算法は周知のように大別して境界要素法と有限要素法に別ける事が出来る。²⁾

前者は物体の境界を微少要素に分割して境界値問題を積分方程式（以下これを境界積分方程式²⁾と呼ぶ）に帰着させて解く方法であり、後者は考えている領域を細分して境界条件を満たしかつ領域全体で与えられた微分方程式を満たす解を求めるものである。

当然前者は後者に比して要素数は小さいが一般に境界積分方程式の核関数は複雑で特に3次元問題となると現在の所小さい計算機ではかなり困難である。

それに比して後者の方法では要素数は格段に多くなるがそのマトリックス要素の計算は一般に極めて容易でかつ帯状マトリックスとなり計算機による処理に好適である。

たゞこゝで考えようとする問題では一般に領域が無限に広がっているのでこの方法では実際上有限の領域での計算しか出来ないからそれをその外部の無限領域の解に接続する問題が残る。

このように両法の得失は連立方程式の元数の大小とその要素係数の計算の難易の2点にあると考えられるから計算機の能力および特徴に従って有利な方法を選ぶべきであろう。

また境界要素法では核関数の計算が容易になれば一層強力な方法となりうる事もわかるであろう。

さて本報告はこの境界要素法の核心である積分方程式について考察と言うよりはむしろその各種

の形式と特徴を整理して概観しまた特にその特異積分の計算法についての知見を紹介しようとするものである。

つまり従来この種の問題では吹出し吸込み分布による表現が最も多く利用されて来たが最近ではその他の特異性を使うものもかなり利用されており³⁾ それら相互の関連得失の検討も望ましい所である。

2. 境界積分方程式

以下非粘性非圧縮性の流体が無限又は半無限に広がっている領域で物体上の法線速度が指定される場合の流れ場について考える事にしよう。

これは数学的には調和関数の第2境界値問題と呼ばれるものである。なお自由表面のある場合は第3境界値問題との混合問題となるが普通は自由表面条件を満足する単位吹出しポテンシャル S を導入して形式上第2境界値問題に帰着させている。

そこでその場合も含めて無限遠方で正則な速度ポテンシャル ϕ はグリーンの定理により

$$\phi(Q) = \iint_S \left[\phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} S(P, Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} S(P, Q) \right] dS_P, \quad \dots\dots\dots (1)$$

こゝに S は物体表面とし、 n は外向き法線とする。

今物体の内部領域 D で正則な関数 a を考えると外部領域 D では

$$0 = \iint_S \left[a(P) \frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) - \frac{\partial a}{\partial n} S \right] dS_P, \quad Q \in D, \quad \dots\dots\dots (2)$$

(1) から (2) を辺々差引いて $\phi = -a$, on S とすれば

$$\phi(Q) = \iint_S \sigma(P) S(P, Q) dS_P, \quad \sigma = -\frac{\partial}{\partial n} (\phi + a), \quad \dots\dots\dots (3)$$

また $\partial \phi / \partial n = -\partial a / \partial n$ とすれば

$$\phi(Q) = \iint_S \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} S(P, Q) dS_P, \quad \mu = \phi + a, \quad \dots\dots\dots (4)$$

となってよく知られた吹出し、2重吹出し表現が得られ境界積分方程式は夫々次のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(Q) = -\frac{\sigma}{2}(Q) + \iint_S \sigma(P) \frac{\partial}{\partial n_Q} S(P, Q) \Big|_S dS_P, \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \iint_S \mu(P) \frac{\partial^2}{\partial n_P \partial n_Q} S(P, Q) \Big|_S dS_P, \quad \dots\dots\dots (6)$$

(1) も又境界積分方程式と見なしてよい。^{6) 16)}

(4), (6) については物体表面 S が閉じていて特に

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n}, \frac{\partial y}{\partial n}, \frac{\partial z}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial n} \exp. [-Kz + iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha)], \dots \quad (7)$$

の場合は a として

$$a = x, y, z, \exp. [-Kz + iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha)], \dots \quad (8)$$

と選ぶと (4) は

$$\mu(Q) - \iint_S \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_P} S(P, Q) dS_P = a(P), \dots \quad (9)$$

となって主要部は (1) と同形でこの儘境界積分方程式として使え、かつ (1) の右辺第 2 項の積分を実行する手間が省ける。

なお平板やビルヂキールのある場合は (1), (5) では境界条件が指定出来ないので (6) または (8) を使用しなければならない。

これらの解の相互関連を見る為にこれらの方程式を簡略化して次のようにマトリックス表示して見よう。

$$A \{ \phi \} = B \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\}, \dots \quad (1')$$

$$\{ \phi \} = B \{ \sigma \}, \dots \quad (3')$$

$$A' \{ \sigma \} = \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\}, \dots \quad (5')$$

と書くと (1') の解は

$$\{ \phi \} = A^{-1} B \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\}, \dots \quad (10)$$

(5') の解は

$$\{ \sigma \} = (A')^{-1} \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\} = (A^{-1})' \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\}, \dots \quad (11)$$

となるから (3') により

$$\{ \phi \} = B (A')^{-1} \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\}, \dots \quad (12)$$

(10) と較べて

$$A^{-1} B = B (A')^{-1}, \dots \quad (13)$$

を得るがこれは行列の演算規則そのものである。

このようにして吹出し分布で (5') を解く時は ϕ を求めるのにもう一回積分演算を要するので 2 度手間のようにも見えるが (10), (12) を比較して見ると行列の演算は実質的には同じである。

2重吹出し分布では I を単位行列として

$$\{\phi\} = (I - A)\{\mu\}, \quad \dots\dots\dots (4')$$

$$C\{\mu\} = \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\}, \quad \dots\dots\dots (6')$$

と書くとその解は

$$\{\mu\} = C^{-1} \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\}, \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\{\phi\} = (I - A)C^{-1} \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\}, \quad \dots\dots\dots (15)$$

となり、(10)と(15)を較べて次の等式を得る。

$$A(I - A) = BC, \quad \dots\dots\dots (16)$$

これから A と B がわかれば C は計算出来る事がわかる。

さて Irregular Frequency として知られている波数では、例えば吹出し分布では、 A' 従って A が特異であって (5') の解はないが、 ϕ は有限確定の解を有する事がわかっているので (1') からこの時 B も特異でなければならぬ。同様に C が特異ならば $(I - A)$ が同時に特異でなければならず、一方 B と C を特異にする波数は常に異なっているので片方で具合の悪い時はもう一方を使えばよい事になる。^{4) 5)}

この波数の近くでは特異値分解法²⁰⁾ を使って特異性をさける方法も考えられるが結局の所小さい数同志の割算となるので精度は大変劣るだろう。

最後に (9) とそれに対応する (1) は

$$A\{\mu\} = \{a\}, \quad \dots\dots\dots (9')$$

$$A\{\phi\} = (I - A)\{a\}, \quad \dots\dots\dots (10')$$

となり、その解は

$$\{\mu\} = A^{-1}\{a\}, \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\{\phi\} = A^{-1}(I - A)\{a\}, \quad \dots\dots\dots (18)$$

(17) を (14) と較べて

$$\{a\} = AC^{-1} \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\}, \quad \dots\dots\dots (19)$$

を得るが、これは (2) を法線微分したのから得られる関係である。また (18) は 同じ法線微分を有する外部解 ϕ と内部解 a との関係を示している。

上式は又 (2) そのものでも表現出来

$$\{a\} = (I - A)^{-1} B \left\{ \frac{\partial a}{\partial n} \right\}, \quad \dots\dots\dots (20)$$

となるが、これは又 (19) から (16) を使って導く事も出来る。

3. 2次元問題

2次元問題では共役関数を導入すると大変便利である。

まず流れ関数を Ψ とすると速度ポテンシャルとの関係は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = -\frac{\partial \Psi}{\partial n}, \quad \dots\dots\dots (21)$$

であるから核関数についても

$$\frac{\partial}{\partial n_p} S(P, Q) = \frac{\partial}{\partial s_p} T(P, Q), \quad \frac{\partial}{\partial s_p} S(P, Q) = -\frac{\partial}{\partial n_p} T(P, Q), \dots (22)$$

なる共役核 T を導入しよう。

特に

$$S(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log PQ, \quad T(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \theta, \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y - y'}{x - x'}, \quad P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y')$$

先ず(4)に(22)を代入すると

$$\phi(Q) = \int_C \mu(P) \frac{\partial}{\partial s_p} T(P, Q) d s_p, \quad \dots\dots\dots (24)$$

となるので μ が微少要素上で階段関数となっていれば積分の苦勞がなく境界方程式を(9)を選ぶ事が出来れば大変簡単になる。

又、吹出し分布(3)の場合も流れ関数では

$$\phi(Q) = \int_C \sigma(P) T(P, Q) d s_p, \quad \dots\dots\dots (25)$$

となって T の特異性は $P=Q$ におけるジャンプのみであるので積分計算は容易である。⁷⁾

また(24)を流れ関数に変換すると

$$\phi(Q) = - \int_C \mu(P) \frac{\partial}{\partial s_p} S(P, Q) d s_p, \quad \dots\dots\dots (26)$$

となって μ が階段関数ならば積分が容易であり、ビルヂキールのあるような場合も取扱かえる。

次に(24)を部分積分して一面性を仮定すると

$$\phi(Q) = - \int_C \frac{\partial \mu}{\partial s}(P) T(P, Q) d s_p, \quad \dots\dots\dots (27)$$

その流れ関数は

$$\phi(Q) = \int_C \frac{\partial \mu}{\partial s} S(P, Q) d s_p, \quad \dots\dots\dots (28)$$

となるがこれはサーキュレーション ($\partial \mu / \partial s$) による流れ場であって、一様流れの場合は (4) 第 2 式からわかるように $\partial \mu / \partial s$ は直接 C 上の速度を与える。

さて自由表面のある場合も 2 次元では計算量が少ないので現在の所あまり不便もないようであるが核関数の計算の手間を省くには波なし核を使う方法がある。^{15) 18)}

例えば動揺問題では

$$S^*(P, Q) \equiv \left(K + \frac{\partial}{\partial y_Q}\right) S(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \left[K \log \frac{r_2}{r_1} - \frac{\partial}{\partial y_Q} \log r_1 r_2 \right],$$

$$r_1 = \overline{PQ}, \quad r_2 = \overline{\overline{P}Q}, \quad \overline{P} = (x, -y) \quad \dots\dots\dots (29)$$

として (1) を微分し右辺第 2 項を部分積分すると

$$\left(K + \frac{\partial}{\partial y}\right) \phi(Q) = \int_C \left[\phi(P) \frac{\partial}{\partial s_P} T^*(P, Q) + \phi(P) \frac{\partial}{\partial s_P} S^*(P, Q) \right] ds_P, \quad \dots\dots\dots (30)$$

を得、核関数の計算は大変簡単である。

なお左辺は

$$\left(K + \frac{\partial}{\partial y}\right) \phi = K \phi + \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \dots\dots\dots (31)$$

と解釈するのでこれは微積分方程式となる。

また、この方法では散乱問題の方程式は (7) および (9) から

$$\left(K + \frac{\partial}{\partial y}\right) \mu = \int_C \mu \frac{\partial}{\partial s} T^* ds_P, \quad \dots\dots\dots (32)$$

となって (30) の齊次方程式となるので (30) は齊次解として散乱解を含む。

それ故 (30) を解くには C 上の幾つかの点で法線速度を与えなければ解は定まらない。⁸⁾

核関数を簡単化するという意味ではさらに一步すすめてすべて対数核のみですます方法が有望になってきた。^{9) 10) 11)}

今、それを定常造波抵抗問題で考えて見よう。

充分遠方に検査面 L_1, L_2 を考え自由表面を F とすると (9) から (22), (23) によって

$$\mu(Q) - \frac{1}{2\pi} \int_{C+F+L_1+L_2} \mu(P) \frac{\partial}{\partial s_P} \theta(P, Q) ds_P = x(Q), \quad \dots\dots\dots (33)$$

あるいは

$$\frac{\partial \mu}{\partial s}(Q) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s_Q} \int_{C+F+L_1+L_2} \frac{\partial \mu}{\partial s}(P) \theta(P, Q) ds_P = \frac{\partial x}{\partial s}(Q), \quad \dots\dots\dots (34)$$

F上では圧力一定故ベルヌーイの定理より

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (x + \phi) = \pm \sqrt{1 - 2g\eta}, \quad \dots\dots\dots (35)$$

但し η は水面変位とする。⁹⁾

この方法はさらに試行錯誤法によって水面の非線型性も扱かえる^{9) 10)}点で魅力があるが L_1, L_2 の選定とその上での境界条件（放射条件）の取扱いにはまだ検討の余地が残されているように思われる。

この点については次節で再び論ずる事としよう。

4. 3次元問題

3次元流れでも回転体に関しては2次元並みに簡単化されるので更ためて次節において論ずる事としこゝでは一般的な場合を考えよう。

3次元計算の困難な点は2次元の場合に比して連立方程式の元数、従って行列の要素係数の数が飛躍的に増加する事である。

それ故少しでも計算の少くなる、例えば従来の吹出し分布法による(5)よりは(1)または(9)の方が望ましい。

そこで特に(9)を用いる方法について少し考えて見よう。この場合の計算上の問題点は特異積分の評価である。

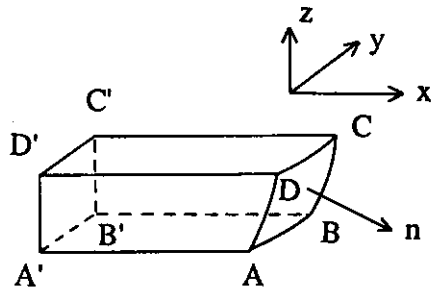
今、 $ABCD$ で囲まれた微少要素 ΔS 上の次の積分を考えよう。

$$I(Q) = \iint_{\Delta S} \frac{\partial}{\partial s_P} S(P, Q) dS_P, \quad \dots\dots\dots (36)$$

もし要素上でポテンシャルが変動するならば更に分割して上式の積分の和として評価すればよい。

面 ΔS が座標面に平行な場合は容易に計算出来るので一般の場合にも上式を変形して座標面に平行な面上の特異点分布で表現出来ないだろうか。

核は調和関数であるからグリーン
の定理を使えば良く、直ちに



$$I(Q) = \frac{\overline{ABB'A}}{\overline{CDD'C'}} \frac{\partial S}{\partial z} dx dy - \int \frac{\overline{BC'C'B'}}{\overline{DAA'D'}} \frac{\partial S}{\partial y} dx dy$$

なお $A' B' C' D'$ は無限遠方にあるものとする。

これを x で積分すると

$$I(Q) = \int \frac{dy}{\overline{AB-CD}} \left[\int_{-\infty}^x \frac{\partial S}{\partial z} dx \right] - \int \frac{dz}{\overline{BC-AD}} \left[\int_{-\infty}^x \frac{\partial S}{\partial y} dx \right], \dots\dots\dots (37)$$

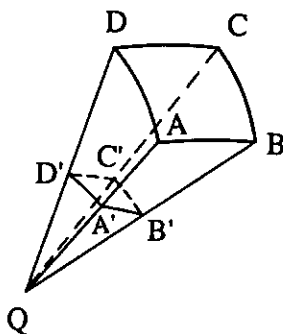
となるが(36)を $ABCD$ 囲りの渦系によるポテンシャルと見なすならばストークスの定理によって上式は明白である。

同じ様な事を Q 点と $ABCD$ を結んで出来る角錐面上の特異点分布とする事も出来よう。

この方法は特に

$$S(P, Q) = \frac{1}{4\pi r}, \quad r = \overline{PQ}, \dots\dots\dots (38)$$

の時は大変簡単になって、今 Q を中心とする単位球面と \overline{QA} , B , C , D との交点を $A' B' C' D'$ とすると角錐面の法線は動径 r と直交するからその上の積分は消えて



$$I(Q) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{A'B'C'D'} \frac{dS_P}{r^2},$$

となるが立体角 ω は定義により

$$dS_P = r^2 d\omega, \dots\dots\dots (39)$$

であるから

$$I(Q) = \frac{-1}{4\pi} \iint_{A'B'C'D'} d\omega \dots\dots\dots (40)$$

となり、これは Q 点から $\triangle S$ を見込む立体角である。

その計算には球面三角法の公式を利用する事が出来代数演算によって求められ、法線の方向余弦

弦等を計算する必要はない。

このように積分の評価にグリーンの定理を適用して積分が簡単になるようにする事は2次元問題において複素積分を利用する事に相当しており、次節においても他の例を示す事にする。

また(1)の右辺第2項の積分についても同じ方法を適用する事によって簡単な評価式を得る。

一様流れの中の物体の周りの流れでは(40)を利用して(9)を解けば従来の方法に比してかなり簡単に解ける事になるが解はポテンシャルで与えられるので速度を求めるには数値微分をしなければならず、その為に精度は少しそこなわれるであろう。

しかし、動揺問題では表面上の圧力(ポテンシャルに比例)を求めればよいのでその欠点はない。

そこで以下前節の終りでの試みを少し進めて見よう。充分遠方の検査面 L は円筒面としてポテンシャルは、

$$\phi(Q) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S+L+F} \left[\phi(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{1}{R} \right] dS_P, \quad \dots\dots\dots (41)$$

と書け、これを境界面上の積分方程式と考える。

まず検査面 L 上の境界条件(放射条件)

$$\left(iK + \frac{\partial}{\partial r'} \right) \phi(Q) = 0, \quad \text{on } L, \quad \dots\dots\dots (42)$$

K ; 波数

について考えて見よう。

これは面 L が面に垂直に上式に従って振動していると見る事が出来、この振動によって波は内側に反射していない筈である。(この条件は元来波が外側に進む条件である事から明らかである。)

一方(41)で Q 点が領域の外に出れば恒等的に0であるから外方に波は出ていない筈で、従って(42)は L 上で波を全部吸収する条件となっている。

これを水槽試験に対比させると大きい円筒形の水槽の壁全体に波吸収装置を装備してある事に相当する。

しかし水の波は側壁全面に消波装置をつけなくとも水面におけば充分であるからそのような性質を持つ特異性を考えて見よう。

まず単位強さの波をもつ特異性 S は充分遠方で次の漸近展開を持っている。⁶⁾

$$S(P, Q) \xrightarrow{r' \gg r} \sqrt{\frac{K}{2\pi i r'}} e^{Kz' - iKr' + iKrc \cos(\theta - \theta')}, \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\xrightarrow{r \gg r'} \sqrt{\frac{K}{2\pi i r}} e^{Kz - iKr + iKr' \cos(\theta - \theta')},$$

こゝに $P \equiv (r \cos \theta, r \sin \theta, z), Q \equiv (r' \cos \theta', r' \sin \theta', z')$

それ故、今

$$W(P, Q) = \left(iK + \frac{\partial}{\partial r} \right) S(P, Q), \quad \dots\dots\dots (44)$$

なる特異性を検査円筒面 L と水面 F の交線 Γ 上におくとすると (43) から

$$W(P, Q) \xrightarrow{r \gg r'} 0, \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$\xrightarrow{r' \gg r} iK \sqrt{\frac{K}{2\pi i r'}} e^{Kz' - iKr' + iKr \cos(\theta - \theta')} \frac{1}{\{1 + \cos(\theta - \theta')\}},$$

となって領域内に波はなくその外側にのみ発散波がある。

この全体の速度ポテンシャルは

$$\phi_W(Q) = \int_{\Gamma} A(\theta) W(P, Q) d\theta, \quad \dots\dots\dots (46)$$

で(45)によって領域内に波はないが外側では

$$\phi_W(Q) \xrightarrow{r' \gg r} iK \sqrt{\frac{K}{2\pi i r'}} e^{Kz' - iKr'} \int_{\Gamma} e^{iKr \cos(\theta - \theta')} \frac{A(\theta)}{(1 + \cos \theta - \theta')} d\theta, \quad \dots\dots (47)$$

なる波をもつ。

一方、物体の発散する波は

$$\phi(Q) \xrightarrow{r' \gg 1} \sqrt{\frac{K}{2\pi i r'}} e^{Kz' - iKr'} H(K, Q), \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$H(K, \theta') = \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) e^{Kz + iKr \cos(\theta - \theta')} dS_P, \quad \dots\dots\dots (49)$$

のように与えられるから領域の外側に波が出て行かない為には(47)と(48)から

$$H(K, \theta') = -iK \int_{\Gamma} e^{iKr \cos(\theta - \theta')} \frac{A(\theta)}{(1 + \cos \theta - \theta')} d\theta, \quad \dots\dots\dots (50)$$

となるように $A(\theta)$ を定めれば領域の外に波は残らず Γ 上の特異性で波を吸収してしまった事になる。

そこで今

$$\varphi = \phi - \phi_W, \quad \dots\dots\dots (51)$$

なるポテンシャルを考えると領域の外ではこれは波なしであるから

$$\varphi(Q) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S+F} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{1}{R} \right) dS_P + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} A(\theta) \left(iK + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{R} d\theta, \quad \dots (52)$$

なる表現を得る。こゝに右辺第2項は ϕ_W の特異性が少し水面下にあつて極限として水面にあると考へれば導びかれる。

境界条件は,

$$K \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } F \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} (\phi - \phi_W) \quad \text{on } S$$

である。

この(52)を(53)と(50)によって解けばよい訳であるが、この方法では考えて見ると Γ を遠方に持って行く事もなく逆に物体の内部に取り込んでしまった方が簡単になり、(52)の右辺第2項は不要となる。

所で φ は波なしであるから(30)におけるように波なし特異性

$$S_F(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \left(K + \frac{\partial}{\partial z'} \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right), \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$R' = \overline{PQ},$$

によって例えば次のように表わせる。

$$\varphi(Q) = \iint_S \sigma(P) S_F(P, Q) dS_P, \quad \dots\dots\dots (55)$$

この法線微分を(53)第2式によって指定すれば σ が求められ解が求まり、この場合は自由表面上の積分は不要でかつ(30)の場合に現われた斉次解はないが波なし条件(49)が必要である。

またよく知られた方法として検査面を物体の近くにあるいは垂直舷側船では物体に接した鉛直面に採るものがある。

この時、特に有限水深ならば検査面の外側の領域で固有関数系があるので便利である。¹⁹⁾

いづれにしてもこの方法では内側(検査面と物体の間)の領域では(41)の表現を用い、外側の領域では例えば上の場合のように固有関数係で表現し、最後に検査面 L 上で速度とポテンシャルが内外一致するように解を定めるものである。

なお2次元では外側の表現として

$$\phi(Q) = -2 \int_L \frac{\partial \phi}{\partial n} S(P, Q) dS_P, \quad \dots\dots\dots (56)^{17)}$$

等を使えば一層便利であろう。

5. 回転体

円筒座標を導入して $y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$ として、 x 軸に関して回転対称な物体のまわりの流れを考えよう。

まず軸対称な流れではストークスの流れ関数が存在して次のように定義される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \dots\dots\dots (57)$$

一方(1)は θ で積分して次のように書ける。

$$\phi(Q) = \int_C \left[\phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} S^*(P, Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} S^* \right] r ds_P, \quad \dots\dots\dots (58)$$

$$S^*(P, Q) = \int_0^{2\pi} S(P, Q) d\theta, \quad \dots\dots\dots (59)$$

こゝに ds は縦断面 C の線素とし、 $P \equiv (x, r, 0)$ 、 $Q \equiv (x', r', 0)$ 、 S がポテンシャルならば

$$S^*(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(x-x')^2 + \tilde{\omega}^2}} \quad \dots\dots\dots (60)$$

$$\tilde{\omega}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta, \quad \dots\dots\dots$$

で完全楕円積分となる。

S^* に対応する流れ関数 T^* を次のように定義しよう。

$$\frac{\partial}{\partial x} S^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} T^*, \quad \frac{\partial}{\partial r} S^* = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} T^*, \quad \dots\dots\dots (61)$$

これを(58)に代入すると

$$\phi(Q) = \int_C \left[\phi(P) \frac{\partial}{\partial s_P} T^*(P, Q) - r \frac{\partial \phi}{\partial n} S^*(P, Q) \right] ds_P, \quad \dots\dots\dots (62)$$

一方で $T^*(P, Q)$ は Q の変数で変えると渦輪の速度ポテンシャルとなっているからこれからさらに Q に関してストークスの流れ関数 G を次のように導入出来る。

$$\frac{\partial}{\partial x'} T^*(P, Q) = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} G(P, Q), \quad \frac{\partial}{\partial r'} T^*(P, Q) = -\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial x'} G, \quad \dots\dots\dots (63)$$

これを用いると(63)に対応する流れ関数表示は²¹⁾

$$\phi(Q) = \int_C \left[\phi(P) \frac{\partial}{\partial s_P} G(P, Q) - r \frac{\partial \phi}{\partial n} T^*(Q, P) \right] ds_P, \quad \dots\dots\dots (64)$$

従来は吹出し分布による表現(5)などと共に上式が境界積分方程式としてよく使われた³⁾が2節の所論からもわかるように(58)、(62)式、又はそれを(9)のような形で用いる事が出来る。

また、これを用いるとすると軸対称流れでなくとも一般的に

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}(P) \cos m\theta \quad \text{or} \quad \phi(P) = \varphi(P) \cos m\theta, \quad \dots\dots\dots (65)$$

となっている時(x 軸に直角な流れでは $m=1$)も取り扱えて

$$S_m(P, Q) = \int_0^{2\pi} S(P, Q) \cos m\theta \, d\theta, \quad \dots\dots\dots (66)$$

とおくと(1)は

$$\varphi(Q) = \int_C \left[\varphi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} S_m(P, Q) - \frac{\partial \varphi}{\partial n} S_m \right] r \, ds_P, \quad \dots\dots\dots (67)$$

と書いてこれを使えばよい。^{12) 13)}

この右辺の積分についても前節の初めにみたように変形しておくとも便利である。

例えば

$$I(Q) = \frac{1}{r_0^m} \iint_{\Delta S} \left(\frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) \right) r^m \cos m\theta \, r \, d\theta \, dr, \quad \dots\dots\dots (68)$$

なる積分を考えて見よう。

ϕ はこの区間で $(r/r_0)^m \cos m\theta$ となっているものとする (r_0 は区間中央の値) とグリーンンの定理より

$$I(Q) = \frac{m}{r_0^m} \cos m\theta \int_{\Delta C} r^{m-1} \frac{dr}{\partial n} S_m(P, Q) \, ds_P + \frac{1}{r_0^m} \iint_{S_F - S_A} \frac{\partial}{\partial x} S r^{m+1} \cos m\theta \, d\theta \, dr, \quad \dots\dots\dots (69)$$

右辺第2項の積分は後続円筒面 F 上の積分とする事も出来

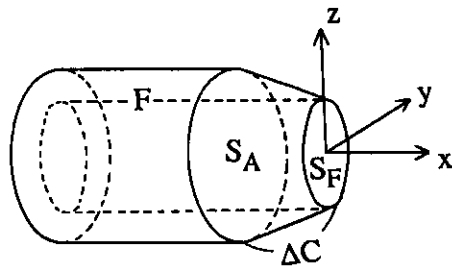
$$\iint_{S_F} \frac{\partial S}{\partial x} r^{m+1} \cos m\theta \, d\theta \, dr = \iint_F \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{m}{r} S \right) r^{m+1} \cos m\theta \, d\theta \, dx, \quad \dots\dots\dots (70)$$

この右辺第1項から留数分が出て来るので注意すべきである。

S がニュートンポテンシャルならばこれらの積分はすべて完全楕円積分で表わされるが m が大きい時は複雑になるのでむしろ(40)によって θ 方向に数値積分の方が簡単であろう。

6. 結 論

以上無限に広がったあるいは自由表面を持つ水の中の物体の周りの流れを求める為に物体および境界面に特異点をおいて積分方程式を作る方法について従来から多用されている吹出し分布法を含めて種々の表現を列挙し、利害



得失相互関連について検討し、それぞれの場合に現われる積分の評価にグリーンの定理を利用する事を提案し、また波の問題について積分方程式およびその核関数の簡略化について考察した。

結論を列挙すれば

- 1) 境界上の特異性としては吹出し吸込み分布、2重吹出し分布、サーキュレーション分布以外に直接速度ポテンシャルを未知数とする方法もあり、これはいくつかの点で吹出し分布よりはすぐれている。
- 2) 上記各種方法による解の特異点分布の間には比較的簡単な関係があり、相互に換算可能である。
- 3) 積分方程式に現われる特異積分の評価にはグリーンの定理を使って便利な面積分（3次元の場合）に変換する事が推奨される。
- 4) 速度ポテンシャル又は2重吹出しを未知数としてここに提唱する方法では回転体の軸方向に垂直な流れでも軸対称流れと略々同じ位単純化される。
- 5) 波の放射散乱問題では核関数が複雑になるのでそれを簡略化出来ると計算時間が短縮されると考えられる。
- 6) その方法には2つあって1つは物体と検査面との間の領域でニュートンポテンシャルで表現するもので、もう1つは物体と同じ波を吸収する特異性を仮想してその差が波無しポテンシャルとなる事からそれを物体上の波無し特異点分布で表現する方法である。

参考文献

- 1) 日本造船学会編「第2回耐航性シンポジウム」第1篇、昭和52年2月
- 2) Brebbia, C. A. "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, Plymouth, 1978
- 3) 広瀬直喜「計算空気力学の展望」日本航空宇宙学会誌28巻318号、昭和55年
- 4) 別所、経塚「水の波の理論における内部問題について」西部造船会会報57号、昭和57年3月
- 5) Motoshima, H. "Radiation and Diffraction of Shallow Water Waves by an Arbitrary Number of Bodies", 日本造船学会論文集147号、昭和55年
- 6) Bessho, M. "On Boundary Value Problems of an Oscillating Body Floating on Water", Mem. of Defense Academy, Japan vol. 8, 1968
- 7) 前田久明「任意船型に及ぼす波の強制力について」日本造船学会論文集126号、昭和44年
- 8) 別所、小松「水面で動揺する2次元平板に働く流体力について」関西造船学会誌154号、昭和49年9月
- 9) Bessho, M. "A Contribution to the Theory of Free Surface Flow", Mem. of Defense Academy, Japan, vol. 10, No.3, 1970
- 10) Dawson, C. W. "A Practical Computer Method for Solving Ship-Wave Problems", 2nd Internat. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, 1977

- 11) Yeung, R. W. & Bouger, Y. C. "Hybrid Integral Equation Method for Steady Ship-Wave Problem"; Do.
- 12) 佐尾邦久「軸対称物体の左右揺れにおける横揺れについて」日本造船学会論文集140号, 昭和51年
- 13) Kyojuka, Y. & Yoshida, K. "On Wave-Free Floating Body Forms in Heaving Oscillation", Applied Ocean Research, to be published, 1980
- 14) 経塚雄策「2次元物体に働く非線型流体力について 第1報散乱問題」日本造船学会, 昭和55年秋期講演会講演予定
- 15) Ursell, F. "On the Heaving Motion of a Circular Cylinder on the Surface of a Fluid", Q. J. M. A. M. vol. 2, 1949
- 16) Ursell, F. "Water Waves Generated by Oscillating Body", Q. J. M. A. M. vol. 7, 1954
- 17) Havelock, T. H. "Forced Surface Waves on Water", Phil. Mag. S. 7. vol. 8, 1929
- 18) 水野俊明「半没柱状体の左右揺れおよび横揺れについて」日本造船学会論文集127号, 昭和45年
- 19) 井島, 田淵, 湯村「有限水深の波による円柱状浮体の運動」土木学会論文集206号, 1972
- 20) 森正武訳 Forsythe 他「計算機のための数値計算法」科学技術出版社 1978
- 21) 別所, 水野「ダクト付プロペラの推力減少について」(第1報) 関西造船学会会誌163号 昭和51年

翼理論に関する覚書

別所正利*

A Short Note on Aerofoil Theory — Lagrangean and Arbitrality of Solution —

Masatoshi Bessho

内容目次

概要

1. 相反定理とラグランジアン
2. 速度ポテンシャルと漸近展開
3. 解の任意性

結論

参考文献

概要

水の波の理論は先行した翼理論に多くのものを負っている事は周知の通りであり、今尚我々が新しい問題に取り組む時に殆ど唯一の範例である。

しかしながら船には船特有の事情があって飛行機の翼理論をそのまま適用するのは必ずしも適当でない場合がある。

本文はそのような過程でこの数年の間に著者が気付いた事を記して見たものである。

先ず1節では翼理論における相反定理について従来使われているFlaxの変分原理に基づくもの以外に花岡が造波抵抗理論について導出した第2定理を紹介し、その汎関数は運動ポテンシャル又はラグランジアンである事を説明する。

次に2節では造波理論的な記述で翼理論を表現し、3節では境界値問題の積分方程式を少し変形してその任意性について考察する。

1. 相反定理とラグランジアン

Flaxの変分原理は次の相反定理(Munk's)から導かれる。

$$\iint_F p_1 \tilde{w}_2 dF = \iint_F \tilde{p}_2 w_1 dF, \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 1)^{4)}$$

ここに F は翼面、 dF はその面素、 (p_1, w_1) 、 $(\tilde{p}_2, \tilde{w}_2)$ は夫々圧力と z -方向速度で(\sim)印は逆流れの量である事を示す。

花岡は造波理論において上式に対応するものを第1定理と称し、もう一つ次の第2定理を導出している。³⁾

$$\iint_F \Delta \phi_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial z} dF = \iint_F \Delta \tilde{\phi}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} dF, \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 2)$$

こゝに ϕ_i は速度ポテンシャルで $\Delta \phi$ は F の上下の差を意味する。

これは F が薄翼でない時は次のようになる。

$$\iint_S \phi_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial n} dS = \iint_S \tilde{\phi}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS, \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 3)$$

こゝに n は面 S の法線とする。

一方 (1・1) は薄翼でなければ成立せず、³⁾ またクッタの条件を満たす流れでなければならない。

しかし (1・2), (1・3) ではその必要がないので一般性がある。

さて薄翼理論では更に

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial z} dx = \zeta(x, y, z), \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 4)$$

なる量、つまり流体粒子の z 方向変位を導入すると (1・2) は次のように書ける。

$$\iint_F p_1 \tilde{\zeta}_2 dF = \iint_F \tilde{p}_2 \zeta_1 dF, \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 5)$$

これは Munk の定理と同様に有用である。⁸⁾

しかし (1・1) は誘導抵抗を意味するのに対して (1・2), (1・3) 又は (1・5) は物理的意味が判然としない。

一方造波理論では (1・3) はラグランジアン、つまり運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差である事がわかっている⁹⁾ ので翼理論でもそうになっていると考えられるが、この場合のポテンシャルエネルギーとは何であろうか。

さてこの点を考える前に (1・2) の形で次の積分を考えよう。

$$L = \frac{\rho}{2} \iint_F \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dF, \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 6)$$

翼面 F とその後方にそれに連続して Trefftz 面下を考え又充分大きい F , T を包む球面 R との間に包まれた領域を D とするとグリーンの定理により

$$L = \frac{\rho}{2} \iiint_D (\nabla \phi)^2 dx dy dz - \frac{\rho}{2} \iint_T \nabla \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dF + \frac{\rho}{2} \iint_R \phi \frac{\partial \phi}{\partial R} dS$$

となるが次節 (2・6), (2・7) により右辺第3項の積分は0となるので結局

$$L = \frac{\rho}{2} \iiint_D (\nabla\phi)^2 dx dy dz - \frac{\rho}{2} \iint_T \Delta\phi \frac{\partial\phi}{\partial z} dF, \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

右辺第1項は明らかに運動エネルギーであり、第2項はTrefftz面の運動エネルギーを流れ方向に積分したものであり両者共無限大となるがその差は有限となっている。

これは又圧力を積分しても同じ形になりラグランジアンである事が古くから示されている。¹⁾

従って(1.7)右辺第2項はポテンシャルエネルギーに対応している事になるがこの辺を理解する為に2次元で考えて見よう。

今原点に Γ のサーキュレーションをおき、それから x 離れた所に強さは同じで向きが反対の渦をおくと相互引力 F は

$$F = \frac{\rho\Gamma^2}{2\pi x}, \quad \dots\dots\dots (1.8)$$

相互距離 a なる点から一方の渦を R なる距離まで準静的に引きはなすに必要な仕事 U は

$$U = \int_a^R F dx = \frac{\rho\Gamma^2}{2\pi} \log\left(\frac{R}{a}\right), \quad \dots\dots\dots (1.9)$$

これは定義からポテンシャル・エネルギーである。

一方 R が充分大きい時の一つの渦による運動エネルギーは $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \frac{\rho}{2} \iint_D (\nabla\phi)^2 dx dy = \frac{\rho}{2} \int_R \phi \frac{\partial\phi}{\partial r} ds - \frac{\rho}{2} \int_\epsilon \phi \frac{\partial\phi}{\partial r} ds \\ &\quad - \frac{\rho}{2} \int_T \Delta\phi \frac{\partial\phi}{r d\theta} dr, \end{aligned}$$

こゝに R は充分大きい円、 ϵ は原点周りの小さい円、 T は適当なcutとする。

明らかに右辺第1, 2項は0となるから2つの渦の運動エネルギーは

$$T = \frac{\rho\Gamma^2}{2\pi} \log\left(\frac{R}{a}\right), \quad \dots\dots\dots (1.10)$$

それ故、この場合は

$$T - U = 0, \quad \dots\dots\dots (1.11)$$

一般には有限となって(1.3)の形になる。

また、この誘導の過程から考えると吹出しが存在する場合も同様で最初有限な所に吸込みを考えそれを準静的に無限遠方まで持って行く仕事が位置エネルギーである。

2. 速度ポテンシャルと漸近展開

この節では普通に知られている Trefftz 面, つまり充分後流側の速度ポテンシャルの近似値と共に充分上流側の値の近似値を求める。

さて速度ポテンシャルは²⁾

$$\phi(x, y, z) = \iint_F p(x', y') S(x-x', y-y', z) dF(x', y'), \dots (2.1)$$

こゝに p は圧力分布を ρU^2 で割ったものとし以下速度は単位と考える。

$$S(x, y, z) = \frac{z}{2\pi\rho^2} \left(\frac{x}{r} - 1 \right) = \frac{z}{2\pi r(r+x)}, \dots (2.2)$$

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

充分遠方では

$$S(x-x', y-y', z) \rightarrow S(x, y-y', z) + x' \frac{\partial}{\partial x} S(x, y-y', z) + \dots (2.3)$$

のようになるので第1項のみとると上流側では

$$S(x, y, z) = \frac{z}{2\pi r(r+x)} \xrightarrow{x \gg 1} \frac{z}{4\pi r^2} \text{ or } \frac{z}{4\pi x^2}, \dots (2.4)$$

下流側では

$$S(x, y, z) = -\frac{z}{2\pi\rho^2} \left(1 + \frac{|x|}{r} \right) \xrightarrow{x \gg -1} -\frac{z}{\pi\rho^2} - \frac{z}{4\pi x^2}, \dots (2.5)$$

それ故, (2.4), (2.5) を (2.1) に代入して

$$\phi(x, y, z) \xrightarrow{x \gg 1} \frac{z}{4\pi x^2} \iint_F p dF + \dots \dots (2.6)$$

$$\phi(x, y, z) \xrightarrow{x \gg -1} -\frac{z}{\pi} \iint_F \frac{p(x', y') dF}{z^2 + (y-y')^2} - \frac{z}{4\pi x^2} \iint_F p dF + \dots \dots (2.7)$$

言うまでもなく (2.7) 右辺第1項は Trefftz plane の速度ポテンシャルで第2項は (2.6), つまり上流値の値と符号が逆になっており, これは揚力に比例する。

また, これらの式は $r \doteq x$ と仮定したがそうでない時は (2.2), (2.4) からもっと正確に見積る事が出来る事は自明だろう。

3. 解の任意性

よく知られているように境界条件は次の積分方程式となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = w(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{p(x', y')}{(y-y')^2} \left(\frac{x-x'}{R} - 1 \right) dx' dy' , \quad \dots (3 \cdot 1)$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

この解は翼後端においてクッタの条件を満たす時に一意的に定まると考えられている。

しかし本来渦のある流れは粘性を考えない限り不定であって数学的には決められず物理的に最ももっともらしい数学模型があるだけである。

又実際例えば矩形翼などで後端でKuttaの条件を満たすのは当然として翼端はどうなるのか、あるいはどうなっているのかは一つの疑問である。

その辺を考えるために上式を少し変形して解の任意性がどれ位あるかを調べて見よう。

その為に上式を x で微分したものを考えよう。

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_F \frac{p dF}{r} , \quad \dots (3 \cdot 2)$$

ϕ はラプラシアンを満たすから次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x, y, 0) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{p}{R} dx' dy' , \quad \dots (3 \cdot 3)$$

あらためて

$$\frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{p}{R} dF = f(x, y) , \quad \dots (3 \cdot 4)$$

として f を未知関数とすると (3・3) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = - \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, 0) , \quad \dots (3 \cdot 5)$$

となってポアソンの微分方程式となる。

それ故、解は特解 $a(x, y)$ と任意の調和関数 $h(x, y)$ となる。

$$f(x, y) = a(x, y) + h(x, y) , \quad \dots (3 \cdot 6)$$

これを (3・4) の右辺に代入すると準特異核を持つ積分方程式となり教科書によれば解 p は一意的に定まる。

従って解の任意性は (3・6) の調和関数に依存し、それは F 内で級数展開すると考えると可附番無限個だけある。

さてもう少し具体的に境界条件を考えよう。簡単のために

$$w(x, y, 0) = \alpha + \beta x, \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 7)$$

とおくと視察によって特解 α を

$$\alpha(x, y) = \alpha x + \frac{\beta}{2} x^2, \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 8)$$

と置いておこう。右辺第1項は調和関数で(3・5)からは決まらないけれどもこうおいても不都合はないだろう。これに対する(3・4)の解は αx に対しては p は前後対称(以下 F は前後対称翼とする), $\frac{\beta}{2} x^2$ に対しては前後対称となりこれらは共に渦なし流れであると考えられ当然前後端で無限大となっているであろう。

それ故クッタの条件を満たす為には(3・6)の調和関数に対応する p の解を利用せざるを得ない。つまり具体的に後縁の N ヶの点でクッタの条件を満たすには N ヶの解が必要である。それではこの解を一杯用意して前縁でも流入条件を満たす(Shock-free)事が出来るかと言うと対称翼で考えればわかるようにそれは $\alpha = 0$ の場合しかないだろう。

以上の考察から少くとも対称翼では後縁全体でクッタの条件を満たす事が出来ると考えられる。従って最初に考えた矩形翼では翼端についても少くとも後半部についてはクッタの条件を指定してよいと考えられる。

さて最後に積分方程式(3・4)は(3・1)に比して特異性が弱いので数値計算上都合がよいと考えられまた、一方近似理論を作るにも都合が良いと考えられる。

今、例として細長翼理論をとりあげよう。まず翼幅方向に楕円分布を仮定すれば

$$p(x, y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\eta^2(x) - y^2} \ell(x) / \eta^2(x), \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 9)$$

(3・4)の左辺は

$$\frac{1}{\pi^2} \int \frac{\ell(x') dx'}{\eta^2(x')} \int_{-\eta(x')}^{\eta(x')} \frac{\sqrt{\eta^2 - y'^2} dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \alpha + h, \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 10)$$

y' に関する積分は $y=0$ とおくと完全楕円積分となり、 $x=x'$ で対数的特異性を有しその見積りについては1案を示した事がある。¹⁰⁾

(3・4)の右辺の任意関数 $h(x, y)$ は左右対称だが

$$h(x, y) = 1, x, x^2 - y^2, \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 11)$$

であって、 $y=0$ の所では x の巾級数としてよい。しかもそれは任意でよいので解は決まらなくなる。これに(3・9)のように圧力分布を仮定し、しかも中心線上でのみ境界条件を指定した所為此の場合は(3・11)の第2項までとるべきである。

つまり y 方向の揚力分布形に応じて(3・11)の項数を増やしておけばよい事になる。

結 論

以上薄翼理論においても花岡の第2相反定理は有用であり得る, 特にクッタの条件を満たさないものにも適用出来る点で, その積分はラグランジアンである事を示し次に遠場特に上流側の漸近展開を求め, 最後に境界積分方程式を変形して解の任意性を陽にあらわし, クッタの条件の指定範囲について考察した。

参考文献

- 1) R. Hargreaves, "A Pressure Integral as Kinetic Potential", *Phil. Mag.*, 1922, pp.436-445
- 2) H. Ashley & M. Landahl, "Aerodynamics of Wings & Bodies", Addison-Weseley, 1965
- 3) T. Hanaoka, "On Reverse Flow Theorem Concerning Wave-Making Theory", *Proc. 9-th Japan Nat. Congress for Appl. Mecha.*, 1959
- 4) D. B. Davies, "An Application of Flax's Variational Principle to Lifting-Surface Theory", *R. & M.*, No.3564, Apr. 1967
- 5) H. R. Lawrence, "The Lift Distribution on Low Aspect Ratio Wings at Subsonic Speeds", *J. of Aero. Sci.*, Oct., 1951
- 6) E. O. Tuck, "Some Method for Flows past Blunt Slender Bodies". *J. F. M.*, vol.18, 1964
- 7) F. Ursell and G. N. Ward, "On some general theory in linearized theory of compressible flow", *Q. J. M. A. M.*, vol.3, 1950
- 8) M. Bessho & K. Nomura, "A Contribution to the Theory of Two-dimensional Hydro-planing", *Mem. Def. Acad.* vol. 10, 1970
- 9) M. Bessho, "Variational Approaches to Study Ship Wave Problem", 8-th *Sym. on Naval Hydro.*, 1970
- 10) 別所正利 "細長翼細長体理論に関する覚書" 水槽委員会第2部会資料 昭和50年6月27日

「自由表現をもつ一様半無限領域における 2次元弾性波の放射散乱について」

別所 正 利

目 次 内 容

<p>概 要</p> <p>1. 場の方程式と境界条件</p> <p>2. 縦波, 横波の表現と変位</p> <p>3. 境界積分方程式について</p> <p>4. 遠場の表現</p> <p>5. イмпीडダンス, 相反定理, ハスキントの関係</p>	<p>6. 放射動力, ダムピング</p> <p>7. 物体の振動, 吸収動力, 伝達動力</p> <p>8. 計算例</p> <p>附録A L, M, N, D関数</p> <p>附録B レーリー波の放射動力</p> <p>附録C コッチン関数</p> <p>附録D 一様梁のイмпीडダンス</p>
--	--

1. 場の方程式と境界条件

現象はすべて周期的である場合を考える事とし, そのすべての量は時間因子 $e^{i\omega t}$ を省略して複素表示するものとする。(ω は円周波数)

u_1, u_2 を夫々 x, y 方向の変位とすると, その方程式は Δ をラプラシアンとして

$$(\Delta + k^2) u_i + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 1)$$

ここに
$$\tau = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 2)$$

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y$$

また

$$k^2 = \rho \frac{\omega^2}{G}, \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 3)$$

ρ は密度, G は剛性率, ν はポアソン比とする。

なお平面応力問題と考えると ν は上述のようにポアソン比であるが, z -方向に無限に拡がっている2次元問題と考えるならば平面歪問題と考えられ, その時のポアソン比 σ と ν との関係はよく知られているように

$$\nu = \frac{\sigma}{1-\sigma}, \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 4)$$

さて回転 ω (円周波数と混同しない事)

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} , \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 5)$$

を導入すれば(1・1)に代入して

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + K^2) r &= 0 \\ (\Delta + k^2) \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 6)$$

$$K^2 = \frac{1 - \nu}{2} k^2 , \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 7)$$

となって共にヘルムホルツの方程式を満たし、この解はよく知られている。

そこで r と ω がわかっているとすると変位は(1・1)、(1・2)、(1・5)から

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} , \\ u_2 &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial x} , \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 8)$$

また応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1 - \nu} r \right) , \\ \sigma_y &= 2G \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\nu}{1 - \nu} r \right) , \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) , \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 9)$$

で与えられるから境界 C に沿って働く力の x 、 y 成分 t_1 、 t_2 は、

$$\frac{t_1}{G} \equiv \tau_1 = \frac{1}{G} \left(\sigma_x \frac{\partial y}{\partial s} - \tau_{xy} \frac{\partial x}{\partial s} \right) = -2 \frac{\partial u_2}{\partial s} - \omega \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{2r}{1 - \nu} \frac{\partial x}{\partial n} , \quad \dots\dots (1 \cdot 10)$$

$$\frac{t_2}{G} \equiv \tau_2 = \frac{1}{G} \left(\tau_{xy} \frac{\partial y}{\partial s} - \sigma_y \frac{\partial x}{\partial s} \right) = 2 \frac{\partial u_1}{\partial s} + \omega \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{2r}{1 - \nu} \frac{\partial y}{\partial n} ,$$

座標系は右図の x 軸が自由表面に一致するようにとるものとする。
特に自由表面の条件は上式から

$$2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \omega = 0,$$

$$-2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{2}{1-\nu} r = 0,$$

となるから (1・2), (1・5) を代入すれば変位に対しては

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0,$$

$$\nu \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \dots\dots\dots (1 \cdot 11)$$

r と ω に対しては (1・8) を代入して

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} + \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \omega &= 0 \\ -\frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{k^2}{K^2} r &= 0 \end{aligned} \right\} \text{for } y=0, \dots\dots\dots (1 \cdot 12)$$

境界値問題は次の3種類が考えられる。

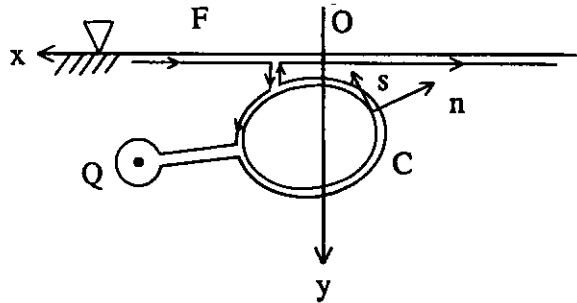
- i) 放射問題 C が与えられたモードで振動して波を放射する問題で C 上の変位が与えられる。
- ii) 散乱問題 与えられた入射波に対して C が波を散乱する場合であるが、今の場合まず入射波に問題がある。

と言うのは無限領域では入射波として平面波を考えればよいが、自由表面がある場合は充分遠方まで伝播する平面波はレーリー波のみである。

しかし実用上の問題を考えると、縦波、横波も考えに入れるべきだと考えられ、それを考慮するためには震源を物体から有限の距離におかねばならない。

しかし震源の局部的攪乱を考えたのでは問題が複雑になりすぎるし、またそれ自身よくわからないので以下ではそのような局部的攪乱は考えている物体まで届かないで波だけが届くものとする。これは震源が極く近くになれば充分許されるであろう。

次に C 上の境界条件は変位が0とする。実際には C が振動する訳であるが、その振動によって波を放射するのであるから、その分は i) の放射問題として取扱う。



C の振動変位はこのような散乱問題から得られる C 上の強制力，放射問題から得られる抗力と C の内部の力学的性質によってきまる反力とを等置してつまり運動方程式を解いて始めて求められる。

- ii) 空孔問題 C の内部が空孔である時は上述の場合の特殊な極限で C の内部からの反力はないから，波による強制力と放射による抗力を等置すればよい。つまり C 上で力が 0 となるようにすればよいけれども，この場合は普通行われるように最初からその条件で境界値問題を解けば簡単であるのは言う迄もあるまい。

2. 縦波，横波の表現と変位

r, ω はヘルムホルツ方程式の解であるから附録 A のような関数を導入し， $Q \equiv (x', y')$ 点を図 1 のように C と自由表面 F で囲まれた領域 D 内の点としてグリーンの定理を適用すればよく知られているように次のような表現が出来る。

$$r(Q) = \int_C \left[r(P) \frac{\partial}{\partial n} L(P, Q) - \frac{\partial r}{\partial n_P} L(P, Q) \right] ds_P + \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(P) \frac{\partial L(P, Q)}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} L(P, Q) \right]_{y=0} (-dx) , \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 1)$$

$$\omega(Q) = \int_C \left[\omega \frac{\partial M(P, Q)}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} M(P, Q) \right] ds_P + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\omega \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial n} M(P, Q) \right]_{y=0} dx , \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 2)$$

F 上では，(1・12)，(A・3) の関係があるのでこれを代入し部分積分すると (2・1) 右辺第 2 項では，

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(r \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} L \right) dx = - \left(\frac{K}{k} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\omega \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} N \right] dx .$$

となるが N は領域内で正則であるから，これを C 上の積分に変更すれば 線の方向に留意して

$$r(Q) = \int_C \left[r \frac{\partial}{\partial n} L(P, Q) - \frac{\partial r}{\partial n} L(P, Q) \right] ds(P) + \left(\frac{K}{k} \right)^4 \int_C \left[\omega(P) \frac{\partial}{\partial n} N(P, Q) - \frac{\partial \omega}{\partial n} N(P, Q) \right] ds(P) , \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 3)$$

又同様にして

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} M(P, Q) - \frac{\partial \omega}{\partial n} M(P, Q) \right] ds(P) \\ & + \left(\frac{k}{K} \right)^2 \int_C \left[r(P) \frac{\partial}{\partial n} O(P, Q) - \frac{\partial r}{\partial n} O(P, Q) \right] ds, \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 4) \end{aligned}$$

あるいは (A・13) の関係を使えば,

$$\begin{aligned} r(Q) = & \int_C \left[r \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial r}{\partial n} \right] L(P, Q) ds_P \\ & + \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right] O(Q, P) ds_P, \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 3') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right] M(P, Q) ds_P \\ & + \int_C \left[r \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial r}{\partial n} \right] N(Q, P) ds_P, \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 4') \end{aligned}$$

となる。

(1・2), (1・5), (1・8) を使って上の表現を u_1, u_2, τ_1, τ_2 の C 上値で表わす事を考える。

上式にそれらを代入し部分積分すると, 例えば

$$\begin{aligned} & \int_C \left(r \frac{\partial L}{\partial n} - \frac{\partial r}{\partial n} L \right) ds \\ = & \frac{K^2}{k^2} \int_C \left[\tau_1 \frac{\partial L}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial L}{\partial y} + u_1 \left(2 \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial y} + k^2 L \frac{\partial x}{\partial n} \right) \right. \\ & \left. + u_2 \left(-2 \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial x} + k^2 L \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right] ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_C \left(\omega \frac{\partial M}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} M \right) ds \\ = & \int_C \left[-\tau_1 \frac{\partial M}{\partial y} + \tau_2 \frac{\partial M}{\partial x} + u_1 \left(2 \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial x} - k^2 M \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right. \end{aligned}$$

$$+ u_2 \left(2 \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial y} + k^2 M \frac{\partial x}{\partial n} \right)] ds ,$$

となるので,

$$\begin{aligned} r(Q) = & \frac{K^2}{k^2} \int_C \left[\tau_1 \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) + \tau_2 \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial x} \right) \right. \\ & + u_1 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial x} \right) + k^2 \left(L \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{K^2}{k^2} N \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right\} \\ & \left. + u_2 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) + k^2 \left(L \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{K^2}{k^2} N \frac{\partial x}{\partial n} \right) \right\} \right] ds , \end{aligned}$$

..... (2.5)

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \int_C \left[\tau_1 \left(-\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} \right) + \tau_2 \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y} \right) \right. \\ & + u_1 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y} \right) - k^2 \left(M \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} O \frac{\partial x}{\partial n} \right) \right\} \\ & \left. + u_2 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} \right) + k^2 \left(M \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} O \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right\} \right] ds , \end{aligned}$$

..... (2.6)

これを(1.8)に代入すると変位の表現を得る。

それを

$$\begin{aligned} u_j(Q) = & \int_C \left[u_1 \tau_{1j}(P, Q) + u_2 \tau_{2j}(P, Q) \right. \\ & \left. - \tau_1(P) u_{1j}(P, Q) - \tau_2 u_{2j}(P, Q) \right] ds(P) , \end{aligned}$$

..... (2.7)

と書く事にすると

$$u_{11}(P, Q) = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} \right)$$

$$u_{12}(P, Q) = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) - \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} \right)$$

$$u_{21}(P, Q) = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial x} \right) - \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y} \right)$$

$$u_{22}(P, Q) = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial x} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y} \right) \quad ,$$

..... (2·8)

$$\tau_{11}(P, Q) = -\frac{1}{k^2} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial x'} \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial x} \right) + k^2 \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial N}{\partial x'} \right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{k^2} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial y'} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y} \right) - k^2 \left(\frac{\partial M}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y'} \frac{\partial x}{\partial n} \right) \right\} \quad ,$$

$$\tau_{12}(P, Q) = -\frac{1}{k^2} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial y'} \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial x} \right) + k^2 \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right\}$$

$$- \frac{1}{k^2} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial x'} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y} \right) - k^2 \left(\frac{\partial M}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial n} \right) \right\} \quad ,$$

$$\tau_{21}(P, Q) = -\frac{1}{k^2} \left\{ -2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial x'} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) + k^2 \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial n} \right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{k^2} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial y'} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} \right) + k^2 \left(\frac{\partial M}{\partial y'} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right\} \quad ,$$

$$\tau_{22}(P, Q) = -\frac{1}{k^2} \left\{ -2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial y'} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) + k^2 \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y'} \frac{\partial x}{\partial n} \right) \right\}$$

$$- \frac{1}{k^2} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial x'} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} \right) + k^2 \left(\frac{\partial M}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right\} \quad ,$$

..... (2·9)

P 点が F 上にあれば

$$\tau_{ij}(P, Q) \Big|_{y=0} = 0 \quad , \quad \text{..... (2·10)}$$

また (1·11) の条件を満たす関係がある。

$$P \text{ on } F \quad (y=0)$$

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} (L_y + \frac{K^2}{k^2} N_x) + \frac{K^2}{k^2} N_{x'} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} (M_x + \frac{k^2}{K^2} O_y) - M_{y'} \\ &= \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \frac{2}{k^2} L_{xy} + \frac{2K^2}{k^2} N_{xx} + \frac{K^2}{k^2} N \right\} - \frac{\partial}{\partial y'} \left\{ \frac{2}{k^2} M_{xx} + M + \frac{2}{K^2} O_{xy} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= + \frac{1}{k^2} \left\{ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} (L_y + \frac{K^2}{k^2} N_x) + K^2 N_{y'} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{k^2} \left\{ + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} (M_x + \frac{k^2}{K^2} O_y) + k^2 M_{x'} \right\} \\ &= \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left\{ L_{xy} + \frac{K^2}{k^2} N_{xx} + \frac{K^2}{2} N \right\} + \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \frac{k^2}{K^2} O_{xy} + M_{xx} + \frac{k^2}{2} M \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\tau_{21} = - \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ L_{xx} - \frac{K^2}{k^2} N_{xy} + \frac{k^2}{2} L \right\} + \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left\{ -M_{xy} + \frac{k^2}{K^2} O_{xx} + \frac{k^4}{2K^2} O \right\} = 0$$

$$\tau_{22} = - \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left\{ L_{xx} - \frac{K^2}{k^2} N_{xy} + \frac{k^2}{2} L \right\} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ -M_{xy} + \frac{k^2}{K^2} O_{xx} + \frac{k^4}{2K^2} O \right\} = 0 .$$

$$\left. \begin{aligned} u_{ij} &= u_{ij}^{(0)} + u'_{ij} \\ \tau_{ij} &= \tau_{ij}^{(0)} + \tau'_{ij} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 11)$$

とにおいて肩符(0)のついたものを無限領域の値とする。

即ち

$$\left. \begin{aligned} u_{11}^{(0)} &= \frac{-i}{4k^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(KR) \right] , \\ u_{12}^{(0)} = u_{21}^{(0)} &= \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR) \right] , \\ u_{22}^{(0)} &= - \frac{i}{4k^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(2)}(KR) \right] , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{11}^{(0)} &= \frac{i}{4} \left\{ \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \right\} \\ &\quad - \frac{i}{2k^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] , \\ \tau_{12}^{(0)} &= -\frac{i}{4} \left\{ \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \right\} \\ &\quad - \frac{i}{2k^2} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(KR) \right\} , \end{aligned}$$

..... (2.13)

$$\begin{aligned} \tau_{21}^{(0)} &= \frac{i}{4} \left\{ + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right\} \\ &\quad + \frac{i}{2k^2} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(2)}(KR) \right\} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{22}^{(0)} &= \frac{i}{4} \left\{ \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] , \end{aligned}$$

3. 境界積分方程式について

境界値問題を解くには境界上で(2.7)を積分方程式と見立て、解けばよい。

しかし、その為には(2.8)、(2.9)の8つの核関数の計算が必要である。

これを簡略化するにはCの内部で正則な $u_j^{(in)}$, $\tau_j^{(in)}$ を考えて、

$$\sum_i \int_C (u_i^{(in)} \tau_{ij} - \tau_i^{(in)} u_{ij}) ds = 0 , \quad \text{..... (3.1)}$$

となるから、例えば

$$\left. \begin{aligned} \tau_j^{(in)} + \tau_j &= 0 \quad \text{on } C , \\ u_j^{(in)} + u_j &= U_j \quad \text{on } C , \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (3.2)}$$

とすると

$$u_j(Q) = \sum_i \int_C U_i \tau_{ij}(P, Q) ds_P, \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 3)$$

又,

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(in)} + u_j &= 0 \\ \tau_j^{(in)} + \tau_j &= T_j \end{aligned} \right\} \text{ on } C, \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 4)$$

とすると

$$u_j(Q) = - \sum_i \int T_i u_{ij}(P, Q) ds_P, \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 5)$$

(3・3)を利用する時は、 C 上では始めから(3・2)によって τ_j が与えられているから、(3・3)から u_j がわかれば C 上の τ と u がわかる事になる。

なお、B. I. E.としては(3・3)に(3・2)を代入して、

$$U_j(Q) - u_j^{(in)}(Q) = \sum_i \int_C U_i \tau_{ij}(P, Q) ds(P), \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 6)$$

として計算する。

一方(3・5)による時は、 T_j が求まっても τ_j は未だわからないから(3・5)に(1・10)の演算をして τ_j を求めなければならない。

今、それを求めて見よう。

$$\left. \begin{aligned} \tau_j(P, Q) &= \frac{\partial u_{j1}}{\partial x'} + \frac{\partial u_{j2}}{\partial y'} \\ \omega_j(P, Q) &= \frac{\partial u_{j2}}{\partial x'} - \frac{\partial u_{j1}}{\partial y'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 7)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau'_{j_1} &= -\omega_j \frac{\partial y'}{\partial n'} + \frac{k^2}{K^2} \tau_j \frac{\partial x'}{\partial n'} - 2 \frac{\partial u_{j2}}{\partial s'} \\ \tau'_{j_2} &= \omega_j \frac{\partial x'}{\partial n'} + \frac{2}{K^2} \tau_j \frac{\partial y'}{\partial n'} + 2 \frac{\partial u_{j1}}{\partial s'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 8)$$

(2・8)からまず、

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{K^2}{k^2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\ \tau_2 &= -\frac{K^2}{k^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 9)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} , \\ \omega_2 &= - \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y} \right) , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 10)$$

これは (2・5), (2・6) に一致する。

$$\begin{aligned} \tau_{11}' &= -\omega_1 \frac{\partial y'}{\partial n'} + \frac{k^2}{K^2} r_1 \frac{\partial x'}{\partial n'} - 2 \frac{\partial u_{12}}{\partial s'} \\ &= -\frac{\partial y'}{\partial n'} \left(M_y - \frac{k^2}{K^2} O_x \right) - \frac{\partial x'}{\partial n'} \left(L_x - \frac{K^2}{k^2} N_y \right) \\ &\quad - \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{\partial}{\partial y'} \left(L_x - \frac{K^2}{k^2} N_y \right) - \frac{\partial}{\partial x'} \left(M_y - \frac{k^2}{K^2} O_x \right) \right] \\ \tau_{12}' &= \frac{\partial x'}{\partial n'} \left(M_y - \frac{k^2}{K^2} O_x \right) - \frac{2}{k^2} \frac{\partial y'}{\partial n'} \left(L_x - \frac{K^2}{k^2} N_y \right) \\ &\quad + \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(L_x - \frac{K^2}{k^2} N_y \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(M_y - \frac{k^2}{K^2} O_x \right) \right] \dots (3 \cdot 11) \\ \tau_{21}' &= \frac{\partial y'}{\partial n'} \left(M_x + \frac{k^2}{K^2} O_y \right) - \frac{\partial x'}{\partial n'} \left(L_y + \frac{K^2}{k^2} N_x \right) \\ &\quad - \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{\partial}{\partial y'} \left(L_y + \frac{K^2}{k^2} N_x \right) + \frac{\partial}{\partial x'} \left(M_x + \frac{k^2}{K^2} O_y \right) \right] \\ \tau_{22}' &= -\frac{\partial x'}{\partial n'} \left(M_x + \frac{k^2}{K^2} O_y \right) - \frac{2}{k^2} \left(L_y + \frac{K^2}{k^2} N_x \right) \\ &\quad + \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(L_y + \frac{K^2}{k^2} N_x \right) - \frac{\partial}{\partial y'} \left(M_x + \frac{k^2}{K^2} O_y \right) \right] \end{aligned}$$

結局

$$\tau_{ij}'(P, Q) = \tau_{ij}(Q, P) , \dots\dots\dots (3 \cdot 12)$$

となるので、この場合は始めから (2・7) を解くのと手間は変わらない事になる。

しかし、特に C が自由表面の一部である時は (2・10) によって

$$u_j(Q) = - \sum_i^1 \int_{-1}^1 \tau_i u_{ij}(x, Q) dx, \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 13)$$

となり、これを与えられた u_j について解いて直接 τ_j が求められる。

次頁以下にその積分表示を示す。

$$u_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos p(x-x') dp \left[\frac{p^2}{k^2} \left\{ - \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-K^2}} + e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')} \right\} \right. \\ \left. - \frac{K^2}{k^4} p \sqrt{p^2-k^2} e^{-\sqrt{p^2-K^2}y' - \sqrt{p^2-k^2}y} \right. \\ \left. + \frac{p^2-k^2}{k^2} \left\{ \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')} \right\} \right. \\ \left. + \frac{p}{K^2} \sqrt{p^2-k^2} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y' - \sqrt{p^2-K^2}y} \right].$$

$$u_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sin p(x-x') dp \left[\frac{p}{k^2} \sqrt{p^2-K^2} \left\{ - \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-K^2}} + e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')} \right\} \right. \\ \left. + \frac{p}{k^2} \sqrt{p^2-k^2} \left\{ \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')} \right\} \right. \\ \left. - \frac{K^2}{k^4} \sqrt{p^2-k^2} \sqrt{p^2-K^2} e^{-\sqrt{p^2-K^2}y' - \sqrt{p^2-k^2}y} \right. \\ \left. + \frac{p^2}{K^2} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y' - \sqrt{p^2-K^2}y} \right]$$

$$u_{21} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sin p(x-x') dp \left[- \frac{p}{k^2} \sqrt{p^2-K^2} \left\{ e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)} + e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')} \right\} \right. \\ \left. - \frac{p}{k^2} \sqrt{p^2-k^2} \left\{ - \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')} \right\} \right. \\ \left. + \frac{K^2}{k^4} p^2 e^{-\sqrt{p^2-K^2}y' - \sqrt{p^2-k^2}y} - \frac{1}{K^2} \sqrt{p^2-K^2} \sqrt{p^2-k^2} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y' - \sqrt{p^2-K^2}y} \right]$$

$$\begin{aligned}
u_{22} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos p(x-x') dp \left[\frac{p^2-K^2}{k^2} \left\{ \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)}}}{\sqrt{p^2-K^2}} + e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'+y)} \right\} \right. \\
& + \frac{p^2}{k^2} \left\{ -\frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')} \right\} \\
& \left. - \frac{K^2}{k^4} p \sqrt{p^2-K^2} e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'} - \sqrt{p^2-k^2} y + \frac{p}{K^2} \sqrt{p^2-K^2} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} - \sqrt{p^2-K^2} y} \right],
\end{aligned}$$

$y=0$ では

$$\begin{aligned}
u_{11} = & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos p(x-x') dp}{k^2 \Delta} \left[\left\{ p^4 \sqrt{p^2-k^2} + p^2 \sqrt{p^2-k^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \right\} e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'} \right. \\
& \left. + \sqrt{p^2-k^2} \left\{ \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 + p^2 \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \right\} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos p(x-x') dp}{\Delta} \sqrt{p^2-k^2} \left[p^2 e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'} + \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \right] //$$

$$\begin{aligned}
u_{12} = & \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin p(x-x')}{\Delta} dp \left[\left\{ p^3 \sqrt{p^2-K^2} \sqrt{p^2-k^2} + p \sqrt{p^2-K^2} \sqrt{p^2-k^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \right\} e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'} \right. \\
& \left. + \left\{ p \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 + p^3 \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \right\} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin p(x-x')}{\Delta} dp \cdot p \left[\sqrt{p^2-k^2} \sqrt{p^2-K^2} e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'} + \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \right]$$

$$\begin{aligned}
u_{21} = & \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin p(x-x')}{\Delta} dp \cdot p \left[\left\{ -\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 - k^2 \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \right\} e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'} \right. \\
& \left. - \left\{ p^2 \sqrt{p^2-k^2} \sqrt{p^2-K^2} + \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \sqrt{p^2-k^2} \sqrt{p^2-K^2} \right\} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \right]
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin p(x-x')}{\Delta} dp \cdot p \left[\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'} + \sqrt{p^2-K^2} \sqrt{p^2-k^2} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \right] //$$

$$\begin{aligned}
 u_{22} &= \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos p(x-x')}{\Delta} dp \sqrt{p^2 - K^2} \left[\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 + p^2 \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \right] e^{-\sqrt{p^2 - K^2} y'} \\
 &\quad + \left[p^4 + p^2 \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \right] e^{-\sqrt{p^2 - k^2} y'} \Big] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos p(x-x')}{\Delta} dp \sqrt{p^2 - K^2} \left[\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) e^{-\sqrt{p^2 - K^2} y'} + p^2 e^{-\sqrt{p^2 - k^2} y'} \right] //
 \end{aligned}$$

$$y = y' = 0 \quad \text{では}$$

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos p(x-x') dp \left[\frac{p^2}{k^2} \frac{2p\sqrt{p^2 - k^2}}{\Delta} + \frac{\sqrt{(p^2 - k^2)}}{k^2} \frac{2\left(\frac{k^2}{2} - p^2\right)^2}{\Delta} \right. \\
 &\quad \left. + 4p^2 \sqrt{p^2 - k^2} \frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2\right)}{k^2 \Delta} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos p(x-x')}{\Delta} dp \sqrt{p^2 - k^2} \left[p^4 + \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 + 2p^2 \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \right] \\
 &= \frac{k^2}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos p(x-x')}{\Delta} \sqrt{p^2 - k^2} dp // \\
 u_{12} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sin p(x-x') dp \left[\frac{p}{k^2} \sqrt{p^2 - K^2} \frac{2p^2 \sqrt{p^2 - k^2}}{\Delta} + \frac{p}{k^2} \frac{2\left(\frac{k^2}{2} - p^2\right)^2}{\Delta} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2p^3 \left(\frac{k^2}{2} - p^2\right)}{k^2 \Delta} + 2 \frac{p}{k^2 \Delta} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \sqrt{p^2 - k^2} \sqrt{p^2 - K^2} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin p(x-x')}{\Delta} dp p \left[p^2 \sqrt{p^2 - K^2} \sqrt{p^2 - k^2} + \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \sqrt{p^2 - K^2} \sqrt{p^2 - k^2} + p^2 \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sin p(x-x') \frac{dp}{\Delta} p \left[\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) + \sqrt{p^2 - k^2} \sqrt{p^2 - K^2} \right] //
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{21} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sin p(x-x') dp \left[-\frac{2p}{k^2 \Delta} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 - \frac{2p^3 \sqrt{p^2 - k^2} \sqrt{p^2 - K^2}}{k^2 \Delta} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2p^3}{k^2 \Delta} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) - \frac{2p}{k^2 \Delta} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \sqrt{p^2 - k^2} \sqrt{p^2 - K^2} \right] \\
&= \frac{-1}{\pi k^2} \int_0^{\infty} \sin p(x-x') dp \cdot p \cdot \left[\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 + p^2 \sqrt{p^2 - k^2} \sqrt{p^2 - K^2} \right. \\
&\quad \left. + p^2 \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) + \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \sqrt{p^2 - k^2} \sqrt{p^2 - K^2} \right] = -u_{12} //
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{22} &= \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos p(x-x') dp}{\Delta} \sqrt{p^2 - K^2} \left[\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 + p^4 + 2p^2 \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \right] \\
&= \frac{k^2}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos p(x-x') dp \sqrt{p^2 - K^2}}{\Delta} //
\end{aligned}$$

これらの式において $k, K \rightarrow 0$ の時は静的弾性論の値に一致しなければならない。

その時、前頁の積分の値は被積分関数の $p \gg 1$ の値で大体決まると考えられ $\Delta \rightarrow \frac{1+\nu}{4} k^2 p^2$ であり、また

$$\int_0^{\infty} e^{-py+ipx} dp = \frac{i}{x+iy}$$

を積分して

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-py}}{p} (\cos px - 1) dp = -\log |x-iy|$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-py}}{p} \sin px dp = -\tan^{-1} \frac{y}{x}$$

であるから、 $y = y' = 0$ においては

$$u_{11} \longrightarrow \frac{-1}{\pi(1+\nu)} \log |x|$$

$$u_{12} = -u_{21} \longrightarrow \frac{-(\frac{K}{k})^2}{(1+\nu)\pi} x \begin{cases} 0 & \text{for } x > x' \\ \pi & \text{for } x < x' \end{cases}$$

$$u_{22} \longrightarrow \frac{-1}{\pi(1+\nu)} \log |x| ,$$

これは、 $k \rightarrow 0$ の極限に一致する。

静的弾性論の極限值

$y = 0$, $\theta' = -\theta$, $R = R'$ とおくと,

$$u_{11} = \frac{2}{\pi} \log R - \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'} (2y'\theta) = \frac{2}{\pi} \log R + \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{2y'^2}{R^2}$$

$$u_{12} = +\frac{2}{\pi} \theta - \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y'} \{ (x-x') \log \frac{R}{R'} + y'(\theta - \theta') \}$$

$$u_{21} = -\frac{2}{\pi} \theta - \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'} (x-x')(2\theta) + \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1-\nu}{2} (x-x') \log \frac{R}{R'} \right\}$$

$$u_{22} \Big|_{y'=0} = \frac{2}{\pi} \log R + \frac{1-\nu^2}{4\pi} (+y') \frac{2y'}{R^2} + \frac{(1+\nu^2)}{2\pi} \frac{[y'^2]}{R^2}$$

$$u_{12} = \frac{2}{\pi} \theta - \frac{1+\nu}{\pi} \theta = \frac{1-\nu}{\pi} \theta$$

$$u_{21} = -\frac{2}{\pi} \theta + \frac{1+\nu}{\pi} \theta + \frac{1+\nu}{\pi} (x-x') \frac{y'}{R^2} - \frac{1+\nu}{\pi} (x-x') \frac{y'}{R^2} = -u_{12}$$

$$u_{22} = \frac{2}{\pi} \log R + \frac{1+\nu}{\pi} \frac{y'^2}{R^2}$$

4. 遠場の表現

附録Aの漸近展開を2節の式に代入すればよいがここでは r, ω の別の表現から求めて見よう。
 その為に (2・3), (2・4) に (A・6), (A・7) を代入して積分順序を変更し, コッチン関数 G, F を次のように導入すると,

$$\left. \begin{aligned} G(p) &= \int_C \left(\frac{\partial r}{\partial n} - r \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{i p x - \sqrt{p^2 - K^2} y} ds, \\ F(p) &= \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{i p x - \sqrt{p^2 - k^2} y} ds, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4 \cdot 1)$$

こゝに X, Y は C の中心 (任意) からの座標とする。

また,

$$\left. \begin{aligned} G^*(p) &= \int_C \left(\frac{\partial r}{\partial n} - r \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{i p X + \sqrt{p^2 - K^2} Y} ds, \\ F^*(p) &= \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{i p X + \sqrt{p^2 - k^2} Y} ds, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4 \cdot 2)$$

$$\begin{aligned} r(Q) &= r_0(Q) - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2 - K^2}(y+y')} A(p) dp \cdot [e^{-i p(x-x')} G(p) + e^{i p(x'-x)} G(-p)] \\ &\quad - \frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4}{4\pi i} \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y - \sqrt{p^2 - K^2}y'} C(p) dp \cdot [e^{-i p(x'-x)} F(p) - e^{i p(x'-x)} F(-p)], \end{aligned}$$

..... (4・3)

$\sqrt{p^2 - k^2}$ の $|p| < k$ の時の値は $\pm i \sqrt{k^2 - p^2}$ for $I_m(p) \geq 0$

あるいは, $p = k \cos \varphi$ とおくときは $\varphi \geq 0$

こうすると F^*, G^* は別にわけて定義することもない。

$$\begin{aligned} \omega(Q) &= \omega_0(Q) - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2 - k^2}(y+y')} B(p) dp \cdot [e^{-i p(x'-x)} F(p) + e^{i p(x'-x)} F(-p)] \\ &\quad - \frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4}{4\pi i} \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2 - K^2}y - \sqrt{p^2 - k^2}y'} D(p) dp \cdot [e^{-i p(x'-x)} G(p) - e^{i p(x'-x)} G(-p)], \end{aligned}$$

..... (4・4)

$$\left. \begin{aligned} r_0(Q) &= \frac{i}{4} \int_C \left(r \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial r}{\partial n} \right) H_0^{(2)}(KR) ds, \\ \omega_0(Q) &= \frac{i}{4} \int_C \left(\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) H_0^{(2)}(kR) ds, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0(Q) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)}}{dp} \frac{1}{\sqrt{p^2-K^2}} \left[e^{-ip(x'-x)} G^*(p) + e^{ip(x'-x)} G^*(-p) \right] \\ &\qquad\qquad\qquad \text{for } y' > y, \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y-y')}}{dp} \frac{1}{\sqrt{p^2-K^2}} \left[e^{-ip(x'-x)} G(p) + e^{ip(x'-x)} G(-p) \right] \\ &\qquad\qquad\qquad \text{for } y > y', \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(Q) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{dp} \frac{1}{\sqrt{p^2-k^2}} \left[e^{-ip(x'-x)} F^*(p) + e^{ip(x'-x)} F^*(-p) \right] \\ &\qquad\qquad\qquad \text{for } y' > y, \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y-y')}}{dp} \frac{1}{\sqrt{p^2-k^2}} \left[e^{-ip(x'-x)} F(p) + e^{ip(x'-x)} F(-p) \right] \\ &\qquad\qquad\qquad \text{for } y > y', \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.7)$$

こゝに (x, y) は C の中心の座標とする。

これらの表現から附録 A と同様にして漸近展開を得る事が出来るが、それは次の 4 つの項における事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 + r_K + r_k + r_R, \\ \omega &= \omega_0 + \omega_k + \omega_K + \omega_R, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.8)$$

r_0, ω_0 は (4.5) ~ (4.7) であり、 r_K, ω_k は自由表現に関する鏡像による項、 r_k, ω_K は夫々の干渉項、 r_R, ω_R はレーリー波に関する項である。

先ず

$$\left. \begin{aligned} r_0(Q) &\rightarrow \frac{e^{-iKr}}{2\sqrt{2\pi i Kr}} G^*(K \cos \varphi), \\ \omega_0(Q) &\rightarrow \frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i kr}} F^*(k \cos \varphi), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.9)$$

for $\pi > \varphi > 0$

$$r_0(Q) \rightarrow$$

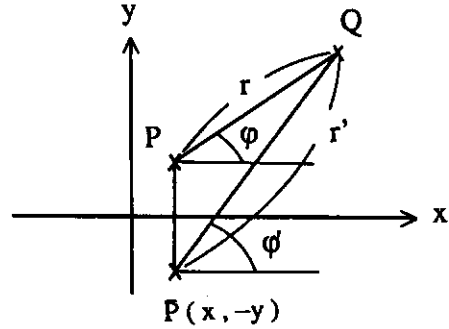
$$\frac{e^{-iKr}}{2\sqrt{2\pi i K r}} G(K \cos \varphi)$$

$$\omega_0(Q) \rightarrow$$

$$\frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}} F(k \cos \varphi)$$

$$\text{for } -\pi < \varphi < 0$$

$$\dots\dots\dots (4.9)$$



$$\left. \begin{aligned} r_K(Q) &\rightarrow \frac{-\sqrt{i} e^{-iKr'}}{2\sqrt{2\pi K r'}} A(K \cos \varphi') K \sin \varphi' G(K \cos \varphi'), \\ \omega_k(Q) &\rightarrow \frac{-\sqrt{i} e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi k r'}} B(k \cos \varphi') k \sin \varphi' F(k \cos \varphi'), \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.10)$$

次に r_k, ω_K は y と y' の相対位置によって大変複雑になるが、ここでは實際上必要な y 又は y' が 0 に近い次の 2 つの場合のみ考える。

$$r_k \rightarrow -\operatorname{sgn}(x'-x) \frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 e^{-iK\bar{r}-\sqrt{K^2 \cos^2 \bar{\varphi}-k^2} y}}{2\sqrt{2\pi i K \bar{r}}} C(K \cos \bar{\varphi}) K \sin \bar{\varphi} F(K \cos \bar{\varphi}),$$

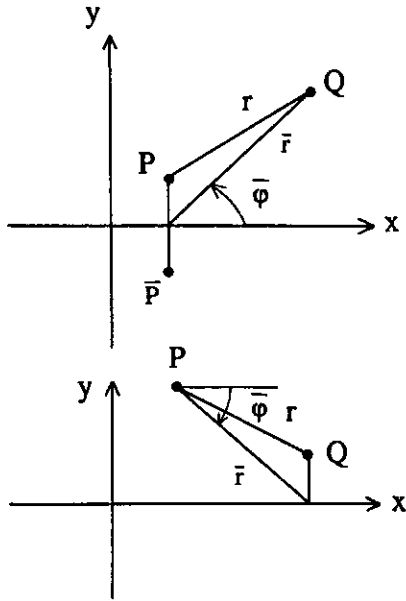
$$\text{for } y' \gg y \doteq 0,$$

$$\dots\dots\dots (4.11)$$

$$r_k \rightarrow -\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x) e^{-ik\bar{r}-\sqrt{k^2 \cos^2 \bar{\varphi}-K^2} y'}}{2\sqrt{2\pi i k \bar{r}}} C(k \cos \bar{\varphi}) k \sin \bar{\varphi} F(k \cos \bar{\varphi}),$$

$$\text{for } y \gg y' \doteq 0,$$

$$\dots\dots\dots (4.12)$$



$$\omega_K \rightarrow -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4 \operatorname{sgn}(x' - x)}{2\sqrt{2\pi i k \bar{r}}} e^{-i k \bar{r} - \sqrt{k^2 \cos^2 \bar{\varphi} - K^2} y} D(k \cos \bar{\varphi}) k \sin \bar{\varphi} G(k \cos \bar{\varphi}),$$

for $y' \gg y \neq 0$

$$\omega_K \rightarrow -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4 \operatorname{sgn}(x' - x)}{2\sqrt{2\pi i K \bar{r}}} e^{-i K \bar{r} - \sqrt{K^2 \cos^2 \bar{\varphi} - k^2} y'} D(k \cos \bar{\varphi}) K \sin \bar{\varphi} G(k \cos \bar{\varphi}),$$

for $y \gg y' \neq 0$

..... (4.12)

のようになってこの項は $y' \geq y$ で波の性質が変る。

最後にレーリー波に関する部分は留数分で、

$$A'(K_R), B', C', D' = \lim_{p \rightarrow \pm K_R} (p - K_R) A(p)$$

とすると、

$$\begin{aligned}
r_R &\rightarrow \frac{i}{2} A'(K_R) e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - K^2} (y+y')} G(\pm K_R) \\
&\pm \frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4}{2} C'(K_R) e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2} - \sqrt{K_R^2 - K^2} y'} F(\pm K_R), \\
\omega_R &\rightarrow \frac{i}{2} B'(K_R) e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2} (y+y')} F(\pm K_R) \dots\dots (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\pm \frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4}{2} D'(K_R) e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - K^2} y - \sqrt{K_R^2 - k^2} y'} G(\pm K_R), \\
&+ \text{sgn for } x' > x, \quad - \text{sgn for } x' < x.
\end{aligned}$$

最も簡単な場合として、まず

$$\begin{aligned}
G(K \cos \varphi) &= G^*(K \cos \varphi) = G(k \cos \bar{\varphi}) = G(\pm K_R) = G(0), \\
F &= 0 \dots\dots (4.14)
\end{aligned}$$

つまり P 点における無指向性の膨張収縮源を考えると、

$$\begin{aligned}
r_0 &\rightarrow \frac{e^{-i K r}}{2\sqrt{2\pi i K r}} G(0), \\
r_K &\rightarrow -\frac{-\sqrt{i} e^{-i K r'}}{2\sqrt{2\pi K r'}} A(K \cos \varphi') K \sin \varphi' G(0), \\
r_k &\rightarrow 0 \\
r_R &\rightarrow \frac{i}{2} A'(K_R) e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - K^2} (y+y')} G(0), \dots\dots (4.15)
\end{aligned}$$

$$\omega_0 \rightarrow 0, \quad \omega_k \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
\omega_K &\rightarrow -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4 \text{sgn}(x'-x) e^{-i K \bar{r} - \sqrt{K^2 \cos^2 \bar{\varphi} - k^2} - y'}}{2\sqrt{2\pi i K \bar{r}}} D(k \cos \bar{\varphi}) K \sin \bar{\varphi} G(0), \\
\omega_R &\rightarrow \pm \frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4}{2} D'(K_R) e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - K^2} y - \sqrt{K_R^2 - k^2} y'} G(0), \dots\dots (4.15)
\end{aligned}$$

同様にして

$$\left. \begin{aligned} F &= F(0) \quad , \\ G &= 0 \quad , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4 \cdot 16)$$

つまり無指向性の剪断振動とすれば,

$$\tau_0 = \tau_K = 0$$

$$\tau_K \xrightarrow{y' \neq 0} - \frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i k \bar{\tau}}} e^{-i k \bar{\tau} - \sqrt{k^2 \cos^2 \bar{\varphi} - K^2} y'} C(k \cos \bar{\varphi}) k \sin \bar{\varphi} F(0) \quad ,$$

$$\tau_R \rightarrow \pm \frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4}{2} C'(K_R) e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2} y - \sqrt{K_R^2 - K^2} y'} F(0) \quad ,$$

$$\omega_0 \rightarrow \frac{e^{-i k r}}{2\sqrt{2\pi i k \bar{\tau}}} F(0) \quad , \quad \dots (4 \cdot 17)$$

$$\omega_K \rightarrow - \frac{\sqrt{i} e^{-i k r'}}{2\sqrt{2\pi k r'}} B(k \cos \varphi') k \sin \varphi' F(0) \quad ,$$

$$\omega_K \rightarrow 0$$

$$\omega_R \rightarrow \frac{i}{2} B'(K_R) e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2} (y+y')} F(0) \quad , \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 17)$$

5. イムピーダンス, 波の強制力, 可逆定理

振動の規準化された変位モードを u_j , その速度振幅を I , とすると, それによる境界力は $GI \tau_j / i\omega$ であるから媒質が物体に及ぼす一般力 V は,

$$V = - \frac{GI}{i\omega} \int_C \tau_j u_j ds \quad , \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 1)$$

となる。

それ故,

$$V = I Z \quad , \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 2)$$

と書いて Z をイムピーダンスとすると,

$$Z = i \frac{G}{\omega} \int_C \tau_j u_j ds, \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

次に n 番目の変位モードを $u_j^{(n)}$, 速度振幅を I_n , 規準化境界力を $\tau_j^{(n)}$, m 番目のを夫々, $u_j^{(m)}$, $\tau_j^{(m)}$, I_m とすると,

m 番号の振動による n 方向の一般力 $V_{m,n}$ は,

$$V_{m,n} = - \frac{GI_m}{i\omega} \int_C \tau_j^{(m)} u_j^{(n)} ds = I_m Z_{m,n}, \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

$$Z_{m,n} = \frac{iG}{\omega} \int_C \tau_j^{(m)} u_j^{(n)} ds, \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

これは相互イムピーダンスである。

こゝでグリーンの定理より明らかに,

$$\int_C (\tau_j^{(m)} u_j^{(n)} - \tau_j^{(n)} u_j^{(m)}) ds = 0, \quad \dots\dots\dots (5.6) \quad (n)$$

となるから,

$$Z_{m,n} = Z_{n,m}, \quad \dots\dots\dots (5.7)$$

となり, 可逆性が成立する。

次に物体が2つあっても (1.6) は成立つから, 今 S を振動源とし C に及ぼす力を考えよう。

S の振動による変位場を $u_j^{(s)}$, 境界力を $G\tau_j^{(s)}$ としよう。 C はこの波を反射散乱するからそれを $u_j^{(d)}$, $G\tau_j^{(d)}$ としよう。

C に働く一般力は,

$$V_s = -G \int_C (\tau_j^{(s)} + \tau_j^{(d)}) u_j ds, \quad \dots\dots\dots (5.8)$$

所で,

$$\int_C \tau_j^{(d)} u_j ds = \int_C \tau_j u_j^{(d)} ds, \quad \dots\dots\dots (5.9)$$

であるが,

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(d)} &= -u_j^{(s)} \text{ on } C, \\ u_j &= 0 \text{ on } S, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.10)$$

と定義すると,

$$V_s = -G \int_C (\tau_j^{(s)} u_j - \tau_j u_j^{(s)}) ds, \quad \dots\dots\dots (5.11)$$

また (5.6) で積分範囲を C と S とおいたものを使うと,

$$V_s = +G \int_S (\tau_j^{(s)} u_j - \tau_j u_j^{(s)}) ds, \quad \dots\dots\dots (5.12)$$

なる可逆性が成立する。

所で 2 つの物体が充分離れているとして互の反射等は無視すると前節の漸近展開が成立つから、上式はもっと具体的に書き下せる。

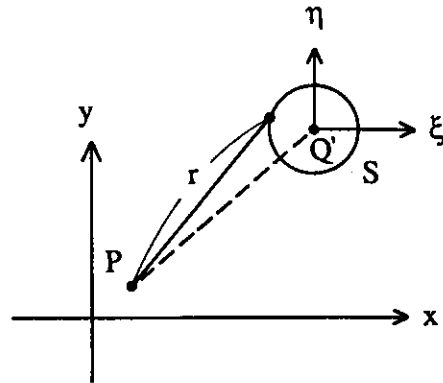
まず (5.12) を 1 節の式により部分積分して r, ω に変換すると,

$$V_s = G k^2 \int_S \left[\frac{1}{K^4} \left(r \frac{\partial r^{(s)}}{\partial n} - r^{(s)} \frac{\partial r}{\partial n} \right) + \frac{1}{k^4} \left(\omega \frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)} \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) \right] ds, \quad \dots (5.13)$$

又 S の中心を $0'$ とすると,

$$r = r_0 + \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi,$$

となるので,



$$\left. \begin{aligned} G_s^*(p) &= \int_S \left(\frac{\partial r^{(s)}}{\partial n} - r^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{i p \xi + \sqrt{p^2 - K^2} \eta} ds, \\ F_s^*(p) &= \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{i p \xi + \sqrt{p^2 - k^2} \eta} ds, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.14)$$

とおくと (4.8) に対応して V_s は 8 項から成る。

$$V_s = k^2 G \left[\frac{1}{K^4} (v_0 + v_K + v_k + v_R) + \frac{1}{k^4} (w_0 + w_k + w_K + w_R) \right], \quad \dots\dots\dots (5.15)$$

$$v_0 = \int_S \left(\frac{\partial r^{(s)}}{\partial n} - r^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) r_0 ds = \frac{e^{-iKr}}{2\sqrt{2\pi iKr}} G^*(K \cos \varphi) G_S^*(K \cos \overline{\varphi + \pi}),$$

$$v_K = \int_S \left(\frac{\partial r^{(s)}}{\partial n} - r^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) r_K ds = \frac{-\sqrt{i} e^{-iKr'}}{2\sqrt{2\pi Kr}} A(K \cos \varphi') K \sin \varphi' G(K \cos \varphi')$$

$$\times G_S^*(K \cos \overline{\varphi' + \pi}),$$

$$v_k = \int_S \left(\frac{\partial r^{(s)}}{\partial n} - r^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) r_k ds = -\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x) e^{-i k \bar{r} - \sqrt{K^2 \cos^2 \bar{\varphi} - k^2} y}}{2\sqrt{2\pi i k r}} C(K \cos \bar{\varphi}) K \sin \bar{\varphi}$$

$$\times F(K \cos \bar{\varphi}) G_S^*(K \cos \overline{\bar{\varphi} + \pi}),$$

$$v_R = \int_S \left(\frac{\partial r^{(s)}}{\partial n} - r^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) r_R ds = \frac{i}{2} A'(K_R) e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2} y - \sqrt{K_R^2 - K^2} y'}$$

$$\pm \frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4}{2} C'(K_R) e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2} y - \sqrt{K_R^2 - K^2} y'}$$

$$G(\pm K_R) \cdot G_S(\mp K_R) F(\pm K_R) G_S(\mp K_R),$$

以上 (5.16)

$$w_0 = \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) \omega_0 ds = \frac{e^{-i k r}}{2\sqrt{2\pi i k r}} F^*(k \cos \varphi) F_S^*(k \cos \overline{\varphi + \pi}),$$

$$w_k = \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) \omega_k ds = \frac{-\sqrt{i} e^{-i k r'}}{2\sqrt{2\pi k r'}} B(k \cos \varphi') k \sin \varphi' F(k \cos \varphi')$$

$$\times F_S^*(k \cos \overline{\varphi' + \pi})$$

$$w_K = \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) \omega_K ds = -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x) e^{-i k \bar{r} - \sqrt{k^2 \cos^2 \bar{\varphi} - K^2} y}}{2\sqrt{2\pi i k \bar{r}}} D(k \cos \bar{\varphi}) k \sin \bar{\varphi}$$

$$\times G(k \cos \bar{\varphi}) F_S^*(k \cos \overline{\bar{\varphi} + \pi}),$$

$$w_R = \frac{i}{2} B'(K_R) e^{\mp i K_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2}(y+y')} F(\pm K_R) F_S(\mp K_R)$$

$$\pm \frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4}{2} D'(K_R) e^{\mp i K_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2 - K^2}y - \sqrt{K_R^2 - k^2}y'} G(\pm K_R) F_S(\mp K_R),$$

以上 (5.17)

なお,

$$G_S(p) = \int_S \left(\frac{\partial r^{(s)}}{\partial n} - r^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{i p \xi - \sqrt{p^2 - K^2} \eta} ds, \quad \dots\dots\dots(5.14')$$

$$F_S(p) = \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{i p \xi - \sqrt{p^2 - k^2} \eta} ds,$$

$y \rightarrow 0$ ならば, $r = r' = \bar{r}$, $\varphi = \varphi' = \bar{\varphi}$ となるので大分簡単になり, また前節の (4.14), (4.15) のような場合は v_0, v_k, v_K, v_R が 0 となる。又逆に (4.12), (4.13) の時は $w_0 \sim w_R$ が 0 となる。

これは水波理論におけるハスキントの関係と呼ばれるものの一般の場合である。

τ が充分大きければ v_R と w_R だけ残り, よく知られたハスキントの関係である。

$$\varphi = \varphi' = \bar{\varphi} \doteq 0 \quad \text{となると,} \quad \begin{pmatrix} F^*(k) = F(k) \\ G^*(K) = G(K) \end{pmatrix}$$

$$1 \doteq i A(K \cos \varphi) K \sin \varphi$$

$$1 \doteq i B(k \cos \varphi) k \sin \varphi$$

$$C(K \cos \varphi) K \sin \varphi \doteq 0$$

$$D(k \cos \varphi) k \sin \varphi \doteq 0$$

となるので v_R, w_R のみとなる。

これは又 $\tau \gg 1$ でも同じである。($\tau \gg 1$ ならば $\varphi \doteq 0$)

簡単の為に $r = r' = \bar{r}$, $\varphi = \varphi' = \bar{\varphi}$ とし, $\frac{G}{F}$, $\frac{G_S}{F_S}$ が無指向性ならば
 (又 $y=0$)

$$\begin{aligned}
 V_S = & \frac{\rho\omega^2}{K^4} \left[\frac{e^{-iKr}}{2\sqrt{2\pi i Kr}} \{ (1 - iA(K\cos\varphi)) G(0) G_S(0) \right. \\
 & - \operatorname{sgn}(x'-x) \left(\frac{K}{k}\right)^4 C(K\cos\varphi) K\sin\varphi G_S(0) F(0) \} \\
 & \left. \mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2} y' \right. \\
 & \left. + \frac{e}{2} G_S(0) \{ iA'G(0) \pm \left(\frac{K}{k}\right)^4 C'F(0) \} \right] \dots\dots (5.18) \\
 + & \frac{\rho\omega^2}{k^4} \left[\frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i kr}} \{ (1 - iB(k\cos\varphi)) F(0) F_S(0) \} \right. \\
 & - \operatorname{sgn}(x'-x) \left(\frac{k}{K}\right)^4 D(k\cos\varphi) k\sin\varphi G(0) F_S(0) \} \\
 & \left. \mp iK_R(x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2} y' \right. \\
 & \left. + \frac{e}{2} \{ iB'F(0) \pm \left(\frac{k}{K}\right)^4 D'G(0) \} F_S(0) \right],
 \end{aligned}$$

6. 放射動力と減衰抵抗

C が振動モード u_j , 速度振幅 I によって単位時間に放射するエネルギー, 放射動力 W は,

$$W = \frac{G}{4i\omega} I \bar{I} \int_C (u_j \bar{\tau}_j - \bar{u}_j \tau_j) ds, \dots\dots\dots (6.1)$$

で与えられる。

一方 (5.3) のイムピーダンスの実部 R は, u_j を実とすると,

$$R = \operatorname{Re}\{Z\} = \frac{iG}{2\omega} \int_C (\tau_j \bar{u}_j - u_j \bar{\tau}_j) ds, \dots\dots\dots (6.2)$$

と書けるから (6.1) は,

$$W = \frac{R}{2} I \bar{I}, \dots\dots\dots (6.3)$$

となり, 放射動力は抵抗 R のなす仕事率である。(実効値をとれば $W = R |I|^2$ となる)

(6.1) 右辺の積分は自由表面で $\tau_j = 0$ を考慮するとグリーンンの定理により充分大きい半円上の積分によって評価出来る。そこでは漸近展開 (4.8) 以下の式が成立ち, また $r \doteq r' \doteq \bar{r}$,

$\bar{\varphi} \doteq \varphi' \doteq \varphi$ と考えられるから結局この積分は縦波，横波，レーリー波によるものの3成分に分けられる。

$$W = W_K + W_k + W_R \quad , \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 4)$$

縦波と横波については (1・8)，(1・10) 式から充分遠方では，

$$\left. \begin{aligned} u_r &\doteq -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} \quad , \quad u_\varphi \doteq -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} \quad , \\ \tau_r &\doteq \frac{k^2}{K^2} \bar{r} \quad , \quad \tau_\varphi \doteq \bar{\omega} \quad , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6 \cdot 5)$$

となるので

$$\begin{aligned} &\int_r (u_1 \bar{r}_1 + u_2 \bar{r}_2 - \bar{u}_1 \tau_1 - \bar{u}_2 \tau_2) ds \quad , \\ &= r \int_r (u_r \bar{r}_r + u_\varphi \bar{r}_\varphi - \bar{u}_r \tau_r - \bar{u}_\varphi \tau_\varphi) d\varphi \\ &= r \int_r \left[\frac{k^2}{K^4} \left(r \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} - \bar{r} \frac{\partial r}{\partial r} \right) + \frac{1}{k^2} \left(\omega \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} - \bar{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right] d\varphi \end{aligned}$$

となり，(4・8) ~ (4・13) を代入すると，

$$\begin{aligned} W_K &= \frac{G I \bar{I}}{4 \omega} \left(\frac{k^2}{K^4} \right)^4 \frac{1}{4 \pi} \int_0^\pi \left| G^*(K \cos \varphi) - i A(K \cos \varphi) K \sin \varphi G(K \cos \varphi) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sgn}(x'-x) \left(\frac{K}{k} \right)^4 e^{-\sqrt{K^2 \cos^2 \varphi - k^2} y} C(K \cos \varphi) K \sin \varphi F(K \cos \varphi) \right|^2 d\varphi \quad , \\ G &= \frac{\rho \omega^2}{k^2} \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{\rho \omega I \bar{I}}{16 \pi k^4} \int_0^\pi \left| F^*(k \cos \varphi) - i B(k \cos \varphi) k \sin \varphi F(k \cos \varphi) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{k}{K} \right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x) e^{-\sqrt{k^2 \cos^2 \varphi - K^2} y} D(k \cos \varphi) k \sin \varphi G(k \cos \varphi) \right|^2 d\varphi \quad , \\ &\quad \dots\dots\dots (6 \cdot 7) \end{aligned}$$

レーリー波については $|x'-x| \gg 1$ の検査面上で y 方向に積分すればよい。
結果は附録に示すように，

$$W_R = \frac{\rho\omega}{2} I \bar{I} \frac{q(\nu)}{k^4} (a^+ a^{-\bar{}} + a^- a^{+\bar{}}) , \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 8)$$

$$a^\pm = \frac{1}{2} [(A' G(\pm K_R) e^{-\sqrt{K_R^2 - K^2} y} \mp i \left(\frac{K}{k}\right)^4 C' F(\pm K_R) e^{-\sqrt{K_R^2 - k^2} y}] , \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 9)$$

特に $G^*(K \cos \varphi) = G(K \cos \varphi) = G(0)$, $F = 0$ ならば,

$$\left. \begin{aligned} W_K &= \frac{\rho\omega}{8\pi K^4} I \bar{I} |G(0)|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |1 - i A(K \cos \varphi) K \sin \varphi|^2 d\varphi , \\ W_k &= \frac{\rho\omega}{8\pi K^4} I \bar{I} |G(0)|^2 \left(\frac{k}{K}\right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{-\sqrt{k^2 \cos^2 \varphi - K^2} y} D(k \cos \varphi) k \sin \varphi|^2 d\varphi , \\ W_R &= \frac{\rho\omega}{4} I \bar{I} \frac{|G(0)|^2}{k^4} e^{-2\sqrt{K_R^2 - K^2} y} |A'(K_R)|^2 q(\nu) , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6 \cdot 10)$$

$G = 0$, $F = F(0)$ ならば,

$$\left. \begin{aligned} W_K &= \frac{\rho\omega I \bar{I}}{8\pi k^2} \left(\frac{K}{k}\right)^4 |F(0)|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{-\sqrt{k^2 \cos^2 \varphi - k^2} y} C(K \cos \varphi) K \sin \varphi|^2 d\varphi , \\ W_k &= \frac{\rho\omega I \bar{I}}{8\pi} \frac{|F(0)|^2}{k^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |1 - i B(k \cos \varphi) k \sin \varphi|^2 d\varphi , \\ W_R &= \frac{\rho\omega}{4} I \bar{I} \frac{|F(0)|^2}{k^4} q(\nu) |D'|^2 e^{-2\sqrt{K_R^2 - k^2} y} , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6 \cdot 11)$$

それ故 (6・10) の場合は,

$$W = \frac{\rho\omega I \bar{I}}{8 K^4} |G(0)|^2 (Q_{KK} + Q_{KR} e^{-2\sqrt{K_R^2 - K^2} y}) , \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 12)$$

(6・11) の場合は,

$$W = \frac{\rho\omega I \bar{I}}{8 k^4} |F(0)|^2 (Q_{kk} + Q_{kR} e^{-2\sqrt{K_R^2 - k^2} y}) , \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 13)$$

と書け、その値は附録に示す。

なお、媒質が無限に広がっている場合は、

$$Q_{KK} = Q_{kk} = 1, \quad Q_{KR} = Q_{kR} = 0, \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 14)$$

である。

なお、

$$\begin{aligned} Q_K &= Q_{KK} + Q_{KR} e^{-2\sqrt{K_R^2 - K^2}y} \\ Q_k &= Q_{kk} + Q_{kR} e^{-2\sqrt{K_R^2 - k^2}y} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 15)$$

7. 物体の振動、吸収動力、伝達動力

振源 S の振動により、境界 C で囲まれた物体が一つの振動モード u_j のみで振動する場合を考えよう。

速度振幅を I とし、イムピーダンスを Z 、物体自身のイムピーダンスを Z_i 、強制力 (5.15) で与えられる) を V_s とすると運動方程式は、

$$(Z + Z_i) I = V_s, \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 1)$$

所で、

$$\left. \begin{aligned} Z &= R + iX \\ Z_i &= R_e + iX_i \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 2)$$

こゝに R_e は附加減衰抵抗 (あるいは内部抵抗) と書けるから吸収動力は、

$$W_{ab} = \frac{R_e}{2} I \bar{I} = \frac{R_e}{2} \frac{V_s \bar{V}_s}{|R + R_e + i(X + X_i)|^2}, \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 3)$$

であり、この最大値は所謂共役整合の時最大である。

つまり、

$$X + X_i = 0, \quad R = R_e, \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 4)$$

その値は、

$$\text{Max}(W_{ab}) = \frac{V_s \bar{V}_s}{8R}, \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 5)$$

なお、 R_e が 0 の時は、入力エネルギーは放射エネルギーと等しくなり、その値は同調時 ($X + X_i = 0$) に、

$$W_T = \frac{R}{2} I \bar{I} = \frac{V_s \bar{V}_s}{2R}, \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 6)$$

となる。

さて振源 S の放射動力を W_s とすると W_{ab} は C に伝達された動力と見なす事も出来るから、その効率は、

$$\frac{W_{ab}}{W_s} = \eta, \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 7)$$

で与えられる。

従って、

$$\text{Max. } \eta = \frac{V_s \bar{V}_s}{8 R W_s}, \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 8)$$

今、簡単の為に振源は無指向性で $G_s = 0$ とすると W_s は (6・13) で与えられる。

また C の F も G も無指向性とする (5・18) により、

$$V_s = + \frac{\rho \omega I_s}{i k^4} F_S(0) \left[\frac{e^{-i k r}}{2 \sqrt{2 \pi i k r}} \{ (1 - i B(k \cos \varphi)) F(0) \right. \\ \left. - \text{sgn}(x' - x) \left(\frac{k}{K}\right)^4 D k \sin \varphi G(0) \} + \frac{e^{\mp i K_R(x' - x) - \sqrt{K_R^2 - k^2} y'}}{2} (i B' F(0) \pm \left(\frac{k}{K}\right)^4 D' G(0)) \right], \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 9)$$

こゝに (5・18) は、 I_s が陽に出ていないのでこゝではそれを外に出してある。

また、上式で $G(0)$ を無視すると (6・3) と (6・13) から、

$$R = \frac{\rho \omega}{4 k^4} |F(0)|^2 Q_k, \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 10)$$

また、

$$W_s = \frac{\rho \omega I_s \bar{I}_s}{8 k^4} |F_s(0)|^2 Q_k, \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 11)$$

これらを (7・8) に代入すると、

$$\text{Max. } \eta = \frac{\rho^2 \omega^2 I_s \bar{I}_s |F_s(0)|^2 |F(0)|^2}{8 k^4 \times \frac{\rho^2 \omega^2}{32 k^4} I_s \bar{I}_s |F_s F|^2 Q_k^2} \quad \left| \quad \text{同下} \quad \right|^2 \\ = \frac{4}{Q_k^2} \left| \frac{e^{-i k r}}{2 \sqrt{2 \pi i k r}} (1 - i B(k \cos \varphi)) + \frac{1}{2} B' e^{\mp i K_R(x' - x) - \sqrt{K_R^2 - k^2} y'} \right|^2 \quad \dots\dots\dots (7 \cdot 12)$$

$r \gg 1$ で $\varphi \neq 0$ ならば右辺第 1 項は小さくて、

$$\text{Max. } \eta = \frac{|B'|^2}{Qk^2} e^{-2\sqrt{K_R^2 - k^2}y'} , \quad \dots\dots\dots (7.13)$$

y' は S の中心の y 座標である。

一般には大変複雑になるが、いづれにしても η はコッチン関数 F , G と r , φ , また振源の深さの関数となる。

8. 計算例

震源の一つの代表例として(4.16)の場合を考えて見よう。

それによる地表面の変位を幾つかの深さについて計算した例を図に示す。(末)

計算には(4.3)~(4.7)の表現を用いるが近似的には(4.17)から(1.8)により変位を求める。

これらの図から φ が $-30^\circ \sim -60^\circ$ の範囲を除けば殆どレーリー波のみとなる事がわかる。

次に今度は地表に建物がある場合を考えよう。建物の振動は一様梁と見なせるとし各断面は変形せず、又垂直方向にも変形しないと仮定しよう。そうすると地面に接する所での変形は3つに別けて考えられる。

i) 左右動(肩添字 1 で示す)

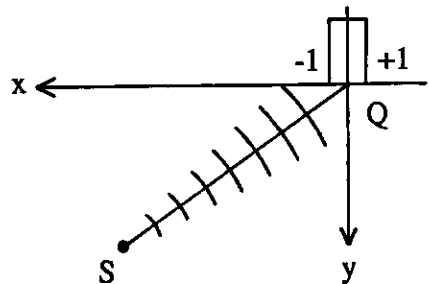
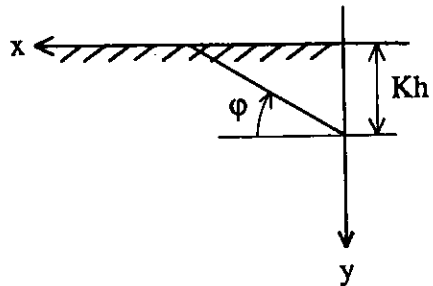
$$u_1^{(1)} = 1, \quad u_2^{(1)} = 0$$

$$\text{for } |x| \leq 1, \quad (8.1)$$

それに対するインピーダンスは

(5.3) により、

$$Z_{11} = \frac{\rho \omega}{i k^2} \int_{-1}^1 \tau_1^{(1)} dx , \quad \dots\dots\dots (8.2)$$



ii) 上下動 (肩添字 2 で示す)

$$u_1^{(2)} = 0, \quad u_2^{(2)} = 1, \quad \text{for } |x| \leq 1, \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 3)$$

$$Z_{22} = \frac{\rho \omega}{i k^2} \int_{-1}^1 \tau_2^{(2)} dx, \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 4)$$

iii) 回転動 (肩添字 3 で示す)

$$u_1^{(3)} = 0, \quad u_2^{(3)} = x, \quad \text{for } |x| \leq 1, \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 5)$$

$$Z_{33} = \frac{\rho \omega}{i k^2} \int_{-1}^1 \tau_2^{(3)} x dx, \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 6)$$

$$Z_{31} = \frac{\rho \omega}{i k^2} \int_{-1}^1 \tau_1^{(3)} dx, \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 7)$$

一方 i) から,

$$Z_{13} = \frac{\rho \omega}{i k^2} \int_{-1}^1 \tau_2^{(1)} x dx, \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 8)$$

(5・5) により,

$$Z_{31} = Z_{13}, \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 9)$$

今振動の速度振幅を夫々 I_1, I_2, I_3 とし, 強制力を V_1, V_2, V_3 とすると運動方程式は,

$$\left. \begin{aligned} I_1 (Z_{11} + Z_{11}^{(i)}) + I_3 (Z_{13} + Z_{13}^{(i)}) &= V_1, \\ I_2 (Z_{22} + Z_{22}^{(i)}) &= V_2, \\ I_1 (Z_{31} + Z_{31}^{(i)}) + I_3 (Z_{33} + Z_{33}^{(i)}) &= V_3, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8 \cdot 10)$$

$Z_{ij}^{(i)}$ は附録 D に示す建物のイムピーダンスである。

なお,

$$Z_{22}^{(i)} = i \omega (2 \omega \ell), \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 11)$$

これを解けばよいわけである。

特に建物の固有振動数, つまり

$$4_1 4_2 = (\cosh a \cos a)^2 - (\sinh a \sin a)^2 = 0, \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 12)$$

の所では $Z^{(6)}$ は無限大となり, I_1, I_3 は 0 となるが, $d_1, d_2 \rightarrow 0$ として (D・7) に代入すると $y(x)$ は有限な値となる。

附録A L, M, N, O 関数

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + K^2) \begin{Bmatrix} L(P, Q) \\ O(P, Q) \end{Bmatrix} &= 0 \\ (\Delta + k^2) \begin{Bmatrix} M(P, Q) \\ N(P, Q) \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

$$\left. \begin{aligned} (\Delta' + K^2) \begin{Bmatrix} L(P, Q) \\ N(P, Q) \end{Bmatrix} &= 0 \\ (\Delta' + k^2) \begin{Bmatrix} M(P, Q) \\ O(P, Q) \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 2)$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta' \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y'}\right)^2,$$

$$P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y'),$$

$$\left. \begin{aligned} L_{xy}(P, Q) + \left(\frac{K^2}{2} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) N(P, Q) &= 0 \\ N_{xy}(P, Q) - \left(\frac{k^4}{2K^2} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) L(P, Q) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{for } y=0, \dots\dots (A \cdot 3)$$

$$\left. \begin{aligned} O_{xy}(P, Q) + \frac{K^2}{k^2} \left(\frac{K^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) M(P, Q) &= 0 \\ M_{xy}(P, Q) - \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{K^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) O(P, Q) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{for } y=0, \dots\dots (A \cdot 4)$$

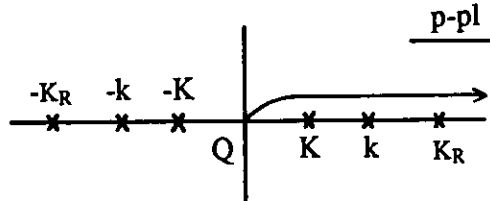
L, M は領域内に特異性を有し,

$$\left. \begin{aligned} L(P, Q) &= \frac{i}{4} H_0^{(2)}(KR) + L'(P, Q) \\ M(P, Q) &= \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) + M'(P, Q) \end{aligned} \right\} R = \overline{PQ}, \dots\dots (A \cdot 5)$$

L', M', N, O は領域内で正則とする。

$$\frac{i}{4} H_0(KR) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2} |y'-y|} \cos p(x-x')}{\sqrt{p^2-K^2}} dp, \quad \dots\dots\dots (A \cdot 6)$$

積分路は下図の如く採るものとする。



なお、以後 $x' = 0$ とおく。

今、(A・1)、(A・2)を考えて、

$$\begin{aligned} L'(P, Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')} \cos px A(p) dp, \\ M' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')} \cos px B(p) dp, \\ N &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2-K^2}y' - \sqrt{p^2-k^2}y} \sin px C(p) dp, \\ O &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2-K^2}y - \sqrt{p^2-k^2}y'} \sin px D(p) dp, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A \cdot 7)$$

とおき、(A・3)、(A・4)の条件を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{p\sqrt{p^2-K^2}}{\sqrt{p^2-K^2}} + A(p)\sqrt{p^2-K^2} p + \frac{K^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) C(0) &= 0 \\ - p\sqrt{p^2-k^2} C(p) - \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \left[\frac{-1}{\sqrt{p^2-K^2}} + A(p) \right] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -p\sqrt{p^2-K^2} D + \frac{K^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{p^2-k^2}} + B \right) = 0 \\
 & + p + p\sqrt{p^2-k^2} B - \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) D = 0 \\
 & p\sqrt{p^2-K^2} A + \frac{K^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) C = -p \\
 & + \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) A + p\sqrt{p^2-k^2} C = \frac{k^2}{K^2} \frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)}{\sqrt{p^2-K^2}}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} & -p\sqrt{p^2-K^2} D + \frac{K^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{p^2-k^2}} + B \right) = 0 \\ & + p + p\sqrt{p^2-k^2} B - \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) D = 0 \\ & p\sqrt{p^2-K^2} A + \frac{K^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) C = -p \\ & + \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) A + p\sqrt{p^2-k^2} C = \frac{k^2}{K^2} \frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)}{\sqrt{p^2-K^2}} \right.} \right) \dots\dots\dots (A \cdot 8)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{K^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) B - p\sqrt{p^2-K^2} D = \frac{K^2}{k^2} \frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)}{\sqrt{p^2-k^2}} \\
 & p\sqrt{p^2-k^2} B - \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) D = -p
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} & \frac{K^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) B - p\sqrt{p^2-K^2} D = \frac{K^2}{k^2} \frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)}{\sqrt{p^2-k^2}} \\ & p\sqrt{p^2-k^2} B - \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) D = -p \end{aligned}} \right) \dots\dots\dots (A \cdot 9)$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{d} \left[\frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2}{\sqrt{p^2-K^2}} + p^2\sqrt{p^2-k^2} \right] = \frac{-1}{\sqrt{p^2-K^2}} + \frac{2\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2}{4\sqrt{p^2-K^2}} \\
 B &= \frac{1}{d} \left[\frac{k^2}{K^2} p \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) + \frac{k^2}{K^2} \frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) p\sqrt{p^2-K^2}}{\sqrt{p^2-k^2}} \right] \\
 &= -\frac{2k^2}{4K^2} p \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) , \\
 d &= \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 - p^2\sqrt{p^2-k^2} \sqrt{p^2-K^2} ,
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} A &= \frac{1}{d} \left[\frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2}{\sqrt{p^2-K^2}} + p^2\sqrt{p^2-k^2} \right] = \frac{-1}{\sqrt{p^2-K^2}} + \frac{2\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2}{4\sqrt{p^2-K^2}} \\ B &= \frac{1}{d} \left[\frac{k^2}{K^2} p \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) + \frac{k^2}{K^2} \frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) p\sqrt{p^2-K^2}}{\sqrt{p^2-k^2}} \right] \\ &= -\frac{2k^2}{4K^2} p \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) , \\ d &= \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2 - p^2\sqrt{p^2-k^2} \sqrt{p^2-K^2} , \end{aligned}} \right) \dots\dots\dots (A \cdot 10)$$

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{2K^2}{k^2 d} p \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) = -\frac{K^4}{k^4} C , \\
 B &= \frac{1}{d} \left[\frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2}{\sqrt{p^2-k^2}} + p^2\sqrt{p^2-K^2} \right] = \frac{-1}{\sqrt{p^2-k^2}} + 2 \frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2}{4\sqrt{p^2-k^2}}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} D &= \frac{2K^2}{k^2 d} p \left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right) = -\frac{K^4}{k^4} C , \\ B &= \frac{1}{d} \left[\frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2}{\sqrt{p^2-k^2}} + p^2\sqrt{p^2-K^2} \right] = \frac{-1}{\sqrt{p^2-k^2}} + 2 \frac{\left(\frac{k^2}{2} - p^2 \right)^2}{4\sqrt{p^2-k^2}} \end{aligned}} \right) \dots\dots\dots (A \cdot 11)$$

それ故,

$$\begin{aligned}
 L(P, Q) &= \frac{i}{4} \{ H_0^{(2)}(KR) + H_0^{(2)}(KR') \} \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')} \cos px}{4\sqrt{p^2-K^2}} \left(\frac{k^2}{2} - p^2\right)^2 dp, \quad R' = \sqrt{x' + (y+y')^2} \\
 \\
 M(P, Q) &= \frac{i}{4} \{ H_0(kR) + H_0(kR') \} \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')} \left(\frac{k^2}{2} - p^2\right)^2 \cos x}{4\sqrt{p^2-k^2}} dp, \quad \dots (A-12) \\
 \\
 N(P, Q) &= -\frac{k^2}{\pi K^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}y' - \sqrt{p^2-k^2}y} p \left(\frac{k^2}{2} - p^2\right) \sin px}{4} dp, \\
 \\
 O(P, Q) &= \frac{K^2}{\pi k^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}y - \sqrt{p^2-k^2}y'} p \left(\frac{k^2}{2} - p^2\right) \sin px}{4} dp,
 \end{aligned}$$

NとOを比較すると,

$$\left(\frac{k}{K}\right)^4 O(P, Q) = N(Q, P), \quad \dots (A-13)$$

またQ点が自由表面上にある時は次式の関係がある。

$$\left. \begin{aligned}
 L_{x'y'}(P, Q) + \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{k^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) O(P, Q) &= 0 \\
 O_{x'y'}(P, Q) - \frac{K^2}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) L(P, Q) &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{for } y' = 0, \dots (A-14)$$

$$\left. \begin{aligned}
 N_{x'y'}(P, Q) + \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{k^2}{K^2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) M(P, Q) &= 0 \\
 M_{x'y'}(P, Q) - \frac{K^2}{k^2} \left(\frac{K^2}{k^2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) N(P, Q) &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{for } y' = 0, \dots (A-15)$$

i) 積分表示

(A・12) の表現は数値積分に向いてないので少し変形しよう。

まず, Δ は $p = \pm K_R$ に零点をもつ。

$$\Delta = \left(\frac{k^2}{2} - p^2\right)^2 - p^2 \sqrt{p^2 - k^2} \sqrt{p^2 - K^2}$$

$$\xrightarrow{p \rightarrow K_R} (p^2 - K_R^2) k^2 A(K_R) \quad , \quad \dots\dots\dots (A \cdot 16)$$

ν	σ	$(\frac{K}{k})^2$	K_R/k'	A
1/2	1/3	1/4	1.072	
1/3	1/4	1/3	1.088	

$$\nu = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \quad , \quad \left(\frac{K}{k}\right)^2 = \frac{1 - \nu}{2}$$

なお, $(p/k)^2 = x$ として

$$A = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta}{k^4}\right) \Bigg|_{x=(p/K_R)^2} = (2x-1) - \sqrt{x-1} \sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}$$

$$- \frac{x}{2} \left(\frac{\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}}{\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}} \right)$$

$$= (2x-1) - \frac{1}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}} \{ 2(x-1)(x-\frac{1-\nu}{2}) + x(x-\frac{1-\nu}{2}) + x(x-1) \}$$

$$= (2x-1) - \frac{2x^2 - \frac{3}{2}(3-\nu)x + \frac{3}{2}(1-\nu)}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}} =$$

$$= (2x-1) - \frac{x \{ 2x^2 - \frac{3}{2}(3-\nu)x + \frac{3}{2}(1-\nu) \}}{(x-\frac{1}{2})^2} \quad , \quad \dots\dots\dots (A \cdot 17)$$

$$\therefore \Delta = 0 \text{ 故} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}$$

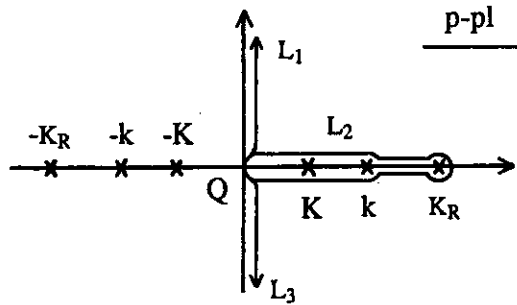
さて、これらの積分を今

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-qy} \cos px \frac{F dp}{A}, \\ J &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-qy} \sin px \frac{F dp}{A}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A \cdot 18)$$

で代表させて、積分表示を考えよう。

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i px - qy} \frac{F}{A} dp + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i px - qy} \frac{F}{A} dp$$

と書けるが、以下 $x > 0$ ($y > 0$) と考えよう。



そうして図のような積分路を考えると、

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} e^{i px - qy} \frac{F}{A} dp + \frac{1}{2\pi} \int_{L_2 + L_3} e^{-i px - qy} \frac{F}{A} dp$$

と変形すると、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} e^{i px - qy} \frac{F}{A} dp + \frac{1}{2\pi} \int_{L_3} e^{-i px - qy} \frac{F}{A} dp \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-mx - q(im)y} \frac{F(im)}{A(im)} dm + \frac{-i}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-mx - q(-im)y} \frac{F(-im)}{A(-im)} dm, \dots\dots (A \cdot 19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(im) &= \left(\frac{k^2}{2} + m^2\right)^2 - m^2 \sqrt{(m^2 + k^2)(m^2 + K^2)}, \\ &= A(-im) \end{aligned}$$

K_R の回りの留数は (A・16) により,

$$I_2 = -i \frac{e^{-iK_R x - q(K_R)y} F(K_R)}{2K_R k^2 A(K_R)}, \quad \dots\dots\dots (A\cdot 20)$$

その他の積分は $p = k \cos \theta$ とおいて,

$$I_3 = \frac{+1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx \cos \theta - q(k \cos \theta)y} \frac{F(k \cos \theta) k \sin \theta d\theta}{A(k \cos \theta)},$$

$$\begin{aligned} A(k \cos \theta) &= k^4 \left[\left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)^2 - i \cos^2 \theta \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta - \frac{1-\nu}{2}} \right] \\ &= k^4 \left[\left(\frac{\cos 2\theta}{2} \right)^2 - i \sin \theta \cos^2 \theta \sqrt{\cos^2 \theta - \frac{1-\nu}{2}} \right] \end{aligned}$$

for $\cos \theta > \frac{1-\nu}{2}$, (A・21)

$$= k^4 \left[\left(\frac{\cos 2\theta}{2} \right)^2 \pm \sin \theta \cos^2 \theta \sqrt{\frac{1-\nu}{2} - \cos^2 \theta} \right]$$

for $\cos \theta < \frac{1-\nu}{2} \begin{cases} (+) \text{ for } \theta > 0 \\ (-) \text{ for } \theta < 0 \end{cases}$

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad \dots\dots\dots (A\cdot 22)$$

(A・12) に適用すると,

$$L'' = L - \frac{i}{4} \{ H_0^{(2)}(K_R) + H_0^{(2)}(K_R') \}$$

$$= \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-mx} \cos[\sqrt{m^2 + K^2}(y+y')] \frac{(m^2 + \frac{k^2}{2})^2 dm}{d(im)\sqrt{m^2 + K^2}}$$

$$+ \frac{(K_R^2 - \frac{k^2}{2})^2 e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - K^2}(y+y')}}{2i k^2 K_R A(K_R) \sqrt{K_R^2 - K^2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx \cos \theta - (y+y')\sqrt{k^2 \cos^2 \theta - K^2}} \frac{(\frac{k^2}{2} - k^2 \cos^2 \theta)^2 k \sin \theta d\theta}{d(k \cos \theta) \sqrt{k^2 \cos^2 \theta - K^2}}$$

\dots\dots\dots (A・23)

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 \cos^2 \theta - K^2} &= i \sqrt{K^2 - k^2 \cos^2 \theta} && \text{for } K > k \cos \theta, \theta > 0, \\ &= -i \sqrt{K^2 - k^2 \cos^2 \theta} && \text{for } K > \cos \theta, \theta < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'' &= M - \frac{i}{4} \{ H_0^{(2)}(kR) + H_0^{(2)}(kR') \} \\ &= \frac{i}{\pi} \int_0^\infty e^{-mx} \cos \{ (\sqrt{m^2 + k^2}(y+y')) \} \frac{(m^2 + \frac{k^2}{2})^2 dm}{A(im) \sqrt{m^2 + k^2}} \\ &\quad + \frac{(K_R^2 - \frac{k^2}{2})^2 e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - k^2}(y+y')}}{2i K_R k^2 A(K_R) \sqrt{K_R^2 - k^2}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ik(x \cos \theta + \sqrt{y+y'} \sin \theta)} (\frac{k^2}{2} - k^2 \cos^2 \theta)^2 d\theta}{A(k \cos \theta)}, \end{aligned} \tag{A-24}$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{-mx} dm}{A(im)} [F(im) e^{-q(im)y} + F(-im) e^{-q(-im)y}],$$

$$J_2 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{(K_R)} \frac{e^{-ipK - qy} F(K_1)}{A} dp = \frac{F(K_R) e^{-iK_R x - q(K_R)y}}{2K_R k^2 A(K_R)},$$

$$J_3 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ikx \cos \theta - q(k \cos \theta)y} F(k \cos \theta) k \sin \theta d\theta}{A(k \cos \theta)},$$

..... (A-25)

$$N(P, Q) = -\frac{k^2}{2\pi i K^2} \int_0^\infty \frac{e^{-mx}}{A(im)} \left[e^{-i\sqrt{m^2+k^2}y - i\sqrt{m^2+K^2}y'} e^{i\sqrt{m^2+k^2}y' + \sqrt{m^2+K^2}y'} \right]$$

$$N(P, Q) = \frac{+k^2}{\pi K^2} \int_0^\infty e^{-mx} m \left(\frac{k^2}{2} + m^2 \right) \sin(\sqrt{m^2+k^2}y + \sqrt{m^2+K^2}y') \frac{dm}{A(im)}$$

$$- \frac{\left(\frac{k^2}{2} - K_R^2\right)}{2K^2 A(K_R)} e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - K^2}y' - \sqrt{K_R^2 - k^2}y}$$

$$+ \frac{ik^2}{2\pi K^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx \cos \theta - \sqrt{k^2 \cos^2 \theta - K^2}y' - ik y \sin \theta} \frac{k \cos \theta \left(\frac{k^2}{2} - k^2 \cos^2 \theta\right) k \sin \theta}{A(k \cos \theta)} d\theta, \quad \dots (A \cdot 26)$$

$$O(P, Q) = -\frac{K^2}{\pi k^2} \int_0^\infty e^{-mx} m \left(\frac{k^2}{2} + m^2 \right) \sin\{\sqrt{m^2+k^2}y' + \sqrt{m^2+K^2}y\} \frac{dm}{A(im)}$$

$$+ \frac{K^2 \left(\frac{k^2}{2} - K_R^2\right)}{2k^4 A(K_R)} e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - K^2}y - \sqrt{K_R^2 - k^2}y'}$$

$$- \frac{ik^2}{2\pi k^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx \cos \theta - ik y' \sin \theta - \sqrt{k^2 \cos^2 \theta - K^2}y} \frac{k^4 \cos \theta \left(\frac{1}{2} - \cos^2 \theta\right) \sin \theta d\theta}{A(k \cos \theta)}, \quad \dots (A \cdot 27)$$

ii) k が小さい時, あるいは x, y が小さい時はこれらの積分は p -平面で p の大きい所の値で決定される。またハンケル関数の部分はよくわかっているから除いて考えよう。

(A・7), (A・10), (A・11) から,

$$\left. \begin{aligned} A &\xrightarrow{p \gg k \rightarrow 0} -\frac{k^2 - K^2}{2} p^2 = -\frac{1+\nu}{4} k^2 p^2, \\ A + \frac{1}{\sqrt{p^2 + k^2}} &\rightarrow -\frac{8}{1+\nu} \frac{p}{k^2}, \\ B + \frac{1}{\sqrt{p^2 - k^2}} &\rightarrow -\frac{8}{1+\nu} \frac{p}{k^2}, \\ C &\rightarrow -\frac{16}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{p}{k^2}, \\ D &\rightarrow +4 \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{p}{k^2}, \end{aligned} \right\} \dots (A \cdot 28)$$

となるが,

$$\int_0^{\infty} e^{-py+ipx} dp = \frac{y+ix}{x^2+y^2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-py+ipx} p dp = \frac{(y^2-x^2)+2ixy}{(x^2+y^2)^2},$$

であるから (A・7) より,

$$\begin{aligned} L'' &\rightarrow + \frac{4 \{ (x-x')^2 - (y+y')^2 \}}{\pi (1+\nu) k^2 R'^4}, \\ M'' &\rightarrow \frac{4 \{ (x-x')^2 - (y+y')^2 \}}{\pi (1+\nu) k^2 R'^4}, \\ N &\rightarrow - \frac{16 (x-x') (y+y')}{\pi (1-\nu^2) (R')^4 k^2}, \\ O &\rightarrow \frac{4 (1-\nu) (x-x') (y+y')}{\pi (1+\nu) k^2 (R')^4}, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A\cdot 29)$$

iii) 漸近展開

(A・23) ~ (A・27)の積分表示において, x, y が充分大きいとすると右辺第1項の積分はすべて $O(\frac{1}{R})$ 以下の項であるから無視出来るので結局第3項の積分を定常点法によって評価すればよい。

その為には定常点の近くで次の積分がわかればよい。

$$I = \int F(\theta) e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\theta, \quad \dots\dots\dots (A\cdot 30)$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{2} > \varphi > 0$$

の場合のみ考えよう。

まず I については, $x \cos \theta + y \sin \theta = r \cos(\theta - \varphi)$ であるから $\frac{\pi}{2} > \theta = \varphi > 0$ が定常点であるから

$$I = e^{-ikr} F(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{+\frac{i}{2}kr t^2} dt = \sqrt{\frac{2\pi i}{kr}} F(\varphi) e^{-ikr}, \quad \dots\dots\dots (A\cdot 31)$$

(A・23) の場合は $k \cos \theta$ を $K \cos \theta'$ とおきかえれば上と同じになる。(p の実軸上 (k, K) の区間には定常点はない。)

$$\begin{aligned}
 L'' &\rightarrow \frac{(K_R^2 - \frac{k^2}{2})^2 e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - K^2} y + iK_R x' - \sqrt{K_R^2 - K^2} y'}}{2i k^2 K_R A(K_R) \sqrt{K_R^2 - K^2}} \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi i K r}} \frac{(\frac{k^2}{2} - K^2 \cos^2 \varphi)}{\Delta(K \cos \varphi)} e^{-iK r + iK(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)} \\
 M'' &\rightarrow \frac{(K_R^2 - \frac{k^2}{2})^2 e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - k^2} y + iK_R x' - \sqrt{K_R^2 - k^2} y'}}{2i K_R k^2 A(K_R) \sqrt{K_R^2 - k^2}} \\
 &+ \frac{k^4 (\frac{1}{2} - \cos^2 \theta)^2 e^{-i k r + i k(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)}}{\sqrt{2\pi i k r} \Delta(k \cos \varphi)} \\
 N &\rightarrow - \frac{(\frac{k^2}{2} - K_R^2)^2 e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - k^2} y + iK_R x' - \sqrt{K_R^2 - K^2} y'}}{2K^2 A(K_R)} \\
 &+ \frac{i \sqrt{i}}{\sqrt{2\pi k r}} \cdot \frac{k^6}{K^2} \frac{(\frac{1}{2} - \cos^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi e^{-i k r + i k x' \cos \varphi - \sqrt{k^2 \cos^2 \varphi - K^2} y'}}{\Delta(k \cos \varphi)} \\
 O &\rightarrow \frac{K^2 (\frac{k^2}{2} - K_R^2) e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2 - K^2} y + iK_R x' - \sqrt{K_R^2 - k^2} y'}}{2k^4 A(K_R)} \\
 &+ \frac{i \sqrt{i}}{\sqrt{2\pi K r}} \frac{K^4}{k^2} \frac{(\frac{k^2}{2} - K^2 \cos^2 \theta) e^{-iK r + iK x' \cos \varphi - \sqrt{K^2 \cos^2 \varphi - k^2} y'}}{\Delta(K \cos \varphi)} \sin \varphi \cos \varphi
 \end{aligned}$$

$$\Delta(K \cos \varphi) = \left(\frac{k^2}{2} - K^2 \cos^2 \varphi \right)^2 \pm K^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \sqrt{k^2 - K^2 \cos^2 \varphi} \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} + & \text{for } \varphi > 0 \\ - & \text{for } \varphi < 0 \end{pmatrix}$$

以上 …………… (A・32)

(注意) N と O は $y' \geq y$ で横波, 縦波交替する。

於是,

$$\frac{i}{4} H_0(kR) \rightarrow \frac{i\sqrt{i}}{2\sqrt{2\pi k r}} e^{-ikr+ik(x'\cos\varphi+y'\sin\varphi)},$$

$$\frac{i}{4} H_0(kR') \rightarrow \frac{i\sqrt{i}}{2\sqrt{2\pi k r}} e^{-ikr+ik(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)},$$

附録B レーリー波の放射エネルギー

(3·6), (3·7)より x の正方向に進むレーリー波は,

$$\left. \begin{aligned} r &= \left(\frac{i}{2} A' G + \frac{C'}{2} F \left(\frac{K}{k} \right)^4 \right) e^{-i K_R x - \sqrt{K_R^2 - K^2} y} \\ \omega &= \left(\frac{i}{2} B' F + \frac{D'}{2} G \left(\frac{k}{K} \right)^4 \right) e^{-i K_R x - \sqrt{K_R^2 - k^2} y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 1)$$

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{2 \left(\frac{k^2}{2} - K_R^2 \right)^2}{d' \sqrt{K_R^2 - K^2}} \quad , \quad B' = \frac{2 \left(\frac{k^2}{2} - K_R^2 \right)^2}{d' \sqrt{K_R^2 - k^2}} \quad , \\ C' &= \frac{2 k^2 K_R \left(K_R^2 - \frac{k^2}{2} \right)}{d' K^2} \quad , \quad D' = \frac{2 K_R \left(K_R^2 - \frac{k^2}{2} \right) K^2}{d' K^2} \quad , \\ A' &= \lim_{p \rightarrow K_R} \left(\frac{d(p)}{p - K_R} \right) \quad , \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 2)$$

$$\begin{aligned} B'/A' &= \sqrt{K_R^2 - K^2} / \sqrt{K_R^2 - k^2} \quad , \quad B'/C' = + \frac{\left(K_R^2 - \frac{k^2}{2} \right)}{\sqrt{K_R^2 - k^2} K_R} \left(\frac{K}{k} \right)^2 \\ C'/A' &= -B'/D' = \left(\frac{k}{K} \right)^2 \frac{K_R \sqrt{K_R^2 - K^2}}{K_R^2 - \frac{k^2}{2}} \quad , \quad \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 3) \\ D'/C' &= - \left(K/k \right)^4 \quad , \quad D'/A' = - \left(\frac{K}{k} \right)^2 \left(\frac{K_R \sqrt{K_R^2 - K^2}}{K_R^2 - \frac{k^2}{2}} \right) \quad , \end{aligned}$$

それ故、今

$$\left. \begin{aligned} r &= i a e^{-i K_R x - \sqrt{K_R^2 - K^2} y} \\ \omega &= b e^{-i K_R x - \sqrt{K_R^2 - k^2} y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 4)$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned}
 a &= \frac{A'}{2} \left(G - i \frac{D'}{A'} F \right) \\
 b &= -\frac{C'}{2} \left(G - i \frac{D'}{A'} F \right) \\
 a/b &= (A'/D') \left(\frac{K}{k} \right)^4 = -A'/C'
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 5)$$

$$u_1 \Big|_{y=0} = -\frac{1}{K^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y=0} = \left(-\frac{a}{K^2} K_R - \frac{\sqrt{K_R^2 - k^2}}{k^2} b \right) e^{-iK_R x}$$

$$u_2 \Big|_{y=0} = +i \left[\frac{\sqrt{K_R^2 - K^2}}{K^2} a + \frac{K_R}{k^2} b \right] e^{-iK_R x}$$

$$\begin{aligned}
 u_1 \Big|_{y=0} &= -a \frac{K_R}{k^2} \left(1 - \frac{K^2 \sqrt{K_R^2 - k^2}}{k^2 K_R} \cdot \frac{k^2}{K^2} \frac{K_R \sqrt{K_R^2 - K^2}}{K_R^2 - \frac{k^2}{2}} \right) e^{-iK_R x} \\
 &= -\frac{a k^2}{2K^2 K_R} e^{-iK_R x} \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 \Big|_{y=0} &= \frac{i \sqrt{K_R^2 - K^2}}{K^2} a \left(1 - \frac{K_R^2 K^2}{k^2 \sqrt{K_R^2 - K^2}} \cdot \frac{k^2}{K^2} \frac{\sqrt{K_R^2 - K^2}}{K_R^2 - \frac{k^2}{2}} \right) e^{-iK_R x} \\
 &= -i \frac{\sqrt{K_R^2 - K^2} k^2 a}{2K^2 \left(K_R^2 - \frac{k^2}{2} \right)} e^{-iK_R x} \quad ,
 \end{aligned}$$

$$u_2 / (i u_1) = \frac{\sqrt{K_R^2 - K^2} K_R}{\left(K_R^2 - \frac{k^2}{2} \right)} \quad , \quad \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 6)$$

さて、ある断面を通じて x の正方向に伝わる単位時間のエネルギーは、

$$W_R = \frac{\rho \omega^3}{4i k^2} \int_0^\infty (u_1 \bar{\tau}_1 + u_2 \bar{\tau}_2 - \bar{u}_1 \tau_1 - \bar{u}_2 \tau_2) dy, \quad \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 7)$$

$$\begin{aligned} u_1 \bar{\tau}_1 - \bar{u}_1 \tau_1 + u_2 \bar{\tau}_2 - \bar{u}_2 \tau_2 &= 2(\bar{u}_1 u_2 - u_1 \bar{u}_2)_y \\ &\quad + \frac{k^2}{K^2} (u_1 \bar{r} - \bar{u}_1 r) + (u_2 \bar{\omega} - \bar{u}_2 \omega) \\ &= 2(\bar{u}_1 u_2 - u_1 \bar{u}_2)_y + \frac{k^2}{K^4} (r \bar{r}_x - \bar{r} r_x) + \frac{1}{k^2} (\omega \bar{\omega}_x - \bar{\omega} \omega_x) \\ &\quad + \frac{1}{K^2} (\bar{r} \omega - r \bar{\omega})_y \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{W_R}{\frac{\rho}{4} \omega^3 a \bar{a}} = \frac{K_R}{K^4 \sqrt{K_R^2 - K^2}} \left(1 + \frac{K_R^2 - K^2}{K_R^2 - k^2} \right) - \frac{\sqrt{K_R^2 - K^2} (2K_R^2 + k^2)}{K^4 K_R (K_R^2 - \frac{k^2}{2})}, \quad \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 8)$$

$$\frac{W_R}{\frac{\rho}{2} \omega^3 \frac{a \bar{a}}{k^4}} = \alpha - \beta,$$

$$\alpha = \frac{K_R}{2\sqrt{K_R^2 - K^2}} \left(1 + \frac{K_R^2 - K^2}{K_R^2 - k^2} \right) \left(\frac{k}{K} \right)^4$$

$$\beta = \frac{\sqrt{K_R^2 - K^2} (K_R^2 + \frac{k^2}{2})}{K_R (K_R^2 - \frac{k^2}{2})} \left(\frac{k}{K} \right)^4$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{RK} &= \frac{W_{RK}}{\frac{\rho}{8} \omega^3 \frac{|G|^2}{K^4}} = 2 \times 4 \left(\frac{K}{k} \right)^4 (\alpha - \beta) \left(\frac{A'}{2} \right)^2 \\ Q_{Rk} &= \frac{W_{Rk}}{\frac{\rho}{8} \omega^3 \frac{|F|^2}{k^4}} = 2 \times 4 (\alpha - \beta) \left(\frac{D'}{2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x \text{ の正負両方向の} \\ \text{波があるから 2 倍} \\ \dots\dots\dots (\text{B} \cdot 9) \end{array}$$

レーリー波と円筒発散波のエネルギーの比率を計算して見よう。

まず、無指向性の縦波のみあるとすると (6・3) を 2 つに別けて (B・9) の定義を使い、

$$\frac{W}{\frac{\rho}{8} \omega^3 \frac{|G|^2}{K^4}} = Q_K = Q_{KK} + Q_{RK} \quad , \quad (\text{B}\cdot 10)$$

$$Q_{KK} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[|1 - iAK \sin \varphi|^2 + \left(\frac{k}{K}\right)^4 |Dk \sin \varphi|^2 \right] d\varphi \quad , \quad (\text{B}\cdot 11)$$

横波のみとすると同様にして、

$$\frac{W}{\frac{\rho}{8} \omega^3 \frac{|F|^2}{k^4}} = Q_k = Q_{kk} + Q_{kk} \quad , \quad (\text{B}\cdot 12)$$

$$Q_{kk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[|1 - iBk \sin \varphi|^2 + \left(\frac{K}{k}\right)^4 |CK \sin \varphi|^2 \right] d\varphi \quad , \quad (\text{B}\cdot 13)$$

無限に広がっている場合は $Q_K = Q_k = 1$ となる。

	$\nu = \frac{1}{2}$ $\sigma = 1/3$	$\nu = 1/3$ $\sigma = 1/4$	
K_R	1.0724	1.0877	
K_R^2	1.1500	1.1830	
$\sqrt{K_R^2 - k^2} / k$.3873	.4278	
$\sqrt{K_R^2 - K^2} / k$.9487	.9218	
K^2 / k^2	1/4	1/3	
A' / k^3	- 1.5243	- 1.2504	
$A' / 2$	- .2922	- .4047	
$B' / 2$	- .7157	- .8721	
$C' / 2$	- 1.8292	- 1.7823	
$D' / 2$.1143	.1980	
C' / D'	16	9	
$-b/a = C'/A' = -B'/D'$	6.261	4.404	
B' / A'	2.4495	2.1547	
$u_2 / i u_1$	1.5654	1.4678	
α	63.302	29.963	
β	35.927	18.794	
$\alpha - \beta$	27.375	11.169	
$(\alpha - \beta) (\frac{A'}{2})^2$	2.3373	1.8293	
$(\alpha - \beta) (\frac{D'}{2})^2$.3576	.4379	
$(\alpha - \beta) (\frac{D'}{2})^2 \times 4 \times 2$	2.8608 (73%)	3.5032 (77%) Q_{Rk}	
$(\alpha - \beta) (\frac{A'}{2})^2 \times 4 \times (\frac{1}{16} \text{ or } \frac{2}{9})$	1.1687 (56%)	1.6260 (68%) Q_{RK}	
	1.0336	1.0215	Q_{kk}
	.9097	.7650	Q_{KK}
	3.8944	4.5247	$Q_k + Q_{Rk}$
	2.0784	2.3910	$Q_K + Q_{RK}$

$$(K/k)^{**2} = 0.2500$$

N	Theta	$(1 - i A_K \sin x)^2$	$(1 - i B_k \sin x)^2$	$(C_k \sin x)^2$	$(D_K \sin x)^2$
1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	3.00	0.02724	0.12888	0.00915	0.04276
3	6.00	0.08919	0.48529	0.03061	0.15880
4	9.00	0.16295	0.99348	0.05796	0.31741
5	12.00	0.23381	1.56465	0.08739	0.48276
6	15.00	0.29345	2.12462	0.11675	0.62513
7	18.00	0.33795	2.62535	0.14485	0.72563
8	21.00	0.36622	3.04332	0.17103	0.77560
9	24.00	0.37894	3.37264	0.19483	0.77382
10	27.00	0.37774	3.61798	0.21589	0.72372
11	30.00	0.36482	3.78947	0.23386	0.63158
12	33.00	0.34255	3.89974	0.24837	0.50579
13	36.00	0.31337	3.96228	0.25908	0.35728
14	39.00	0.27958	3.99088	0.26566	0.20175
15	42.00	0.24331	3.99928	0.26783	0.06544
16	45.00	0.20645	4.00000	0.26544	0.00000
17	48.00	0.17060	3.99864	0.25845	0.12337
18	51.00	0.13702	3.96652	0.24697	0.74110
19	54.00	0.10669	3.71611	0.23131	2.68901
20	57.00	0.08024	2.51146	0.21193	7.50921
21	60.00	0.05800	0.00000	0.18947	12.00000
22	63.00	0.04003	0.37988	0.16473	3.62690
23	66.00	0.02613	0.31796	0.13864	2.54395
24	69.00	0.01593	0.21607	0.11220	1.91067
25	72.00	0.00889	0.12830	0.08648	1.42288
26	75.00	0.00441	0.06619	0.06254	1.01236
27	78.00	0.00185	0.02848	0.04137	0.66475
28	81.00	0.00060	0.00934	0.02387	0.38248
29	84.00	0.00012	0.00189	0.01081	0.17295
30	87.00	0.00001	0.00012	0.00273	0.04371
31	90.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

$$Q_K = 0.76498$$

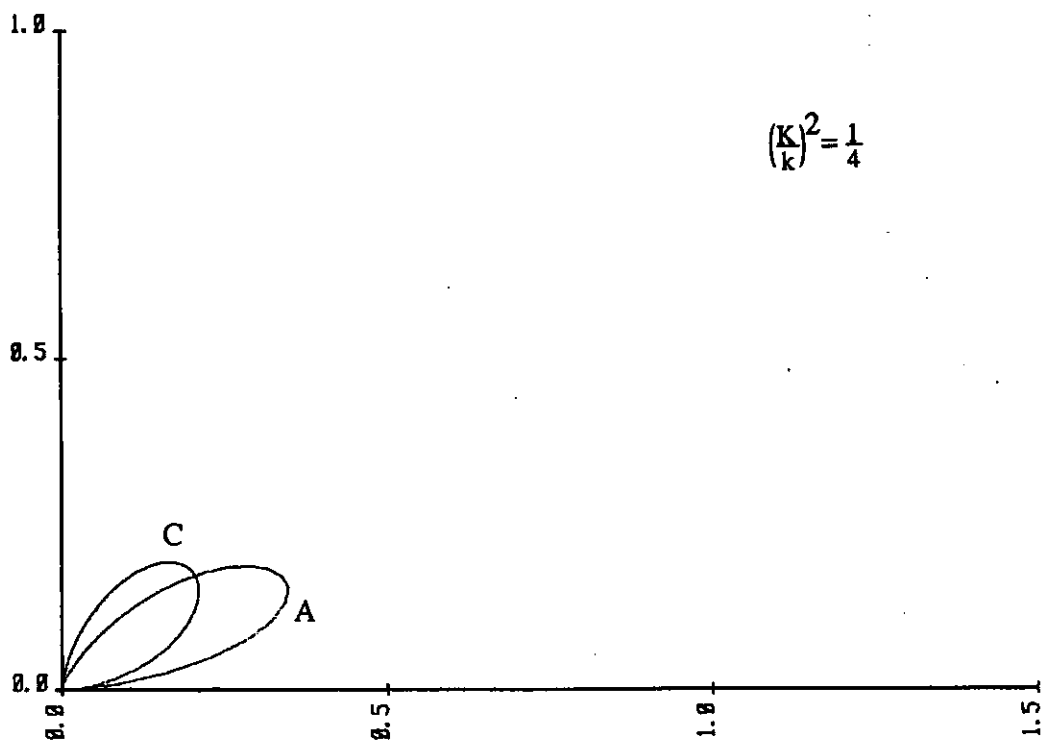
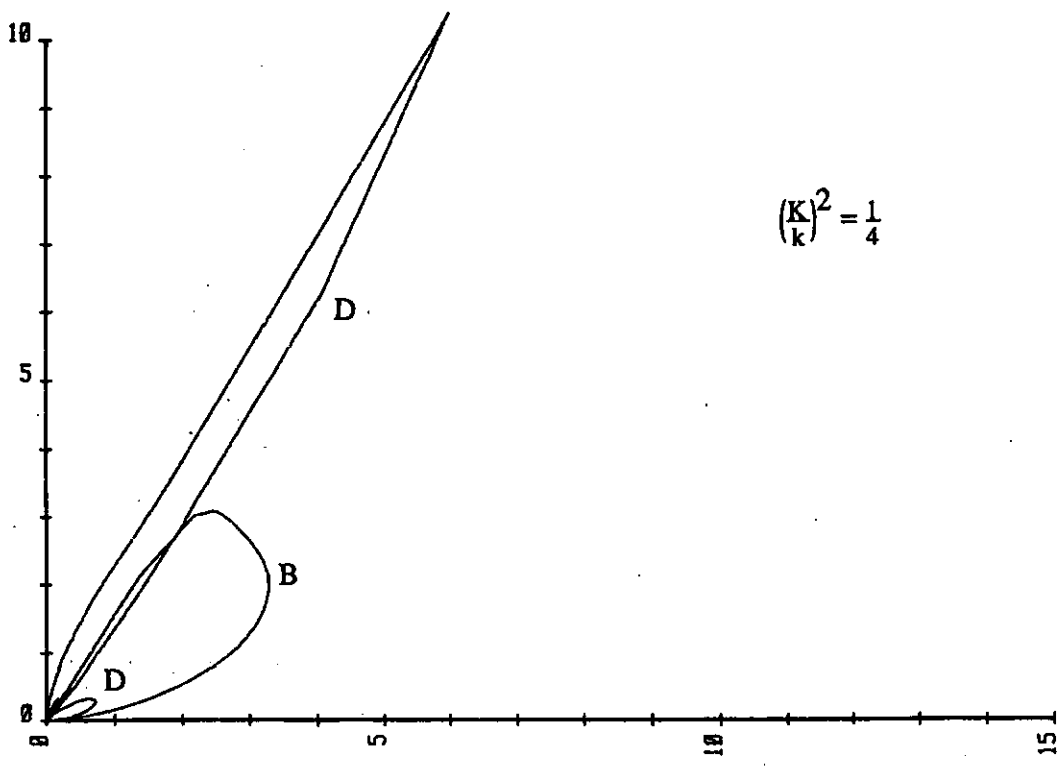
$$Q_k = 1.02148$$

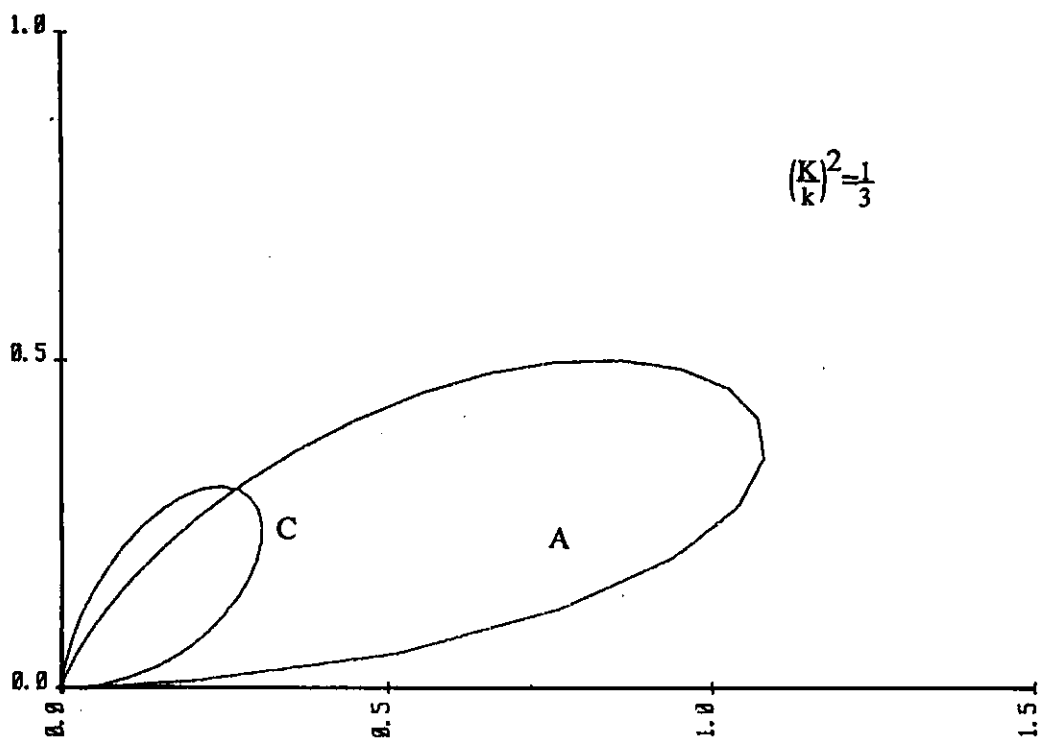
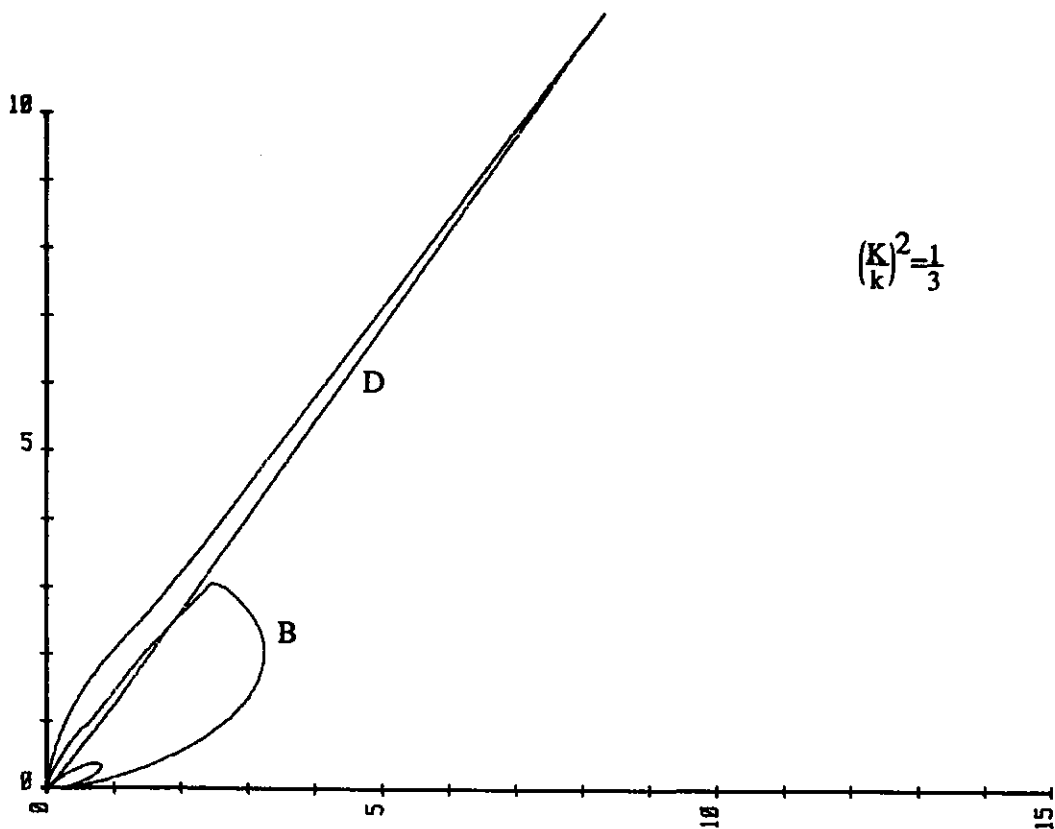
$(K/k)**2$ 0.3333

N	Theta	$(1-iA_K \sin x)$	$(1-iB_k \sin x)$	$(C_k \sin x)$	$(D_K \sin x)$
1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	3.00	0.20457	0.11492	0.02589	0.04292
3	6.00	0.51737	0.43655	0.06790	0.16100
4	9.00	0.77844	0.90519	0.10842	0.32673
5	12.00	0.96324	1.44690	0.14540	0.50610
6	15.00	1.07836	1.99467	0.17976	0.66844
7	18.00	1.13605	2.50000	0.21255	0.79180
8	21.00	1.14797	2.93465	0.24439	0.86370
9	24.00	1.12398	3.28694	0.27540	0.87954
10	27.00	1.07234	3.55652	0.30527	0.84015
11	30.00	1.00000	3.75000	0.33333	0.75000
12	33.00	0.91298	3.87785	0.35868	0.61621
13	36.00	0.81654	3.95261	0.38023	0.44888
14	39.00	0.71534	3.98809	0.39689	0.26369
15	42.00	0.61342	3.99900	0.40759	0.09035
16	45.00	0.51429	4.00000	0.41143	0.00000
17	48.00	0.42083	3.99764	0.40777	0.21318
18	51.00	0.33532	3.92288	0.39627	1.70693
19	54.00	0.25939	2.50000	0.37699	14.20820
20	57.00	0.19404	1.14658	0.35041	4.35579
21	60.00	0.13965	1.00000	0.31738	3.00000
22	63.00	0.09603	0.74406	0.27918	2.45084
23	66.00	0.06250	0.50748	0.23740	2.04505
24	69.00	0.03801	0.31849	0.19387	1.67098
25	72.00	0.02117	0.18151	0.15058	1.30770
26	75.00	0.01049	0.09141	0.10959	0.96067
27	78.00	0.00439	0.03874	0.07288	0.64453
28	81.00	0.00141	0.01258	0.04223	0.37626
29	84.00	0.00028	0.00253	0.01917	0.17175
30	87.00	0.00002	0.00016	0.00485	0.04363
31	90.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Q_K 0.90972

Q_k 1.03366





附録C コッチン関数

(4・1)に(1・2), (1・5), (1・8), (1・10)を代入して部分積分すると,
まず,

$$G(p) = \int_C \left[-K^2 \left(u_1 \frac{\partial x}{\partial n} + u_2 \frac{\partial y}{\partial n} \right) E - \frac{K^2}{k^2} \omega \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial E}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - r \left(\frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial E}{\partial y} \right) \right] ds ,$$

$$r \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{K^2}{k^2} \omega \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{K^2}{k^2} \left(\tau_1 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial s} \right)$$

$$r \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{K^2}{k^2} \omega \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{K^2}{k^2} \left(\tau_2 - 2 \frac{\partial u_1}{\partial s} \right)$$

$$G(p) = \frac{K^2}{k^2} \int_C \left[-k^2 \left(u_1 \frac{\partial x}{\partial n} + u_2 \frac{\partial y}{\partial n} \right) E - \left(\tau_1 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) E_x - \left(\tau_2 - 2 \frac{\partial u_1}{\partial s} \right) E_y \right] ds$$

$$= \frac{K^2}{k^2} \int_C \left[-\tau_1 E_x - \tau_2 E_y + u_1 \left(2 E_{xs} - k^2 \frac{\partial x}{\partial n} E \right) + u_2 \left(-2 E_{ys} - k^2 \frac{\partial y}{\partial n} E \right) \right] ds ,$$

..... (C・1)

$$E = e^{i p x - \sqrt{p^2 - k^2} y} ,$$

$$F(p) = \int_C \left[-k^2 \left(u_1 \frac{\partial x}{\partial s} + u_2 \frac{\partial y}{\partial s} \right) E' + \frac{k^2}{K^2} r \left(\frac{\partial x}{\partial s} E'_x + \frac{\partial y}{\partial s} E'_y \right) \right. \\ \left. - \omega \left(\frac{\partial x}{\partial n} E'_x + \frac{\partial y}{\partial n} E'_y \right) \right] ds$$

$$= \int_C \left[-k^2 \left(u_1 \frac{\partial x}{\partial s} + u_2 \frac{\partial y}{\partial s} \right) E' + \left(\tau_1 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) E'_y - \left(\tau_2 - 2 \frac{\partial u_1}{\partial s} \right) E'_x \right] ds$$

$$= \int_C \left[\tau_1 E'_y - \tau_2 E'_x + u_1 \left(+k^2 \frac{\partial y}{\partial n} E' - 2 E'_{xs} \right) \right. \\ \left. + u_2 \left(-k^2 \frac{\partial x}{\partial n} E' - 2 E'_{ys} \right) \right] ds ,$$

..... (C・2)

G^* , F^* についても同様である。

C が自由表面の一部である時は(3・13)に対応して u_1 , u_2 の項はなくなり,

$$G(p) = \frac{+K^2}{k^2} \int_{-1}^1 (\tau_1 E_x + \tau_2 E_y) dx, \quad \dots\dots\dots (C \cdot 3)$$

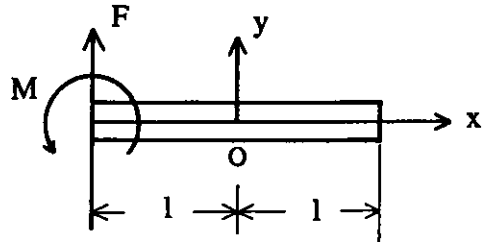
$$F(p) = \int_{-1}^1 (\tau_2 E'_x - \tau_1 E'_y) dx, \quad \dots\dots\dots (C \cdot 4)$$

$$E = e^{i p x - \sqrt{p^2 - K^2} y}, \quad E' = e^{i p x - \sqrt{p^2 - k^2} y},$$

等となる。

附録D 一様梁のイムピーダンス

右図のように一端自由で他端が上下方向に円周波数 ω 、振幅 η で、傾斜角が θ で振動している時、その剪断力は F 、モーメントが M であるとしよう。



$$EI \frac{d^4 y(x)}{dx^4} - \frac{w}{g} \omega^2 y(x) = 0 ,$$

..... (D・1)

但し、 I は断面2次モーメント、 E はヤング率、 w は単位長さの重量である。

この解は、

$$y(x) = C_1 \operatorname{sh} a \xi + C_2 \operatorname{ch} a \xi + C_3 \sin a \xi + C_4 \cos a \xi , \quad \text{..... (D・2)}$$

$$\text{但し, } a = \sqrt[4]{\frac{w \omega^2 \ell^4}{EIg}} , \quad \text{..... (D・3)}$$

$$\xi = x / \ell$$

先ず、

$$\eta = y(-\ell) = -C_1 \operatorname{sh} a + C_2 \operatorname{ch} a - C_3 \sin a + C_4 \cos a ,$$

$$\theta = \frac{dy(-\ell)}{dx} = \frac{1}{\ell} \frac{dy}{d\xi} \Big|_{-\ell} = \frac{a}{\ell} [C_1 \operatorname{ch} a - C_2 \operatorname{sh} a + C_3 \cos a - C_4 \sin a] ,$$

..... (D・4)

他端は自由であるから、

$$\left. \begin{aligned} C_1 \operatorname{sh} a + C_2 \operatorname{ch} a - C_3 \sin a - C_4 \cos a &= 0 , \\ C_1 \operatorname{ch} a + C_2 \operatorname{sh} a - C_3 \cos a + C_4 \sin a &= 0 , \end{aligned} \right\} \text{..... (D・5)}$$

この4つの式を辺々加減して、

$$\left. \begin{aligned} -2C_1 \operatorname{sh} a + 2C_4 \cos a &= \eta \\ 2C_1 \operatorname{ch} a + 2C_4 \sin a &= \ell \theta / a \\ 2C_2 \operatorname{ch} a - 2C_3 \sin a &= \eta \\ -2C_2 \operatorname{sh} a + 2C_3 \cos a &= \ell \theta / a \end{aligned} \right\} \text{..... (D・6)}$$

これから直ちに,

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{2 A_1} \left(-\eta \sin a + \frac{\ell \theta}{a} \cos a \right) \\
 C_2 &= \frac{1}{2 A_2} \left(\eta \cos a + \frac{\ell \theta}{a} \sin a \right) \\
 C_3 &= \frac{1}{2 A_2} \left(\eta \operatorname{sh} a + \frac{\ell \theta}{a} \operatorname{ch} a \right) \dots\dots\dots \textcircled{\text{D}} \cdot 7) \\
 C_4 &= \frac{1}{2 A_1} \left(\eta \operatorname{ch} a + \frac{\ell \theta}{a} \operatorname{sh} a \right)
 \end{aligned}$$

$$A_1 = \operatorname{ch} a \cos a + \operatorname{sh} a \sin a \dots\dots\dots \textcircled{\text{D}} \cdot 8)$$

$$A_2 = \operatorname{ch} a \cos a - \operatorname{sh} a \sin a$$

それ故,

$$\begin{aligned}
 M &= EI \frac{d^2 y}{d x^2} \Big|_{x=-\ell} = \frac{EI}{\ell^2} \frac{d^2 y}{d \xi^2} \Big|_{\xi=-\ell} \\
 &= \frac{EI a^2}{\ell^2} \left[-C_1 \operatorname{sh} a + C_2 \operatorname{ch} a + C_3 \sin a - C_4 \cos a \right] \\
 F &= EI \frac{d^3 y}{d x^3} \Big|_{x=-\ell} = \frac{EI}{\ell^3} a^3 \left[C_1 \operatorname{ch} a - C_2 \operatorname{sh} a - C_3 \cos a - C_4 \sin a \right], \\
 &\dots\dots\dots \textcircled{\text{D}} \cdot 9)
 \end{aligned}$$

①・7) を代入して整理すると,

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{EI a^2}{2 \ell^2 A_1 A_2} \left[\eta \operatorname{sh} 2 a \sin 2 a + \frac{\ell \theta}{a} (\operatorname{ch} 2 a \sin 2 a - \operatorname{sh} 2 a \cos 2 a) \right], \\
 F &= \frac{-EI a^3}{2 \ell^3 A_1 A_2} \left[\eta (\operatorname{sh} 2 a \cos 2 a + \operatorname{ch} 2 a \sin 2 a) + \frac{\ell \theta}{a} \operatorname{sh} 2 a \sin 2 a \right], \\
 &\dots\dots\dots \textcircled{\text{D}} \cdot 10)
 \end{aligned}$$

それ故, 今

$$\left. \begin{aligned}
 F &= i \omega \eta Z_{11}^{(i)} + i \omega \ell Z_{13}^{(i)} \\
 M &= -i \omega \eta Z_{31}^{(i)} - i \omega \theta Z_{33}^{(i)}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \textcircled{\text{D}} \cdot 11)$$

のようにイмпीडダンスを定義すると,

$$Z_{11}^{(i)} = \frac{1}{\omega} \frac{EI a^3}{2 \ell^3} \left(\frac{\text{sh } 2a \cos 2a + \text{ch } 2a \sin 2a}{\Delta_1 \Delta_2} \right), \quad \dots\dots\dots \text{D}\cdot\text{12}$$

$$Z_{13}^{(i)} = \frac{1}{\omega} \frac{EI a^2}{2 \ell^2 \Delta_1 \Delta_2} \text{sh } 2a \sin 2a, \quad \dots\dots\dots$$

$$Z_{31}^{(i)} = + \frac{i EI a^2}{\omega \cdot 2 \ell^2 \Delta_1 \Delta_2} \text{sh } 2a \sin 2a = Z_{13}^{(i)}, \quad \dots\dots\dots \text{D}\cdot\text{13}$$

$$Z_{33}^{(i)} = + \frac{i EI a}{2 \omega \ell \Delta_1 \Delta_2} (\text{ch } 2a \sin 2a - \text{sh } 2a \cos 2a), \quad \dots\dots\dots$$

$\omega \rightarrow 0$ とすると,

$$Z_{11}^{(i)} \doteq \frac{2i}{\omega} \frac{EI a^4}{\ell^3} = \frac{2i}{\omega} \frac{\ell w}{g} \omega^2 = \frac{i \omega}{g} (2 w \ell), \quad \dots\dots\dots$$

$$Z_{33}^{(i)} \doteq + \frac{i EI a}{\omega \ell} \times \frac{4}{3} a^3 = + i \omega \frac{4}{3} \frac{w \ell^3}{g}, \quad \dots\dots\dots \text{D}\cdot\text{14}$$

$$Z_{13}^{(i)} = + Z_{31} \doteq \frac{2i}{\omega} \frac{EI a^4}{\ell^2} = \frac{2i \omega}{g} (w \ell^2), \quad \dots\dots\dots$$

となって慣性力に一致する。

水波理論の要約

1983. 3. 17 別所正利

内容目次

概要	2.7 物体の微小変形
1. 序論	2.8 境界値問題の変分原理
1.1 時間領域の問題の定式化	2.9 解の一意性と Irregular Frequency
1.2 周波数領域の問題の定式化	2.10 Kramers-Kronig
1.3 力とモーメント	3. 時間領域の理論
1.4 ラグランジアンとハミルトンの原理	3.1 基本特異性
2. 周波数領域の理論	3.2 速度ポテンシャル
2.1 基本特異性	3.3 遠場
2.2 速度ポテンシャルの表現	3.4 力とモーメント, 可逆定理
2.3 遠場の漸近展開	3.5 エネルギー
2.4 境界積分方程式	3.6 運動方程式と過渡応答
2.5 力とモーメント, 可逆定理	参照文献
2.6 エネルギー定理	

概要

コーシー・ポアソン以来の水波理論の歴史は長いけれどその工学的応用の歴史は比較的浅く、また今日の隆盛を見るには電算機の出現をまたねばならなかった。

しかもその大容量化は実験解析法への応用と共に従来は主として周波数領域での計算に止まっていたものが、非線形時間領域への試行をうながしているように見える。

従来の教科書は理論の全領域を網羅しているけれども既にかなり年を経ており、また最近のものは数値計算法に重味がおかれ、理論の全体的構成において今一步の整正さが望まれる。

本要約では理論全体の構成と統一性を主として、2次元浮体の動揺問題に限るが、しかし周波数領域と平行に時間領域の理論の要約を試みる。

そのために先ず両領域間の変換とハミルトンの最小作用の原理から説き起す事にする。

それぞれの領域の理論では先ず基本特異性を導入し、それによる速度ポテンシャルの表現の種々の型を誘導する。それはまた境界積分方程式の種々の型に直接結びつく。

次に力およびモーメントあるいは一般力はラグランジアンである事とその可逆性を示し、また浮体のなす仕事との関連を導く。

このラグランジアンは前出のハミルトンの原理にも現われた訳でまた境界値問題あるいは固有値問題の変分原理における汎関数とする事が出来る。

その他、解の一意性その他応用上有用と思われる項目についても触れる事とする。

1. 序 論

1.1 時間領域の問題の定式化

右図のように座標系をとって2次元筒体Cの運動を考えよう。

速度ポテンシャルを ϕ とし速度 u ,
 v は,

$$(u, v) = -\nabla\phi(x, y, t),$$

..... (1.1.1)

のように定義するとベルヌーイの定理より, 2次の項を省略すると圧力
 p は,

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, t) = \frac{\partial\phi}{\partial t} + gy, \quad \text{..... (1.1.2)}$$

水面変位を η とすると水面では,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, 0, t) - g\eta(x, t) = 0, \quad \text{..... (1.1.3)}$$

一方, 水面の上向き速度は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) = -\frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0, t), \quad \text{..... (1.1.4)}$$

上の2式から η を消去するとよく知られた水面条件が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, 0, t) + g \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0, t) = 0, \quad \text{..... (1.1.5)}$$

の下に ϕ を求める事である。

初期条件は $t = 0$ まで,

$$\phi(x, y, t) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(x, y, t) = 0 \quad \text{for } t < 0, \quad \text{..... (1.1.6)}$$

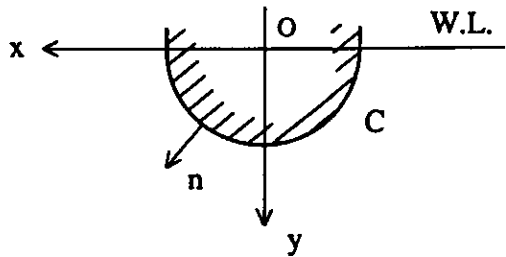
境界条件は,

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi(x, y, t) = -a_j \frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad \text{on } C, \quad \text{..... (1.1.7)}$$

左右ゆれに対し $j = 1$, $\frac{\partial x_1}{\partial n} \equiv \frac{\partial x}{\partial n}$

上下ゆれに対し $j = 2$, $\frac{\partial x_2}{\partial n} \equiv \frac{\partial y}{\partial n}$ (1.1.8)

横ゆれ(原点まわり)に対し $j = 3$, $\frac{\partial x_3}{\partial n} \equiv x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}$



\dot{a}_j は夫々の運動の速度とする。

このような解が一義的に定まる事は J. J. Stoker による証明がある。

一般にこのように波のある問題ではどのような波の存在をゆるすかを指定しなければ問題は不定となり後出の Sommerfeld の放射条件はその例であるが今の場合、それに対応する条件は初期条件 (1.1.6) である。

1.2 周波数領域の問題の定式化

一般に前節の時間領域で境界値問題をとくのは容易でなく、ラプラス変換又はフーリエ変換を行ってから問題を解くのが普通である。

この場合はフーリエ変換を行った方が物理的像が明白で、つまりすべての運動が調和振動をしている事に対応して便利である。

そこでまずフーリエ変換を次のように定義しよう。

任意の時間関数 $f(t)$ ($= 0$ for $t < 0$) について、

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \dots\dots\dots (1.2.1)$$

でフーリエ変換 $F(\omega)$ を定義すると逆に、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots (1.2.3)$$

$f(t)$ は一般に実関数であるから (1.2.1) から

$$\bar{F}(\omega) = F(-\omega), \quad \dots\dots\dots (1.2.4)$$

また, $f(t) = 0$ for $t < 0$, \dots\dots\dots (1.2.5)

と仮定したから (1.2.3) と合せて、考えるとこれは複素 ω 一面で $F(\omega)$ は下半面で正則である事を意味している。

なお、言うまでもないが $i\omega$ を s とおけばラプラス変換となる。前節の式をフーリエ変換して、先ず圧力 $P(x, y, \omega)$ は ϕ のフーリエ変換を Φ として、

$$\frac{1}{\rho} P(x, y, \omega) = i\omega \Phi(x, y, \omega), \quad \dots\dots\dots (1.2.6)$$

((1.1.2) の y は時間の関数ではない。)

$$i\omega \Phi(x, 0, \omega) - g Y(x, \omega) = 0, \quad \dots\dots\dots (1.2.7)$$

(1.1.4) は

$$i\omega Y(x, \omega) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, \omega), \quad \dots\dots\dots (1.2.8)$$

(1.1.5) は

$$-\omega^2 \Phi(x, 0, \omega) - g \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, 0, \omega) = 0, \quad \dots\dots\dots (1.2.9)$$

水深が無限とすると,

$$\frac{\omega^2}{g} = K = 2\pi/\lambda, \quad \lambda; \text{波長}, \quad \dots\dots\dots (1.2.10)$$

とにおいて上式は

$$K \Phi(x, 0, \omega) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, \omega) = 0, \quad \dots\dots\dots (1.2.11)$$

となる。

境界条件は,

$$\frac{\partial}{\partial n} \Phi(x, y, \omega) = -U_j(\omega) \frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad \text{on } C, \quad \dots\dots\dots (1.2.12)$$

$$U_j(\omega) = \int_0^\infty \dot{a}_j e^{-i\omega t} dt, \quad \dots\dots\dots (1.2.13)$$

\dot{a}_j, x_j は (1.1.8) による。

前節の初期条件 (1.1.6) に対応するものが欠けていては問題が不定となる。それはよく知られている Sommerfeld の放射条件であって、物理的には物体が波を外側へ放射する条件である。それについては次章でのべる。

このような境界値問題の解が一義的に定まるかどうかについては一部疑問が残っており後述する。さて、実際上はこの形で境界値問題が解かれて実用に供されている訳であるが、これが解かれていれば前節の問題もそれを逆変換すれば良い訳で (1.2.3) により速度ポテンシャルは,

$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots (1.2.14)$$

のように与えられる。

実際上は (1.2.12) の境界値問題は各要素運動に対して解かれ,

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_j(x, y, \omega) = -\frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad \text{on } C, \quad \dots\dots\dots (1.2.15)$$

とするので上式は,

$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_j(\omega) \phi_j(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots (1.2.16)$$

の形となる。

それ故、今

$$\phi_j(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots (1.2.17)$$

とおくと(1.2.13)と合せて(1.2.16)は,

$$\phi(x, y, t) = \int_0^t \dot{a}(\tau) \phi_j^\delta(x, y, t-\tau) d\tau, \quad \dots\dots\dots(1.2.18)$$

と表わされる。

ここに ϕ_j^δ の境界条件は(1.2.15)により(1.2.17)から

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_j^\delta(x, y, t) = -\frac{\partial x_j}{\partial n} \delta(t), \quad \dots\dots\dots(1.2.19)$$

ここに

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots(1.2.20)$$

はDiracの δ 関数である。

即ち ϕ_j^δ は $t=0$ でインパルス的に動く時の速度ポテンシャルである。

即ち結局の所(1.1.7)の境界問題は(1.2.19)のインパルスポテンシャルから(1.2.18)のように表される訳で ϕ_j^δ を求めるには(1.2.17)からわかるように $\phi_j(\omega)$ がわかればよい。

しかし $\phi_j(\omega)$ がすべての周波数で求める事は大変困難な事である。

一方実験的には $\phi_j^\delta(t)$ を求めるのは簡単で、それをフーリエ変換すれば $\phi_j(x, y, \omega)$ が求められて実用的試験法となっている。

なお、フーリエ変換で、

$$U(\omega) = \int_0^{\infty} \dot{a}(t) e^{-i\omega t} dt = -a(0) + i\omega \int_0^{\infty} a(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \dots\dots\dots(1.2.21)$$

のように初期値が残る点に注意すべきである。

速度ポテンシャルについては(1.1.6)を仮定するのでその心配はない。

1.3 力とモーメント

時間領域で物体に働く力あるいはモーメントは、

圧力 p は、

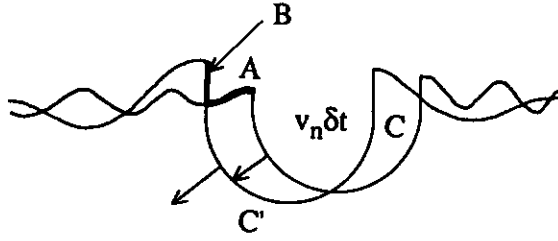
$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, y, t) - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g y, \quad \dots\dots\dots(1.3.1)$$

であるから、力は

$$X_j = - \int_C p \frac{\partial x_j}{\partial n} ds, \quad j=1, 2, \dots, \quad \dots\dots\dots(1.3.2)$$

モーメントは

$$M = - \int_C p \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds, \quad \dots\dots\dots(1.3.3)$$



先ず

$$\frac{d}{dt} \int_C \phi \frac{\partial x_j}{\partial n} ds, \quad \frac{d}{dt} \int_C \phi \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds,$$

なる積分を考えよう。

$$\frac{d}{dt} \int_C \phi \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \frac{1}{dt} \left[\int_{C'} \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds - \int_C \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds \right]$$

たゞし

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta t, \quad \dots\dots\dots (1.3.4)$$

$$\int_{C'} \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds - \int_{A+B} \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \int_C \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds + \delta t \int_C \frac{\partial \phi'}{\partial x_j} v_n ds, \quad (1.3.5)$$

$$v_n = - \frac{\partial \phi}{\partial n},$$

$$\int_{A+B} \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds \doteq \phi \int_{A+B} \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = [\phi \dot{\eta}] \delta t, \quad \dots\dots\dots (1.3.6)$$

$$\int_{A+B} \phi' \frac{\partial y}{\partial n} ds \doteq \phi \int_{A+B} \frac{\partial y}{\partial n} ds = - [\phi v_x] \delta t,$$

v_x ; x 方向速度

それ故 (1.3.1) の項を高次として無視出来るとするとき、

$$\frac{d}{dt} \int_C \phi \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial n} ds - \int_C \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad \dots\dots (1.3.7)$$

同様にして

$$\frac{d}{dt} \int_C \phi \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds - \int_C \left(x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad \dots\dots\dots (1.3.8)$$

これを(1.3.2), (1.3.3)に代入すると,

$$X_j = -\frac{d}{dt} \int_C \phi \frac{\partial x_j}{\partial n} ds + \int_C \left[\frac{1}{2} q^2 \frac{\partial x_j}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds - g \int_C y \frac{\partial x_j}{\partial n} ds, \quad \dots\dots\dots (1.3.9)$$

$$M = -\frac{d}{dt} \int_C \phi \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds + \int_C \left[\frac{q^2}{2} \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) - \left(x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds, \\ -g \int_C y \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds, \quad \dots\dots\dots (1.3.10)$$

線型理論では右辺第1項は周期的力を与え第2項は定常力と倍周波数成分を与え、第3項は静水圧成分である。

第2項の積分は水面を切る点を両端とする任意の曲線上に積分しても値は変わらない。

特に没水体では特異点のまわりの積分に変換して所謂定常問題でLagalleの公式と呼ばれるものをうる。

今、 ϕ は吹出し σ で表わされるとすると、

$$L_j = \int_C \left[\frac{1}{2} q^2 \frac{\partial x_j}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds = \int_C \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} ds, \quad \dots\dots\dots (1.3.11)$$

となる。

水面を切る物体ではこれは成立たない。

このように浮体では力についても大変問題が複雑で、例えば(1.3.6)の第1式は浸水面の変化に関係するなど考慮に入れねばならず非線型問題は言う迄もなく、それらの量が線型問題にも関係する場合がある。

1.4 ラグランジアンとハミルトンの原理

今、領域Dで圧力を積分しよう。

$$L = - \iint_D p \, dx dy = - \rho \iint_D \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g y \right] dx dy, \quad \dots\dots\dots (1.4.1)$$

先ず

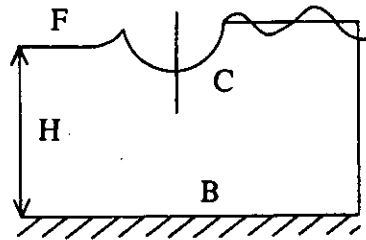
$$\iint_D y \, dx dy = \int_{C+F} \frac{\eta^2}{2} dx - \frac{H^2}{2} \int_B dx, \quad \dots\dots\dots (1.4.2)$$

右辺第2項は定数であるから以後無視しよう。

右辺第1項はポテンシャルエネルギー $-V$ である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho g}{2} \int_F \eta^2 dx &= V_W \\ \frac{\rho g}{2} \int_C \eta^2 dx &= V_S \end{aligned} \right\} V = V_W + V_S$$

..... (1.4.3)



(V_S は横ゆれでは dynamic stability)

次に前同様にして

$$\frac{d}{dt} \iint_D \phi dx dy = \iint_D \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dy + \int_{C+F} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad \text{..... (1.4.4)}$$

なる関係があり、また運動エネルギーは、

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy = \frac{-\rho}{2} \int_{C+F} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad \text{..... (1.4.5)}$$

であるから、結局 (1.4.1)

$$L = T - V, \quad \text{..... (1.4.6)}$$

これはラグランジアンもしくは Kinetic Potential と呼ばれる量である。

(1.4.1) において水面変位 η が $\Delta \eta$ だけがわれれば、

$$\delta L = - \int_F p \delta \eta dx, \quad \text{..... (1.4.7)}$$

となるから、任意の $\delta \eta$ に対して、

$$\delta L = 0$$

となるように速度ポテンシャルを定めれば上式から

$$p = 0 \quad \text{on } F, \quad \text{..... (1.4.8)}$$

となって自由表面条件が得られる。

この方法は非線型の場合にも使用出来る。線型化すれば (1.1.3) により (V_S を除いて)

$$L_W = T - V_W = \frac{\rho}{2} \int_F \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} - g \eta^2 \right) dx - \frac{\rho}{2} \int_C \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad \text{..... (1.4.9)}$$

右辺第1項の積分を更に時間で積分すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \int_0^t dt \int_F (\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} - g \eta^2) dx &= \frac{\rho}{2} \int_0^t dt \int_F \left\{ (\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t})^2 \right\} dx \\ &= \frac{\rho}{2g} \left[\int_F \phi \frac{\partial \phi}{\partial t} dx \right]_{t=0}^{t=t} + \frac{\rho}{2} \int_0^t dt \int_F \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dx, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1.4.10)$$

となって(1.1.5)と初期条件により ($t \rightarrow \infty$ でも ϕ or $\phi_t = 0$ として) 上式は0となるので結局,

$$\int_0^\infty L_W dt = -\frac{\rho}{2} \int_0^\infty dt \int_F \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad \dots\dots\dots(1.4.11)$$

となりC上の値のみで決まる事になる。

これをフーリエ変換面で考えるとプランシュレルの定理により,

$$\int_0^\infty L_W dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{L}_W(\omega) d\omega, \quad \dots\dots\dots(1.4.12)$$

$$\mathcal{L}_W(\omega) = -\frac{\rho}{2} \int_C \phi(\omega) \frac{\partial}{\partial n} \overline{\phi}(\omega) ds, \quad \dots\dots\dots(1.4.13)$$

となる。

これは水面条件(1.2.7), (1.2.8)より,

$$\mathcal{L}_W = \frac{\rho}{2} \iint_D \nabla \phi \nabla \overline{\phi} dx dy - \frac{\rho g}{2} \int_C |Y(\omega)|^2 dx, \quad \dots\dots\dots(1.4.14)$$

となり, やはり運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差となっているのでこれもラグランジアンと呼ぼう。

波がある場合一般には $T \rightarrow \infty$, $V_W \rightarrow \infty$ であるがその差は少くとも線型理論では有限なので \mathcal{L}_W は存在すると考えられる。

ハミルトンの最小作用の原理によれば, このラグランジアン外力のなす仕事の和の時間積分(ハミルトニアン)の変分が0になるように運動が起きる。

その条件は,

$$\int_0^{t \rightarrow \infty} (\delta L + A) dt = 0, \quad \dots\dots\dots(1.4.15)$$

ここに,

$$A = \sum_j f_j \delta x_j, \quad \dots\dots\dots(1.4.16)$$

は仮想仕事で, x_j は仮想変位, f_j はそのモードの一般力である。

以下簡単の為に周波数面で考え ω の運動だけあるとすると(1.4.12)と同様とすれば(1.4.15)は周波数面では,

$$\delta \mathcal{L} + a = 0 \quad , \quad \dots\dots\dots(1.4.16)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{\rho}{2} \int_C \Phi(\omega) \frac{\partial \overline{\Phi}(\omega)}{\partial n} ds - \frac{\rho g}{2} \int_C |Y(\omega)|^2 dx \quad , \quad \dots\dots\dots(1.4.17)$$

$$a = \frac{1}{2} \Sigma (F_j(\omega) \overline{X_j}(\omega) + \overline{F_j} X_j) \quad , \quad \dots\dots\dots(1.4.18)$$

$$X_j(\omega) = \int_0^\infty \delta x_j e^{-i\omega t} dt \quad ,$$

今例として上下ゆれを考えよう。

(1.2.16), (1.2.21)により,

$$\Phi(\omega) = i\omega X_2 \Phi_2(\omega)$$

であるから,

$$\mathcal{L} = \omega^2 X_2 \overline{X_2} \mathcal{L}_2 - \frac{\rho g}{2} X_2 \overline{X_2} B \quad , \quad \dots\dots\dots(1.4.19)$$

(こゝに $Y(\omega) = y + X_2(\omega)$ で y は時間に関係ないので省略した。)

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{\rho}{2} \int_C \Phi_2 \frac{\partial \overline{\Phi}_2}{\partial n} ds \quad , \quad \dots\dots\dots(1.4.20)$$

となるので(1.4.16)から任意の $\overline{X_2}$ に対して同式が成立するには,

$$\omega^2 \mathcal{L}_2 - \frac{\rho g}{2} B + \frac{1}{2} F_j(\omega) = 0 \quad , \quad \dots\dots\dots(1.4.21)$$

つまり,

$$F_j(\omega) = -\rho \omega^2 \int_C \Phi \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n} ds + \rho g B \quad , \quad \dots\dots\dots(1.4.22)$$

でなければならない。

この右辺第1項は(1.3.9)の右辺第1項のフーリエ変換に等しく、第2項は静的復原力である。

(1.4.21)は力がラグランジアンで表わされる事を示しているが、問題が複雑になった場合、これによる方法は力学的に妥当な値を与えられ考えられる。

同様に浮体の運動と同時に振動をとり扱おうとすると問題が複雑で困難となるがハミルトンの原理を使うこの方法では誤りが少ない。

その場合は L_W 又は \mathcal{L} に物体自体のラグランジアンを加えておけば容易に運動方程式が導びける。

2. 周波数領域の理論

1.2節に引続いて周波数領域の理論を構成する。なお簡単の為に速度ポテンシャル等は小文字で表わして周波数面の値を示すものとする。

2.1 基本特異性

水面下 $Q(x', y')$ の点にある単位吹出しによる速度ポテンシャルは,

$$S(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r'}{r} + \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-k(y+y')} \frac{\cos k(x-x')}{k-K+\mu i} dk, \dots \quad (2.1.1)$$

ここに $P \equiv (x, y)$, $r = \overline{PQ}$, $r' = \overline{P\bar{Q}}$, $\bar{Q} \equiv (x', -y')$

この解は水面で S を x に関してフーリエ変換する事によって求められる。この際、次の関係がある。

$$\frac{1}{x+iy} = -i \int_0^{\infty} e^{ik(x+iy)} dk,$$

$$\log(x+iy) = - \int_0^{\infty} \left[e^{ik(x+iy)} - \frac{ik}{k} \right] \frac{dk}{k}, \dots \quad (2.1.2)$$

ついでに

$$(x+iy) \{ \log(x+iy) - 1 \} = i \int_0^{\infty} \left[e^{ik(x+iy)} - 1 - ikze^{ik} \right] \frac{dk}{k^2},$$

先ず $S(P, Q) = S(Q, P)$, (2.1.3)

つまり可逆性がある。3次元問題でもこれは成立つ。しかし前進速度がある場合、定常問題では波の項の符号が変り非可逆的である。

次に

$$\left(K + \frac{\partial}{\partial y}\right) S(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(K + \frac{\partial}{\partial y}\right) \log \frac{1}{r} + \left(K - \frac{\partial}{\partial y}\right) \log r' \right], \dots \quad (2.1.4)$$

となって波が消える。

$P \rightarrow Q$ では (2.1.1) の右辺第3項の積分は k の大きい所の値で決まるので,

$$\frac{1}{k-K} = \frac{1}{k} + \frac{K}{k(k-K)} \rightarrow \frac{1}{k} + \frac{K}{k^2}$$

として (2.2.2) を利用し,

$$S(P, Q) \xrightarrow{P \rightarrow Q} \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{1}{r r'} \right) + \frac{K}{\pi} \mathcal{R}_e \left[\left(\overline{(x-x'+iy+y')} \log(\overline{(x-x'+iy+y')}) \right) \right] + O(r') \dots \quad (2.1.5)$$

右辺第2項は K の小さい時は第1項に比して無視しても良いように見えるが K が大きい時は必ずしも無視し得ないと考えられる。

また P と Q が充分離れている時は,

$$S(P, Q) \rightarrow -i e^{-K(y+y') - iK|x-x'|} + \left(y' - \frac{1}{K}\right) \left(1 - x' \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(P) + \dots$$

..... (2.1.6)

$$u_1(P) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{y}{r^2} - \frac{x^2 - y^2}{K r^4} \right), \quad r = x^2 + y^2, \dots \quad (2.1.7)$$

となって右辺第1項は発散波を表わし、他は波なしポテンシャルである。

また $(y' - \frac{1}{K})$ は原点で正則な波なしポテンシャルである。

応用上(2.1.1)の共役関数 T を次のように考えておくと便利な事がある。

$$\frac{\partial}{\partial x} S = \frac{\partial}{\partial y} T, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \dots\dots\dots (2.1.8)$$

$$T(P, Q) = \frac{1}{2\pi} (-\theta + \theta') + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+y')} \sin k(x-x')}{k-K+\mu i} dk, \quad \dots\dots (2.1.9)$$

$$\tan \theta = \frac{y-y'}{x-x'}, \quad \tan \theta' = \frac{y+y'}{x-x'}$$

であるが、 θ, θ' のとり方に充分留意しなければならない。よく似た関数として単位サーキュレーションによるポテンシャルがある。

その流れ関数は S と同じ特異性をもつからそれと較べる為流れ関数 ϕ を考えよう。(1.2.11) を x で微分して流れ関数の水面条件は、

$$K \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, 0) = 0, \quad \dots\dots\dots (2.1.10)$$

これは $K = g/U^2$, (U ; 一様流れの速度) とおくと一様流れの中の定常問題(定常造波抵抗理論)の時の速度ポテンシャルの水面条件である。

逆に定常問題の場合の流れ関数の水面条件は(1.1.11)である。

さて今の問題では(2.1.1)を求めたのと同じ方法で流れ関数 T^r は、

$$T^r(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r r'}\right) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+y')} \cos k(x-x')}{k-K+\mu i} dk, \quad \dots\dots (2.1.11)$$

それ故速度ポテンシャルは、

$$S^r(P, Q) = \frac{-1}{2\pi} (\theta + \theta') - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+y')} \sin k(x-x')}{k-K+\mu i} dk, \quad \dots\dots (2.1.12)$$

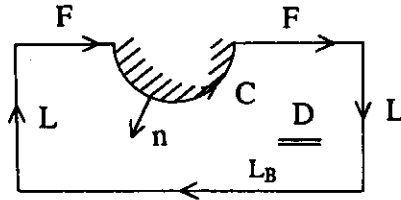
定常問題の核関数では波は上流側にないと言う条件がつくので(2.1.11)と波の項だけ異なる。今その速度ポテンシャル $S^{(U)}$ とし x の正則が上流とすると、

$$S^{(U)}(P, Q) = T^r(P, Q) + i e^{-iKx-Ky}, \quad \dots\dots\dots (2.1.13)$$

実際これは実関数となる。

2.2 速度ポテンシャルの表現

速度ポテンシャル又は流れ関数は調和関数であるからよく知られているように右図の積分路に関し、



$$\begin{aligned} \phi(P) &= \frac{-1}{2\pi} \int_{C+F+L+L_B} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n}(Q) \log r(P, Q) \right. \\ &\quad \left. - \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log r \right] ds_Q, \\ &\quad \text{in } D, \\ &= 0 \quad \text{out of } D, \\ &\quad \dots\dots\dots (2.2.1) \end{aligned}$$

なる表現がある。

波がなければ積分路 L は無限遠方に持って行く事によりその寄与を充分小さくする事が出来ると考えられるが今は波があるとするので L 上の積分を無視出来ない。(無限水深ならば水底の部分はもちろん無視出来る。)

こゝで対数特異性の所に前節の基本特異性を導入しても同じ表現が得られこの際 F 上の積分は打消し合って、

$$\begin{aligned} \phi(P) &= \int_C \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} S(P, Q) - \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} S \right] ds_Q, \quad \dots\dots\dots (2.2.2) \\ &\quad \text{in } D \\ &= 0 \quad \text{out in } D \end{aligned}$$

なる表現が得られる。

この時 L 上の積分が消える為には $|x|$ の充分大きい所で、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial |x|} S(P, Q) &\simeq -iKS(P, Q) \\ |x| &\gg 1 \quad \dots\dots\dots (2.2.3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial |x|} \phi(P) \simeq -iK\phi(P)$$

なる条件が必要でこれは Sommerfeld の放射条件である。

これは速度ポテンシャルが (2.1.6) の形の波、つまり外側に放射する波を持っていけばよい事を示す。

しかし一方領域 D の外側では恒等的に 0 となるのであるからこの条件は外側から見ると L で C の起す波を吸収している事になり、これは消波条件あるいは波吸収条件と言える。

(2.2.2) の表現に到達するのにもう一つの障害があって、それはサーキュレーションによる流れ

関数 T^r (2.1.10) を使う場合に生じるものでその際水面条件は (2.1.10) であるから、 F 上の積分により

$$\phi(P) = \int_C \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} T^r(P, Q) - \phi \frac{\partial}{\partial n} T^r \right] ds_Q + \phi_L, \quad \dots\dots\dots (2.2.4)$$

$$\begin{aligned} \phi_L &= - \int_F \left[\frac{\partial \phi}{\partial y'} T^r - \phi \frac{\partial}{\partial y'} T^r \right] dx' \\ &= \frac{1}{K} \left[\phi \frac{\partial T^r}{\partial x'} - \frac{\partial \phi}{\partial x'} T^r \right]_{F.P.}^{A.P.} \quad \dots\dots\dots (2.2.5) \end{aligned}$$

のように ϕ_L なる項が残る、これは定常問題で言う所謂線積分項である。

定常問題では法線微分が 0 の解があり、少々面倒な事になった。

この場合も例えば、

$$\phi_H(P) = \int_C \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} T^r - \phi \frac{\partial}{\partial n} T^r \right] ds + (T^r)_{F.P.}^{A.P.}, \quad \dots\dots\dots (2.2.6)$$

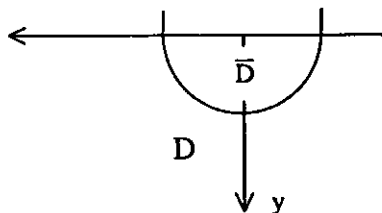
のような流れ関数は $\phi = 0$ に対し恒等的に 0 でない解を持つと考えられる。

しかし右辺第 2 項に対応する速度ポテンシャルは (2.1.12) により A.P., F.P. において水面から物体表面に移る際ジャンプがある。

それ故、この場合は水面と物体面で速度ポテンシャルが連続であると言う条件を追加すれば一意的に解は定まると考えられる。

実際 ϕ がジャンプする事は物理的には圧力がジャンプする事であるから、物体の近くの水面で妙な事が起らない限りそのような解は考えにくい。しかし、きついタンブルホームを持つような物体で計算精度がやゝおちるような場合はこのような解が表われて来る可能性はあろう。

最後に (2.2.2) において第 2 式を使い、 D の補領域 \bar{D} を考え、差引きして吹出し式、2 重吹出し式、サーキュレーション式表現を得る事が出来る。



$$\phi(P) = \int_C \sigma(Q) S(P, Q) ds, \quad \dots\dots\dots (2.2.4)$$

$$\phi(P) = \int_C \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} S(P, Q) ds, \quad \dots\dots\dots (2.2.5)$$

$$\phi(P) = \int_C \tau(Q) S^r(P, Q) ds, \quad \dots\dots\dots (2.2.6)$$

所で(2.1.8)より

$$\frac{\partial}{\partial n_Q} S(P, Q) = \frac{\partial}{\partial s_Q} T(P, Q) , \quad \dots\dots\dots (2.2.7)$$

(2.1.9)と(2.1.12)を較べて

$$T(P, Q) = S^T(P, Q) , \quad \dots\dots\dots (2.2.8)$$

であるから(2.2.5)を部分積分して

$$\phi(P) = [\mu S^T] - \int_C \frac{\partial \mu}{\partial s_Q} S^T(P, Q) ds_Q , \quad \dots\dots\dots (2.2.9)$$

となり

$$r = -\frac{\partial \mu}{\partial s} \quad \text{on } C , \quad \dots\dots\dots (2.2.10)$$

であるが(2.2.5)と(2.2.6)は(2.2.9)の右辺第1項分だけ差がある。

2.3 遠場の漸近展開とコッチン関数

(2.2.2)に(2.1.6)を代入すると遠場では

$$\phi(P) \xrightarrow{|x| \gg 1} i H^\pm(K) e^{-Ky \mp iKx} - f_2' u_1(P) + \dots\dots , \quad \left(\begin{array}{l} x > 0, +\text{印} \\ x < 0, -\text{印} \end{array} \right) \dots (2.3.1)$$

こゝに

$$H^\pm(K) = \int_C \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) e^{\frac{-Ky \pm iKx}{ds}} , \quad \dots\dots\dots (2.3.2)$$

$$f_2' = \int_C \left[\phi \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \left(y - \frac{1}{K} \right) \right] ds , \quad \dots\dots\dots (2.3.3)$$

のようになって遠場の波振幅はコッチン関数であらわされ第2項は波なしポテンシャルでその係数は後出のように力積分である。

このコッチン関数は遠場の発散波振幅が物体上のポテンシャルと境界条件で表わされると言う意味で遠場と近場の性質を結びつける関数と言える。

また $e^{-Ky+iKx}$ を x の負方向へ進む入射波と見、その散乱ポテンシャルを ϕ_d^+ とすると

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_d^+(P) = -\frac{\partial}{\partial n} e^{-Ky+iKx} , \quad \text{on } C , \quad \dots\dots\dots (2.3.4)$$

となるから、これを(2.3.2)に代入すると後出の可逆定理を使って

$$H^+(K) = - \int_C \phi_d^+(P) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds , \quad \dots\dots\dots (2.3.5)$$

$$\phi_d^\pm(P) = e^{-Ky \pm iKx} + \phi_d^\pm(P) , \quad \dots\dots\dots (2.3.6)$$

即ち、物体が静止して入射波を散乱している時の全速度ポテンシャルに境界条件をかけて積分したものとなっているから、波による強制力あるいはモーメントを表現している事になる。 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ に

制限はないから、一般に物体が振動する場合についても夫々の振動モードの波強制（一般）力を表現している。

2.4 境界積分方程式

境界値問題を解くには(2.2.2)又は(2.2.4～6)の法線微分をとったものを P on C とすれば積分方程式と見なせるからこれを解くのがよく使われる方法である。

今は(2.2.2)について考えて見よう。

境界積分方程式は留数に注意して

$$\frac{1}{2} \phi(P) + \int_C \phi \frac{\partial}{\partial n} S \Big|_C ds = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} S(P, Q) ds, \quad \dots\dots\dots (2.4.1)$$

と書ける。

特に上下ゆれ ϕ_2 , 散乱 ϕ_d^+ では

$$\int_C \left[\left(y - \frac{1}{K} \right) \frac{\partial}{\partial n} S - \frac{\partial y}{\partial n} S \right] ds = 0 \quad \dots\dots\dots (2.4.2)$$

$$\int_C \left[e^{-Ky+iKx} \frac{\partial}{\partial n} S - S \frac{\partial}{\partial n} e^{-Ky+iKx} \right] ds = 0$$

であるから、まず(2.2.2)は

$$\phi_2(P) = - \int_C \phi_2 \frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) ds, \quad \dots\dots\dots (2.4.3)$$

$$\phi_2 = \phi_2 + y - \frac{1}{K},$$

$$\phi_d^+(P) = - \int_C \phi_d^+ \frac{\partial}{\partial n} S ds, \quad \dots\dots\dots (2.4.4)$$

ϕ_d^+ は(2.3.6)による。

となるから境界積分方程式は

$$\frac{1}{2} \phi_2(P) + \int_C \phi_2 \frac{\partial}{\partial n} S \Big|_C ds = y - \frac{1}{K}, \quad \dots\dots\dots (2.4.5)$$

$$\frac{1}{2} \phi_d^+(P) + \int_C \phi \frac{\partial}{\partial n} S \Big|_C ds = e^{-Ky+iKx},$$

と書ける。

いづれにしてもフレドホルムの第2種方程式であるから

$$\frac{1}{2} \phi(P) + \lambda \int_C \phi \frac{\partial}{\partial n} S \Big|_C ds = 0, \quad (2.4.6)$$

なる斉次方程式の固有値 λ が1でなければ解を有する。

この核関数は(2.2.3)により対称であるが、しかし Self adjoint ($\overline{S(P, Q)} \neq S(Q, P)$) ではない。

そこで S を実部と虚部に分解すると(2.1.1)より

$$S(P, Q) = S_e(P, Q) - i S_s(P, Q) ,$$

$$S_s(P, Q) = e^{-K(y+y')} \cos K(x-x') , \quad \dots\dots\dots (2.4.7)$$

ϕ も

$$\phi = \phi_e - i \phi_s , \quad \dots\dots\dots (2.4.8)$$

と実部、虚部をわけて、簡単のために

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial n} = 0 , \quad \text{on } C \quad \dots\dots\dots (2.4.9)$$

とし(2.4.1)に代入すると次の2つの方程式となる。

$$\frac{1}{2} \phi_e(P) + \int_C \phi_e \frac{\partial}{\partial n} S_e \Big|_C ds = \int_C \frac{\partial \phi_e}{\partial n} S_e ds + \int_C \phi_s \frac{\partial}{\partial n} S_s ds , \quad (2.4.5)$$

$$\frac{1}{2} \phi_s(P) + \int_C \phi_s \frac{\partial}{\partial n} S_e \Big|_C ds = - \int_C \phi_e \frac{\partial}{\partial n} S_s ds ,$$

こうしておくとき自己随伴の対称核を有するフレドホルムの第2種方程式であるから数学的難点はない。

この式を整理するとわかるように ϕ_e と ϕ_s の間には密接な関係がある。

この事を端的に見るには $(\phi - \bar{\phi}) = -2 \phi_s$ なる関数の境界値問題を考えて見るとよい。

まず(2.4.9)を仮定すると

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi - \bar{\phi}) = 0 \quad \text{on } C , \quad \dots\dots\dots (2.4.5)$$

無限遠方では(2.3.1)から

$$\phi - \bar{\phi} \xrightarrow{x \gg 1} i H^+(K) e^{-Ky - iKx} + i H^+ e^{-Ky + iKx} \quad \dots\dots\dots (2.4.6)$$

$$\xrightarrow{x \ll -1} i H^-(K) e^{-Ky + iKx} + i H^- e^{-Ky - iKx}$$

この夫々の第2項は原点に入射する波を表わしているから(2.3.6)を使って、それを差引いておくと

$$\phi - \bar{\phi} - i H^+(K) \phi_d^+ - i H^-(K) \phi_d^- \xrightarrow{x > 0} O(e^{-Ky - iKx}) \quad \dots\dots\dots (2.4.6)$$

$$\xrightarrow{x < 0} O(e^{-Ky + iKx})$$

となって左辺は放射ポテンシャルであり、(2.4.5)の境界条件をもつ故、もし解が一意的ならば

$$\phi(P) - \bar{\phi}(P) = i H^+(K) \phi_d^+(P) + i H^-(K) \phi_d^-(P) , \quad \dots\dots\dots (2.4.7)$$

なる関係がある。

それ故、散乱ポテンシャルがわかっているならば ϕ_s をあらためて求める必要はない。また逆に(2.4.1)を解く過程で散乱ポテンシャルも求めている事は(2.4.5)によって明らかであろう。

境界値問題を解くもう一つの普及した方法はUrSELL-田才法であり、それは(2.3.1)からわかるように遠場では波と波なしポテンシャルになっている事からも予想されるように、原点に波源をおき、他は波なしポテンシャルで近似する方法である。

波源ポテンシャルを $\phi_W(P)$ としよう。それは S でよい。そのコッチン関数を

$$H_W^\pm(K) = 1 \quad , \quad \dots\dots\dots (2.4.8)$$

のように定義しよう。

また左右対称な浮体の対称運動を考えて

$$H^+(K) = H^-(K) \equiv H(K) \quad , \quad \dots\dots\dots (2.4.9)$$

とすると

$$\phi(P) - iH(K) \phi_W(P) = \phi_m(P) \quad , \quad \dots\dots\dots (2.4.10)$$

なる関数 ϕ_m は波なしである。

今、新しく

$$S_m(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial y} \right) \log \frac{r'}{r} \quad , \quad \dots\dots\dots (2.4.11)$$

なる核関数を考えると

$$\left(K + \frac{\partial}{\partial y} \right) S(P, Q) = \frac{1}{2\pi K} \left(K^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \log \frac{r'}{r} \quad , \quad \dots\dots\dots (2.4.12)$$

$\xrightarrow{\quad} 0$
 or $\begin{matrix} y \rightarrow 0 \\ y' \rightarrow 0 \end{matrix}$

となって水面条件を満足する故、(2.2.2)を導いた時と同様にして

$$\phi_m(P) = \int_C \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial n} S_m - \phi_m \frac{\partial}{\partial n} S_m \right] ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.4.13)$$

あるいは

$$m(P) = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial n} - \phi_m \frac{\partial}{\partial n} \right) \log \frac{r'}{r} ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.4.14)$$

とおくと

$$\phi_m(P) = m(P) - \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial y} m(P) \quad , \quad \dots\dots\dots (2.4.15)$$

境界条件は(2.4.10)より

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_m(P) = \frac{\partial \phi}{\partial n} - iH(K) \frac{\partial}{\partial n} \phi_W \quad , \quad \dots\dots\dots (2.4.16)$$

であるから前同様境界積分方程式を作って解けばよい説であるが、 $H(K)$ は未だ未知であるからそれを決める為に

$$H_m^\pm(K) = \int_C \left(\phi_m \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi_m}{\partial n} \right) e^{-Ky \pm iKx} ds = 0 \quad , \quad \dots\dots\dots (2.4.17)$$

なる条件を加えておけばよい。

UrSELL-田才法では(2.5.13)、(2.5.14)の $m(P)$ を級数展開して解いているわけである。

(2.5.14)は波なしポテンシャルの一般形で右辺の演算は水面条件の随伴形式である。

もう一つの考え方は(2.1.4)を利用して(2.2.2)から

$$K \phi(P) + \frac{\partial}{\partial y} \phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right] \left[\left(K + \frac{\partial}{\partial y} \right) \log \frac{1}{r} + \left(K - \frac{\partial}{\partial y} \right) \log \frac{1}{r'} \right] ds, \quad (2.4.18)$$

として波を追出す方法がある。

この場合右辺は水面で0となる正則関数であり、特にCがy軸に一致、つまり平板の時便利である。その時は、まず(2.2.2)は

$$K \phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = +P(x), \quad \dots\dots\dots (2.4.19)$$

とおくと

$$\phi(P) = - \int_{-1}^1 P(x') S(P, Q) dx', \quad \dots\dots\dots (2.4.20)$$

となるから

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + K^2 \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d^2 P(x')}{dx^2} - \frac{K}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{P(x')}{x-x'} dx', \quad \dots\dots\dots (2.4.21)$$

のような境界積分方程式を得る。

この積分方程式は帆の形を与えるものに等しい。

その他浅水、有限水深の場合は物体のない所では直交関数系があり、一方核関数は大変複雑なのでそれを利用するのが便利であり、その時は領域を分割して物体を含む領域では(2.2.1)を使う事になる。もちろん(2.2.1)を最初から使って放射条件と境界条件で問題を解く事も出来るわけでこれも便利な場合がある。

この際、放射条件のかわりに適当な所に波吸収特異点をおいてもよい。

2.5 力とモーメント、可逆定理

力とモーメントは(1.3.9)、(1.3.10)で与えられる。

今の場合(1.2.6)の圧力を積分しても同じ結果となり、

$$F_{ij} = - \int_C P_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\rho \omega^2 X_i f_{ij}, \quad \dots\dots\dots (2.5.1)$$

$$f_{ij} = \int_C \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds, \quad \dots\dots\dots (2.5.2)$$

但し X_i は i -mode の運動の振巾とする。

ここで、グリーンの定理より

$$f_{ij} = - \iint_D \nabla \phi_i \nabla \phi_j dx dy + g \int_F \eta_i \eta_j dx, \quad \dots\dots\dots (2.5.3)$$

となり、(1.4.6)、(1.4.14)と同形になるが(1.4.14)と少し異なるのでmodified Lagrangean と呼ばれる。

(2.5.3) の形から直ちに可逆定理

$$f_{ij} = f_{ji} \quad , \quad \dots\dots\dots (2.5.4)$$

を得る。

この定理では ϕ_i , ϕ_j は放射ポテンシャルでなければならない。

そこで入射波がある場合は散乱波について

$$\int_C \phi_d \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds = \int_C \phi_j \frac{\partial \phi_d}{\partial n} ds = - \int_C \phi_j \frac{\partial \phi_0}{\partial n} ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.5.6)$$

ϕ_0 は入射波とする。

それ故波の強制力又はモーメントは a を波振巾とに

$$E_j = + \rho g a \int_C (\phi_0 + \phi_d) \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \quad ,$$

となり, 上式と (2.3.2) から所謂ハスキントの公式を得る。

$$E_j = - \rho g a H(K) \quad , \quad \dots\dots\dots (2.5.7)$$

(2.5.4) は物体が複数個ある場合に拡張出来る。今は C_1 , C_2 2ヶの物体があるものとし, C_1 が i -mode の運動を, C_2 が j -mode の運動をしているものとする。夫々の速度ポテンシャルの境界条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \phi_i &= - \frac{\partial x_i}{\partial n} \quad \text{on } C_1 \quad , \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C_2 \quad , \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_j &= 0 \quad \text{on } C_1 \quad , \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial n} = - \frac{\partial x_j}{\partial n} \quad \text{on } C_2 \quad , \end{aligned} \quad \dots\dots (2.5.8)$$

としよう。

グリーンの定理より

$$\int_{C_1+C_2} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds = \int_{C_1+C_2} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds$$

であるから (2.5.8) より

$$\int_{C_1} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds = \int_{C_2} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.5.9)$$

となる。

つまり C_2 の j -mode の運動によって C_1 が受ける i -mode の力は C_1 の i -mode の運動によって C_2 が受ける j -mode の力に等しい。

C_1 と C_2 が充分離れているならば, 互に他の運動による影響は (2.3.1) より進行波だけである。それ故 (2.5.9) は (2.5.7) の形に移行する。これがハスキントの関係のもとの形である。

2.6 エネルギー定理

圧力 p が速度 v で動く物体になす仕事の時間平均は

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) v(t) dt = \frac{1}{4} [\overline{p(\omega) v(\omega)} + \overline{p(\omega) v(\omega)}] \quad , \quad \dots\dots\dots (2.6.1)$$

であるから i -mode の運動による圧力が j -mode になす仕事の時間平均は

$$W_{ij} = \frac{-1}{4} \int_C \left[p_i \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial n} + \bar{p}_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right] ds = -\frac{i\rho\omega}{4} \int_C \left(\phi_i \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} - \bar{\phi}_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) ds, \quad \dots\dots\dots (2.6.2)$$

但し $\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = -v_j$,

これは(1.4.17)又は(1.4.20)のように定義されるラグランジヤンの虚部である事を意味しており、グリーン定理によりこの積分は無限遠方の検査面上に変換出来るが前節の場合と異なり今は(2.3.1)からその上の積分は0にならない。境界条件を規格化し、実数値をとるようにしておくこと次の積分がわかればよい。

$$f_{ij} - \bar{f}_{ij} = - \int_C (\phi_i - \bar{\phi}_j) \frac{\partial x_j}{\partial n} ds, \quad \dots\dots\dots (2.6.3)$$

(2.4.7)を代入し(2.3.5)の表現を使えばよい。

$$\frac{1}{i} (\bar{f}_{ij} - f_{ij}) = H_j^+(k) \bar{H}_i^+(k) + H_j^-(k) \bar{H}_i^-(k), \quad \dots\dots\dots (2.6.4)$$

をうる。

特に散乱ポテンシャルを含む積分からは有用な種々の関係が出て来る。

これは(2.4.7)の関係から予想出来る所である。その式で速度ポテンシャルの複素共役値を考えたが、それはフーリエ変換の所に戻って考えると時間軸を逆にした運動を考える事であるから逆時間運動となづけると、(2.4.7)は逆時間運動を正時間運動で表現した事になる。

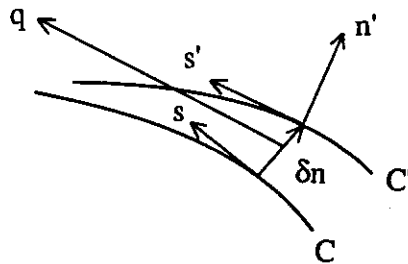
この時、前進速度があると前進速度も理屈としては逆になるけれど、数式上ではどちらも考えられ、もう一つ流れの方向だけ逆にした逆流れ運動を考えておいた方がよい。

2.7 物体の微小変形

今物体 C が法線方向に僅かに δn だけ変形したとしよう。

この時 δn は滑らかでビルヂキールのような変形は取扱かわないものとする。

C' に対する速度ポテンシャルを ϕ' とすると(2.2.2)により



$$\phi'(p) = \int_{C'} \left[\frac{\partial \phi'}{\partial n'} s - \phi' \frac{\partial S}{\partial n} \right] ds', \quad \dots\dots\dots (2.7.1)$$

一方 C に対する速度ポテンシャル ϕ は(2.2.2)の形に表わされるが積分路 C' としてもよいから

$$\phi(P) = \int_{C'} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n'} S - \phi \frac{\partial S}{\partial n'} \right] ds' \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.2)$$

それ故

$$\delta \phi = \phi' - \phi = \int_{C'} \left[\frac{\partial (\phi' - \phi)}{\partial n'} S - \delta \phi \frac{\partial S}{\partial n'} \right] ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.3)$$

こゝで流れ関数を夫々 ϕ' , ϕ とすると

$$\frac{\partial \phi'}{\partial n'} - \frac{\partial \phi}{\partial n'} \Big|_{C'} = \frac{\partial}{\partial s'} (\phi' - \phi) \Big|_C$$

であるが図から $(\phi' - \phi)$ つまりこの間の流量の差は

$$\begin{aligned} \phi' - \phi &= q \delta n \\ q &= -\frac{\partial \phi}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s} (+x + \phi) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.7.4)$$

$x \equiv x_j$ とする。つまり q は C に沿う物体に対する相対流速である。

それ故、結局高次の項を省略すると

$$\delta \phi = \int_C \left[\frac{\partial (\delta \phi)}{\partial n} S - \delta \phi \frac{\partial S}{\partial n} \right] ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.5)$$

で境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n} (\delta \phi) = \frac{\partial}{\partial s} (q \delta n) \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.6)$$

となる。

力については (2.5.2) を少し変形

して

$$f_{ij}^* = - \int_C \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.7)$$

とおけば

$$f_{ij}^* = f_{ij} - A_{ij} \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.8)$$

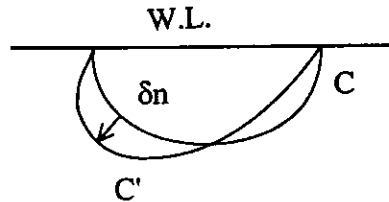
$$A_{ij} = \int_C x_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.9)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= x_i + \phi_i \quad , \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_i &= 0 \quad \text{on } C \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.7.10)$$

さて

$$f_{ij}^* = - \int_{C'} \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n'} ds + \int_C \nabla \phi_i \nabla x_j \delta n ds$$



であるから

$$f'_{ij} = - \int_{C'} \phi'_i \frac{\partial x_j}{\partial n'} ds$$

とおいてその差をとれば

$$\delta f_{ij}^* = f'_{ij} - f_{ij} = - \int_{C'} \delta \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n'} ds - \int_C \nabla \phi_i \cdot \nabla x_j \delta n ds$$

所で $\delta \phi_i = \phi'_i - \phi_i$

$$- \int_{C'} \delta \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n'} ds = + \int_{C'} \delta \phi_i \frac{\partial \phi'_j}{\partial n'} ds = \int_{C'} \phi'_j \frac{\partial}{\partial n'} (\phi'_i - \phi_i) ds$$

$$= - \int_{C'} \phi'_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n'} ds = - \int_C \phi'_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds - \int_C \nabla \phi'_j \cdot \nabla \phi_i \delta n ds$$

$$= - \int_C \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \delta n ds \quad ,$$

$$\therefore \left. \frac{\partial \phi'_i}{\partial n'} \right|_{C'} = \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right|_C = 0$$

それ故

$$\delta f_{ij}^* = - \int_C \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \delta n ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.10)$$

特に $\phi_i = \phi_d^+$ とおくと (2.3.5) より

$$\delta H_j^+(K) = \int_C \nabla \phi_d^+ \cdot \nabla \phi_j \delta n ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.11)$$

法線微分は 0 となっている故、次のようにも書ける。

$$\delta H_j^+(K) = \int_C \frac{\partial \phi_d^+}{\partial s} \frac{\partial \phi_j}{\partial s} \delta n ds \quad ,$$

あるいは部分積分して水線幅は変わらないとすると、

$$\delta H_j^+(K) = - \int_C \phi_d^+ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial s} \delta n \right) ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.12)$$

となり、(2.3.5) に (2.7.6) を代入した結果に等しくなる。

2.4 節に述べたように (2.4.5) によって境界値問題をとく時は散乱ポテンシャルは常に求まっているので上式により微小変形によるコッチン関数の変分は容易に求められる。

例えばコッチン関数が近似的に 0 となるように変形するには

$$\delta n = \varepsilon f(s) \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.13)$$

と選ぶと

$$\delta H^+ = -\varepsilon I \quad , \quad I = \int_C \phi_d^+ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} f \right) ds \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.14)$$

となるから、 ε は次式で与えられる。

$$H^+ + \delta H^+ = 0 \quad \text{for} \quad \varepsilon = \frac{H^+}{I} \quad , \quad \dots\dots\dots (2.7.15)$$

2.8 境界値問題の変分原理

境界値問題を解くに当ってその近似度を評価するには評価関数を定めねばならない。
 例えば無限流体中では流体の運動エネルギーのようなものをとるのが最も自然であろう。

今、近似値を ϕ 、正解を f としてその誤差のポテンシャルの運動エネルギーは

$$E = \frac{\rho}{2} \iint_D [\nabla(\phi - f)]^2 dx dy, \quad \dots\dots\dots (2.8.1)$$

変分をとれば

$$\begin{aligned} \delta E &= \rho \iint_D (\nabla \delta \phi) \{ \nabla(\phi - f) \} dx dy \\ &= -\rho \iint_D \delta \phi \nabla^2 \phi dx dy - \rho \int_C \delta \phi \frac{\partial(\phi - f)}{\partial n} ds, \quad \dots\dots (2.8.2) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{先ず } \phi \text{ として } \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \quad \text{on } C, \quad \dots\dots\dots (2.8.3)$$

なる比較関数群を選べば

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } D \quad \text{for } \delta E = 0, \quad \dots\dots\dots (2.8.4)$$

これは Kelvin の定理に一致する。

しかし一般に調和関数の素解はよく知られていて境界条件を満たすようにそれを定める事の方が難かしいので数値解法的には調和関数である許容関数 ϕ を考える方が实际的であろう。

その時は (2.8.2) から

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \quad \text{on } C \quad \text{for } \delta E = 0, \quad \dots\dots\dots (2.8.5)$$

また、この時

$$E = \frac{-\rho}{2} \int_C \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - 2\phi \frac{\partial f}{\partial n} + f \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds, \quad \dots\dots\dots (2.8.6)$$

であり右辺第 3 項は ϕ の変分をとればなくなるから

$$I = -\frac{\rho}{2} \int_C \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - 2\phi \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds, \quad \dots\dots\dots (2.8.7)$$

なる汎関数を考えても同じである。

また、この時は

$$E \geq 0, \quad \dots\dots\dots (2.8.8)$$

であるから $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ on C ならば ϕ は恒等的に D 内で 0 となり、解の一意性が保証される。

我々の場合は評価関数として modified ラグランジアンをとる事にすると (2.5.2) の形に表わされるのでやはり (2.8.7) の汎関数をとればよい。

それに水面があるので少々複雑ではあるが、水面条件を満たす調和関数はよく知られているのでそれを比較関数として変分をとれば (2.8.5) が成立つ。

しかしこの場合ラグランジアンは (2.8.8) のような定符号性を有する事は証明出来ない所以で解の一意性は保証出来ない。

電算機を用いる数値計算ではこの方法が便利な場合はあまりないが、 $K \rightarrow 0$ 又は ∞ の近似値の推定、容器内の水の動揺の固有値のレーリー・リッツ法的推定に用いて便利である。

2.9 解の一意性と Irregular frequency

前節にもふれたように自由表面がある場合の解の一意性の証明は少し面倒で個々の問題で証明された以外に一般的な証明は成書類にはあまり見られない。

さて、その要点は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C, \quad \dots\dots\dots (2.9.1)$$

なる条件を満たす解が定数を除いて恒等的に 0 となる事を証明する事である。

その時先ず

$$M = - \int_C \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 0, \quad \dots\dots\dots (2.9.2)$$

又(2.3.5)により

$$H^\pm(K) = - \int_C \phi_d^\pm(P) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 0, \quad \dots\dots\dots (2.9.3)$$

であるから、恒等的に 0 でない ϕ が存在するとするとそれは波なしで水面で 0 となる関数 m によって(2.4.15)のように表わされる。

波なしポテンシャルは(2.4.15)のように表わされ、また今の場合境界条件(2.9.1)は齊次であるから定係数が複素数の時、それで割って $m\phi$ を実関数と考えてよいので以下そのように扱う。

(2.9.2)は

$$\begin{aligned} M &= \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy - K \int_F \phi^2 dx \\ &= \iint_D \left[(\nabla m)^2 + \frac{1}{K^2} (\nabla m_y)^2 - \frac{2}{K} \nabla m \nabla m_y \right] dx dy - \frac{1}{K} \int_F (m_y)^2 dx, \end{aligned}$$

となるが

$$\begin{aligned} 2 \iint_D \nabla m \nabla m_y dx dy &= \iint_D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla m)^2 dx dy \\ &= - \iint_C (\nabla m)^2 \frac{\partial y}{\partial n} ds - \int_F (m_y)^2 dx, \\ \therefore (\nabla m)^2 \Big|_{y=0} &= m_y^2 \end{aligned}$$

であるから結局

$$M = \iint_D \left[(\nabla m)^2 + \frac{(\nabla m_y)^2}{K^2} \right] dx dy + \frac{1}{K} \int_C (\nabla m)^2 \frac{\partial y}{\partial n} ds, \quad \dots\dots\dots (2.9.4)$$

それ故右図の(a)のような場合は

$$\frac{\partial y}{\partial n} > 0 \text{ で } M \geq 0,$$

..... (2.9.5)

となるが(b)のようなタムブルホームでは保証出来ない。

実際このような場合附加質量が負になる周波数領域がある事はよく知られている。さて、(a)図の場合は

(2.9.2)により m 従って ϕ は恒等的に 0 以外の解を有せず一意性は保証される。

以上の証明は Fritz John の証明に略等しい。

そこで(b)図のような場合又は没水体が残された事になるが、それを今度は(2.4.1)の境界積分方程式の解の一意性の問題として考えよう。

この積分方程式の核関数は対称で(2.4.5)の形とすれば更に自己随伴である。

それ故積分方程式論により、その齊次方程式が恒等的に 0 でなければ一意性を有する。

$$\frac{1}{2} \phi(P) + \int_C \phi(Q) \frac{\partial S_C}{\partial n} ds_Q = 0, \quad \dots\dots\dots (2.9.5)$$

先ず没水体ではポテンシャル論の同じ問題の手法に従って解のない事が証明出来るようである。

(Kostyukov)

しかし浮体では特定の周波数で解を有する事が大松によって示された。

この問題は数値計算上解が不定となるので Irregular frequency の問題として嫌われている。

この現象はその周波数では内部領域の水が固有振動を起す事に起因する。

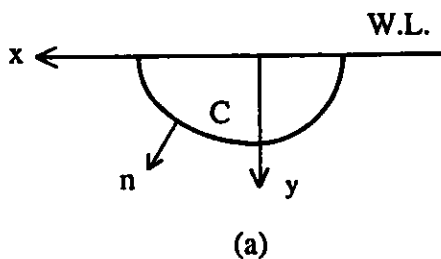
今内部領域の速度ポテンシャルを $\phi_i(P)$ とすると(2.2.2)と同様にして

$$\begin{aligned} \int_C \left[\phi_i(Q) \frac{\partial S}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n} S \right] ds_Q \\ = \phi_i(P) \quad \text{in } \bar{D} \\ = 0 \quad \text{in } D \\ \dots\dots\dots (2.9.6) \end{aligned}$$

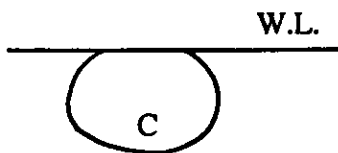
境界条件を

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C, \quad \dots (2.9.7)$$

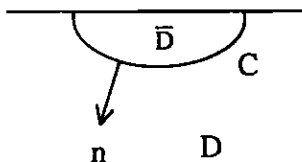
として境界積分方程式を作ると今は法線が領域外に向いているので結局(2.



(a)



(b)



9・5)に一致する。

それ故(2・9・5)は内部の固有値方程式と見なしてもよい。

しかし(2・9・6)第2式より \overline{D} の外つまり D では

$$\phi_i = 0 \quad \text{on } C \in D, \quad \dots\dots\dots (2\cdot9\cdot8)$$

で $\frac{\partial \phi_i}{\partial n}$ は C の外で連続故(2・9・7)により0, それ故(2・2・2)により固有関数 ϕ_i による外部ポテンシャルは0となり, 解の一意性は保たれる。

吹出し分布としても同じ周波数で同じ現象があらわれる。

つまり(2・9・7)の条件に対する解であるから, 同じ境界条件に対して解が定まらないと言う事である。

それをさける方法もいろいろ考えられているが, いずれにしても手間がかかるので計算上厄介な問題である。

この問題が全く出て来ない方法としては級数展開に基礎をおく Ursell—田才法, 領域分割法, Yeung の方法等があるが最後の方法では別に水面をどこまで考えるかで少々問題が起きる。

2.10 Kramers—Kronigの関係

変換(1・2・1), (1・2・3)において

ω を複素面で考えよう。そうすると $\Im(\omega) < 0$ では $F(\omega)$ は正則で, (1・2・5)つまり $t = 0$ まで $f(t)$ が0となるにはpoleがあってはならない。

$F(\omega)$ は ω -平面の下半分で正則である。それ故コーシーの定理より

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{F(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad \dots\dots\dots (2\cdot10\cdot1)$$

Γ を実軸にとり, ω を実軸に近づけると

$$\frac{1}{2} F(\omega) = \frac{\text{P.V.}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

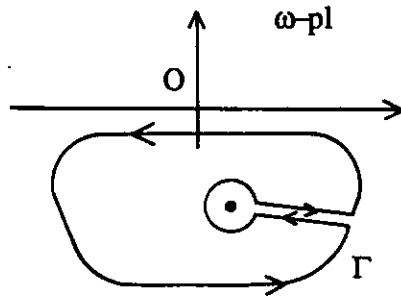
$$\text{今} \quad F(\omega) = F_c(\omega) - i F_s(\omega), \quad \dots\dots\dots (2\cdot10\cdot2)$$

とおくと上式から

$$F_c(\omega) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_s(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' F_s(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad \dots\dots (2\cdot10\cdot3)$$

$$F_s(\omega) = + \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_c(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad \dots\dots\dots (2\cdot10\cdot4)$$

これはKramers—Kronigの関係と呼ばれる。



なお $F_c(\infty)$ が有限値をとる場合はその値だけ差引いて $F_c(\infty) = 0$ として考える。

これから $F(\omega)$ の実部虚部のどちらかがわかっているれば他方が計算出来るわけであるが (2・10・3) 又は (2・10・4) の積分は主値をとるので少々面倒である。

そこで今適当な定数 C を選び

$$u = \frac{iC + \omega}{iC - \omega}, \quad \omega = \frac{C}{i} \frac{1-u}{1+u}, \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 10 \cdot 5)$$

実軸上では

$$\omega = C \tan \frac{\theta}{2} \quad (2 \cdot 10 \cdot 6)$$

とおくと $u = e^{-i\theta}$

となり、 ω の下半面は u - 平面の単位円の内部に写像される。

ここで $F(\omega)$ に正則でかつ (1・2・4) のようであればならぬ。、実係数 a_n により

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n, \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 10 \cdot 7)$$

と展開出来る。

それ故 (2・10・2) のように分解すれば

$$F_c(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 10 \cdot 8)$$

$$F_s(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\theta$$

のようになり、実部と虚部の関係は明瞭である。

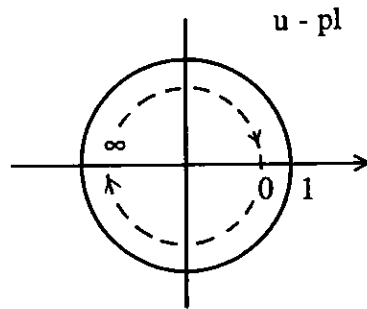
(2・10・3), (2・10・4) は (2・10・6) の変換をするとポアソンの公式 (コーシーの公式) となる。計算としては、例えば

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \int_{-\pi}^{\pi} F_c(\omega) \cos n\theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \int_0^{\pi} F_c(\omega) \cos n\theta d\theta, \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 10 \cdot 9) \end{aligned}$$

のように実行すればよい。

また $F(\omega)$ の対数をとってもやはり

$$\log F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n, \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 10 \cdot 10)$$



と展開出来ると考えられるから

$$\begin{aligned} \log \sqrt{F_c^2 + F_s^2} &= \sum_n b_n \cos n\theta, \\ \tan^{-1} \frac{F_s}{F_c} &= \sum_n b_n \sin n\theta, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.10.11)$$

となり、ゲインと位相も一方がわかれば他方がわかる。

いずれにしても $F(\omega)$ の実部と虚部は互に独立でない事を示す関係である。

3. 時間領域の理論

従来時間領域での研究は少ないけれど、動揺振幅が小さくて物体境界 C の平均位置で境界条件が指定出来る場合は周波数領域の解をフーリエ逆変換すればよく、境界値問題も周波数領域の方が簡便で実績も多く実用的であると考えられる。

しかし物体境界 C が大きく動く場合や物体が水面に突入、脱出する問題などではやはり時間領域で問題を解かざるを得ない。

つまりそのような時は物体境界条件が平均位置で指定出来ず所謂非線型となる場合である。

しかしそのような時でも水面上昇は飛沫のような特別な局部的現象（これは物体のそばでおこる）を除けば一般に小さくて線型化してもよいように考えられる。

以下そのような場合について述べる。

3.1 基本特異性

(2.1.1) の核をフーリエ逆変換して

$$G(P, Q; t) = \frac{\delta(t)}{2\pi} \log(r'/r) + M(P, \bar{Q}; t), \quad \dots\dots\dots (3.1.1)$$

$$M(P, \bar{Q}; t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+y')}}{k - K + \mu i} \cos k(x-x') dk, \quad \dots\dots (3.1.2)$$

この M は

$$M(x, y; t) = \frac{g}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{gk - \omega^2 + \mu i} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos kx dk, \quad \dots\dots\dots (3.1.3)$$

とも書ける。

こゝに
$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots (3.1.4)$$

は Dirac の δ 関数である。

(3.1.3) を ω について積分すると

$$\begin{aligned} M(x, y; t) &= \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos kx \frac{\sin \sqrt{gk} t}{\sqrt{gk}} dk, \text{ for } t > 0 \\ &= 0 \quad \text{for } t < 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.1.5)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial y}\right) M(x, y, t) = 0, \quad \dots\dots\dots (3.1.6)$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^4 + g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} M(x, y, t) = 0,$$

$$M(x, y; t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{-g}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \longrightarrow 0, \quad \dots\dots\dots (3.1.7)$$

また

$$M(x, y; t) = \frac{g}{\pi} \mathcal{E}_e \left[\frac{ie^{-i\xi^2}}{\sqrt{gz}} \int_{-\xi}^{\xi} e^{iu^2} du \right], \quad \dots\dots\dots (3.1.8)$$

$$\text{但し } \xi = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{z}} t, \quad z = x + iy,$$

とも書け、これは複素変数のフレネル積分である。

$$M(x, y; t) \xrightarrow{\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{z}} t \gg 1} \frac{g}{\pi} \mathcal{E}_e \left[\frac{i\sqrt{i\pi}}{2\sqrt{gz}} e^{-i\xi^2} \right], \quad \dots\dots\dots (3.1.9)$$

なお M の共役関数を N とすると

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \dots\dots\dots (3.1.10)$$

$$N(x, y, t) = \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ky} \sin kx \frac{\sin \sqrt{gkt}}{\sqrt{gk}} dk, \quad \dots\dots\dots (3.1.11)$$

$$= 0 \quad \text{for } t < 0$$

となり、(3.1.6) の微分方程式をみたく。

$$\text{又} \quad N + iN = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{i\pi z}} e^{-i\xi^2} \int_{\xi}^{\infty} e^{iu^2} du, \quad \dots\dots\dots (3.1.12)$$

$$\text{なお} \quad \int_0^{\infty} M(x+Ut, y; t) dt = -\frac{1}{\pi} \log r - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k-r+ui} dk - ie^{-ry-irx}, \quad \dots\dots\dots (3.1.13)$$

$$\text{但し } r = g/U^2,$$

3.2 速度ポテンシャルの表現

まず速度ポテンシャルは調和関数であるから、各瞬間については(2.2.1)が成立つ。

しかし今これだけでは例えば境界積分方程式は作れず $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ (これも調和関数) について同様な式を作り、連立させて作る事になる。

直接に ϕ を表現するには(2.2.2)をフーリエ逆変換して(3.1.1)を利用する。

1.2節で用いた手法で

$$\phi(P, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{C(\tau)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n}(Q, \tau) G(P, Q, t-\tau) - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds(Q), \dots (3.2.1)$$

あるいはGを分割して

$$\begin{aligned} \phi(P; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{C(t)} \left(\frac{\partial \phi(t)}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right) \log \frac{r'}{r} ds(Q) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{C(\tau)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right) M(P, \bar{Q}, t-\tau) ds(Q), \dots (3.2.2) \end{aligned}$$

なお $t=0$ まで水は静止しているものとする。そうすると先ず(3.1.7)より

$$\lim_{t \rightarrow +0} \phi(P; t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{C(0)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right]_{t=0} \log \frac{r'}{r} ds, \dots (3.2.3)$$

$M(P, \bar{Q})$ は物体上, 水面内に特異性を有しないから(3.2.2)はこのまゝ(3.2.3)の初期条件と与えられた境界条件により境界積分方程式として使い時間をおって解いてゆけばよい。

特に境界Cが時間に依存しなければそのフーリエ変換は(2.2.2)であり, その解から(1.2.19)のようなインパルスポテンシャル $\phi^{\delta}(P; t)$ を求め, それを積分して(1.2.18)のように表現出来る。

(3.2.2)では境界Cが動いてもよく Havelock はこれを使って一様流れのポテンシャルを導いている。

(3.1.13)を用いて(3.2.2)を積分すれば求められる訳であるが(3.1.13)の積分の際対数項があらわれて幾分不定な要素が懸念される。

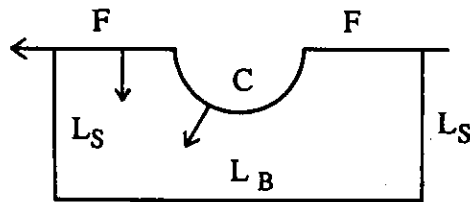
この点が所謂線積分項の問題として現われる訳である。

元来, 自由水面は開いているので何等かの不定さが侵入する恐れは常にある。

そこで各段階において例えば水量は一定であると言う条件を check しておけばよいと考えられる。

今, 自由表面およびCからの流量は

$$\begin{aligned} Q &= + \int_{C+F} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \\ &= - \int_F \frac{\partial \phi}{\partial y} dx + \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \\ &= + \int_F \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx - \int_C v_n(t) ds \\ &\dots (3.2.4) \end{aligned}$$



ガウスの定理より

$$Q = - \int_{L_S + L_B} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds ,$$

となるが L_S からは波だけが出て行くとすれば平均において流出量はなく、また L_B からも明らかでない。

それ故 $Q = 0$

即ち
$$\int_F \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx = + \int_{C(t)} v_n(t) ds , \quad \dots\dots\dots (3.2.5)$$

あるいは t で積分して

$$\int_F [\eta(x, t) - \eta(x, 0)] dx = \int_0^t dt \int_{C(t)} v_n(t) ds , \quad \dots\dots\dots (3.2.6)$$

最前の一様速度で前進する場合には各瞬間で

$$\int_{C(t)} v_n(t) ds = 0 , \quad \dots\dots\dots (3.2.7)$$

と考えられるから

$$\int_F \frac{\partial \eta}{\partial n} dx = - \int_F \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = [\phi] = 0 , \quad \dots\dots\dots (3.2.8)$$

となって無限上、下流で $\phi = 0$ とすると、 C が水面を切る所でも $\phi = 0$ となる必要があり、実際そのようにして解が確定する。

(3.2.7) は自明のようであるが (3.2.6) のように理解すれば (3.2.8) は必ずしも 0 でなくともよい。

その時は (3.2.6) で静止時の水面変位の積分と現在のそれに差がある事になる。

ここにアルキメデスの原理の拡張定理があり、それはその積分 (線型化しない実際の水面変位) に密度をかけたものが浮力に等しい。

3.3 遠場, フラップ式造波機, 入射波

これ以後は再び元に戻って動揺振巾は微量で物体平均位置は変わらないものとしよう。

速度ポテンシャルは (1.2.16)

$$\phi(P, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \Phi(P; \omega) e^{i\omega t} d\omega , \quad \dots\dots\dots (3.3.1)$$

のように書かれ、また

$$\phi(P, t) = \int_0^t v(\tau) \phi^\delta(P; t - \tau) d\tau , \quad \dots\dots\dots (3.3.2)$$

とも書ける。

遠場では (2.3.1) を (3.3.1) に代入して

$$\phi(P, t) \xrightarrow{P \gg 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) H^+(K) e^{-|K|y + iKx + i\omega t} d\omega , \quad \dots\dots\dots (3.3.3)$$

こゝに $K = \omega \sqrt{g}$ (3.3.4)

$$H^\pm(-K) = H^\pm(K)$$

特に水面変位は

$$\eta(x, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} \rightarrow -\frac{1}{2\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) H^\pm(K) e^{\mp iKx + i\omega t} \omega d\omega, \dots \quad (3.3.5)$$



具体例として水槽端のフラップ式造波機を考えよう。周波数領域では(2.2.2)より

$$\phi(P, \omega) = 2 \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} S ds, \quad \dots \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \left(1 - \frac{y}{h}\right) && \text{for } 0 < y < h \\ &= 0 && \text{for } y > h \end{aligned} \quad \dots \quad (3.3.7)$$

(2.3.2) のコッチン関数は今は x の負の方向の波だけ必要で

$$\begin{aligned} H^\mp(K) &= -2 e^{-iKX} \int_0^h e^{-Ky} \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy \\ &= -\frac{2}{K} e^{-iKX} \left[1 - \frac{1 - e^{-Kh}}{Kh}\right], \\ &\equiv e^{-iKX} H_F(K), \quad \dots \quad (3.3.8) \end{aligned}$$

とおいておくと(3.3.5)により x の負方向に進む波は

$$\eta_F(x, t) \rightarrow -\frac{1}{2\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) H_F(K) e^{-iK(X-x) + i\omega t} \omega d\omega, \dots \quad (3.3.9)$$

これを重畳積分に直すと

$$\eta_F(x, t) \rightarrow \int_0^t v(\tau) W(x, t-\tau) d\tau, \quad \dots \quad (3.3.10)$$

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{2\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} H_F(K) e^{-iK(X-x)+i\omega t} \omega d\omega, \quad \dots\dots\dots(3.3.11)$$

でこれは ϕ^{δ} の作る波である。

一般に x の正方向から入ってくる波は (3.3.9) の形となる。

今それを

$$\eta_W(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{iKx+i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots(3.3.12)$$

と表わす事にすると速度ポテンシャルは

$$\phi_W(P, t) = \frac{g}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-|K|y+iKx+i\omega t} \frac{d\omega}{\omega}, \quad \dots\dots\dots(3.3.13)$$

となる。

この造波機による波では

$$A(\omega) = -\frac{\omega}{g} U(\omega) H_F(K) e^{-iKX}, \quad \dots\dots\dots(3.3.14)$$

所で (2.3.12) において $x=0$ とすると

$$\eta_W(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots(3.3.15)$$

であるから $A(\omega)$ は原点における水面変位のフーリエ変換と考えられる。

$$\begin{aligned} \text{今} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{iKx+i\omega t} d\omega &= \int_0^{\infty} \cos(Kx+\omega t) d\omega \\ &= D(x, t), \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.3.16)$$

とおくと

$$\eta_W(x, t) = \int_0^t \eta_W(0, t-\tau) D(x, t-\tau) d\tau, \quad \dots\dots\dots(3.3.17)$$

と表わされ、 D はフレネル積分で表わされる。

3.4 力とモーメント、可逆定理

i モードの速度振巾 $U_i(\omega)$ なる動揺による j モードの一般力 F_{ij} は (2.5.1) をフーリエ逆変換して

$$F_{ij}(t) = \frac{\rho i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega U_i(\omega) f_{ij}(\omega) d\omega, \quad \dots\dots\dots(3.4.1)$$

一方 j モードの速度振巾 $U_j(\omega)$ で i モードの一般力は

$$F_{ji}(t) = \frac{i\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega U_j(\omega) f_{ji}(\omega) d\omega, \quad \dots\dots\dots(3.4.2)$$

所で

$$U_{\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}}(\omega) = \int_0^{\infty} v_{\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}}(t) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots(3.4.3)$$

で今

$$F_{ij}^{\delta}(t) = \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{ij}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots (3.4.4)$$

とおくと可逆定理(2.5.4)により

$$F_{ij}^{\delta}(t) = \int_0^t v_i(\tau) F_{ij}^{\delta}(t-\tau) d\tau = \int_0^t v_i(\tau) F_{ji}^{\delta}(t-\tau) d\tau, \quad \dots\dots (3.4.5)$$

$$F_{ji}^{\delta}(t) = \int_0^t v_j(\tau) F_{ji}^{\delta}(t-\tau) d\tau, \quad \dots\dots\dots (3.4.6)$$

となら

$$F_{ij}^{\delta}(t) = F_{ji}^{\delta}(t) \quad \text{for } v_i(t) = v_j(t), \quad \dots\dots\dots (3.4.7)$$

を得る。

これは又2つ以上の物体の時にも成立つ事は2.5節で述べた通りである。

波強制力についても、入射波が(3.3.12)のように表わされるとすれば(2.5.7)を逆変換して

$$E_j(t) = -\frac{\rho g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) H(K) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots (3.4.8)$$

それ故

$$E_j^{\delta}(t) = -\frac{\rho g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(K) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots (3.4.9)$$

なる関数を導入し、(3.3.15)を考えると

$$E_j(t) = \int_0^t \eta_W(0, \tau) E_j^{\delta}(t-\tau) d\tau, \quad \dots\dots\dots (3.4.10)$$

これを又(3.3.17)を使って任意の点 x の波高により表現する事も出来る。

可逆性の観点からは(3.4.8)と(3.3.5)を較べて

$$-\rho g A(\omega) = \frac{\omega}{g} U(\omega) e^{\mp iKX}, \quad \dots\dots\dots (3.4.11)$$

ならば

$$\eta(x, t) \Big|_{|x| \gg 1} \doteq E_j(t), \quad \dots\dots\dots (3.4.12)$$

これが非定常の場合のハスキントの関係である。

3.5 エネルギー

浮体が時間 t までになす仕事は静水圧を除いて

$$W(t) = - \int_0^t dt \int_C p \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -\rho \int_0^t dt \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad \dots\dots\dots (3.5.1)$$

グリーンの定理と水面条件から

$$\begin{aligned}
 -\rho \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds &= \rho \iint_D \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \nabla \phi dx dy - \rho \int_F \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial y} dx \\
 &= \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy + \frac{\rho g}{2} \frac{d}{dt} \iint_F \eta^2 dx, \\
 &= \frac{d}{dt} (T + V), \quad \dots\dots\dots (3.5.2)
 \end{aligned}$$

それ故

$$W(t) = [T + V]_{t=0}^t \quad \dots\dots\dots (3.5.3)$$

ここに T は運動エネルギー、 V はポテンシャルエネルギー

特に

$$\begin{aligned}
 W(\infty) &= -\rho \int_0^\infty dt \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \\
 &= \frac{-\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty i\omega d\omega \int_C \phi(\omega) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} ds \\
 &= \frac{\rho}{2\pi i} \int_0^\infty \omega d\omega \left[\int_C \left(\phi(\omega) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} - \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \right], \quad \dots\dots\dots (3.5.4)
 \end{aligned}$$

となるから (2.6.3) (2.6.4) によりこれは放射波が持ち去るエネルギーとなる。

プランシュレルの定理は、

$$\int_{-\infty}^\infty f_1(\tau) f_2(t+\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F_1(\omega) \bar{F}_2(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots (3.5.5)$$

であるから例えば入射波について (3.3.12) より

$$\int_{-\infty}^\infty \eta_W(x, \tau) \eta_W(x, t+\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty A(\omega) \bar{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \dots\dots\dots (3.5.6)$$

これは波浪統計でよく知られた関係でコログラムのフーリエ変換はエネルギースペクトル密度に等しい事を示す。

同様な式が (3.3.5) に対しても成立つ。

3.6 運動方程式と過渡応答

簡単の為に上下ゆれを考えよう。

運動方程式は周波数面で考えるのが簡単で、今入射波が (3.3.12) で与えられるならば波の力は (3.4.8) のようになるから

$$(-\omega^2 M + \rho g B) Y = +\rho \omega^2 f_{ij} Y - \rho g A(\omega) H(K)$$

今

$$Z(\omega) = i \left(\omega M - \frac{\rho g B}{\omega} \right) - i \rho \omega f_{ij} , \quad \dots\dots\dots (3.6.1)$$

とおくと

$$i \omega Y Z = - \rho g A(\omega) H(K) , \quad \dots\dots\dots (3.6.2)$$

となり

$$Y(\omega) = \rho g i \frac{A(\omega)}{\omega Z(\omega)} H(K) , \quad \dots\dots\dots (3.6.3)$$

$$y(t) = \frac{\rho g i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega Z(\omega)} H(K) e^{+i\omega t} d\omega ,$$

をうる。

また波がなく従って(3.6.2)の右辺が0で

$$\text{最初に } y(0) = y_0 , \quad \dot{y}(0) = 0 , \quad \dots\dots\dots (3.6.4)$$

として、つまり押えていて $t=0$ ではなすならば

$$Y(\omega)/y_0 = \frac{Z(\omega) + i \rho g B/\omega}{i(\omega) Z(\omega)} , \quad \dots\dots\dots (3.6.5)$$

$$y(t)/y_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(\omega) + \rho g i B/\omega}{\omega Z(\omega)} e^{+i\omega t} d\omega ,$$

この時は(3.3.5)によって、浮体を充分離れた所の水面変位は

$$\eta(x, t) \rightarrow - \frac{\rho B}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H^+(K) e^{-iKx+i\omega t}}{\omega Z(\omega)} d\omega , \quad \dots\dots\dots (3.6.6)$$

$$\therefore U(\omega) = i\omega Y - y_0$$

それ故上式は(3.6.3)において $A(\omega)=1$ 、つまりパルス波を浮体にあてた時の浮体の上下ゆれに等しい。

竹沢はパルス波を起して浮体の運動をフーリエ変換して波浪中の応答関数を実験的に求めているが上式によれば発散波によって求まる事になる。

また上式を t の大きい所で漸近展開すると

$$\eta(x, t) \xrightarrow{\frac{gt^2}{4x} \gg 1} \frac{By_0}{4\sqrt{2\pi}} \frac{g^{\frac{3}{2}} t^2}{x^{\frac{5}{2}}} \mathcal{R}e \left[\frac{H^+ \left(\frac{g^2 t^2}{4x^2} \right)}{Z \left(\frac{gt}{2x} \right)} e^{\frac{ig}{4x} t^2} \right] , \quad \dots\dots (3.6.7)$$

となる。

つまり波高の時間的变化の envelope は波浪中の周波数応答になっている。

参 照 文 献

- 1) 造船協会 60 周年記念叢書第 2 卷
 - 2) Stoker, J.J., "Water Waves", The mathematical theory with applications, Interscience Publishers, New York, 1957
 - 3) Wehausen, J.V. & Laitone, "Surface Waves", Handbuch der Physik, Bd. 9, Springer, 1960
 - 4) Havelock, T.H., "Collected Papers"
 - 5) Courant und Hilbert, "Methoden der Mathematischen Physik", Bd. 1 & 2, Springer, 1931
 - 6) Morse and Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", Part I & II, MacGraw-Hill, 1953
 - 7) Bergmann & Shiffer, "Kernel Functions and Elliptic Equations in Mathematical Physics", Academic Press, 1953
 - 8) Titchmarsh, E.C., "Introduction to the Theory of Fourier Integrals", 2nd. ed. Oxford, 1937
 - 9) Kellog, O.D., "Foundation of Potential Theory", New York, 1929
 - 10) Witham, G.B., "Linear and Nonlinear Waves", John-Wiley & Sons. 1973
- B 1) "波の中の船の横揺れ運動の理論について" 及び同統報防大理工学研究報告第 3 卷 1 号
昭和 40 年 5 月, 第 3 卷 3 号, 昭和 41 年
- B 2) "船体運動のインパルス応答とその発散波について" 同上 第 11 卷 2 号, 昭和 48 年 9 月
- B 3) "On the Theory of Wave-Free Ship Forms" 防大英文紀要, Vol. 7, No.1, June. 1967
- B 4) "On Boundary Value Problems of an Oscillating Body Floating on Water", 同上, Vol.8, No.1, Oct.1968
- B 5) "水面で動揺する 2 次元平板に働く流体力について" 及び統報関西造協誌 154 号昭和 49 年, 163 号, 昭和 51 年, 小松共著
- B 6) "逆時間速度ポテンシャルについて", 同上, 159 号, 昭和 50 年
- B 7) "変位ポテンシャルについて", 同上, 169 号, 昭和 53 年
- B 8) "水の波の理論における内部問題について", 西部造船会報 57 号, 昭和 54 年, 経塚共著

砕氷船の所要馬力について

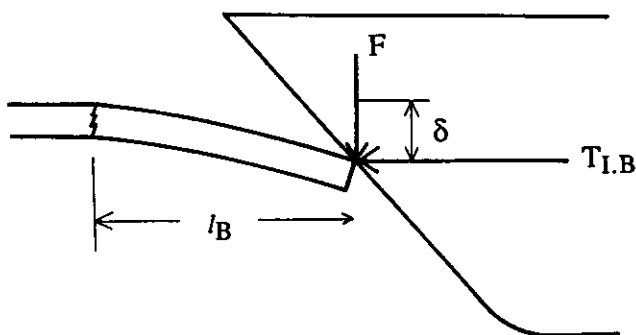
1983. 7. 18 別所正利

内容目次

1. 砕氷のための動力と砕氷効率
2. 縦ゆれ周期と速度

1. 砕氷のための動力と砕氷効率

氷は船の推力を受けて図のように下方に力 F を受け、丁度 δ だけ変位した時 ℓ_B だけ割れるものとする。



力 F が氷を割るためになす仕事は

$$\frac{1}{2} F \delta \quad , \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

ℓ_B だけ割れるから単位長さだけ割る為の仕事は

$$R_{PIB} = \frac{F \delta}{2 \ell_B} \quad (\text{kg}) \quad , \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

所要動力は船速を V として

$$P_{IB} = \frac{F \delta V}{2 \ell_B} = R_{PIB} \cdot V \quad , \quad \dots\dots\dots (1.3)$$

一方推力 T と F は (0.4) 式より

$$F = \eta_F T \quad , \quad \dots\dots\dots (1.4)$$

$$\eta_F = \cot \theta \frac{1 - \mu \tan \theta}{1 + \mu \cot \theta} \quad ,$$

船が砕氷のために費した動力を P_{DIB} とすると砕氷のための推力

$$V T_{IB} = \eta_P P_{DIB} \quad , \quad \dots\dots\dots (1.5)$$

砕氷の為の所要動力 (1.3) と P_{DIB} の比を砕氷効率となづけると

$$\eta_{IB} = \frac{P_{IB}}{P_{DIB}} = \frac{\eta_F \eta_P}{2} \left(\frac{\delta}{\ell_B} \right) \quad , \quad \dots\dots\dots (1.6)$$

具体的に「しらせ」をとりあげ、氷については2次元理論を使用して見積って見る。

「しらせ」 $L = 134 \text{ m}$, $B = 28 \text{ m}$, $d = 9.75 \text{ m}$
 $\Delta = 18,600 \text{ t}$, $30,000 \text{ HP}$ (1.7)
 船水切角 $\theta = 21.3^\circ$

さて氷の方は2次元理論によれば § 1 氷厚 t に対し

$$\frac{F \delta}{2 B \ell_B} \doteq 0.48 \frac{\sigma_f^2}{E} t = 1.25 t \quad , \quad \dots\dots\dots (1.8)$$

今は $\sigma_f = 5 \times 10^4 \text{ kg/m}^2$, $E = 9.5 \times 10^8 \text{ kg/m}^2$ と仮定する。

それ故 $R_{PIB} = \left\{ \begin{array}{ll} 35 \text{ kg} & \text{for } t = 1 \text{ m} \\ 70 \text{ kg} & \text{for } t = 2 \text{ m} \end{array} \right\}$ (1.9)

なお § 1 の計算より

氷厚(t)	F/B	ℓ_B	δ	ℓ_B/δ
1 m	770 kg/m	18.5 m	.060 m	308
2 m	1,820	31.3	.086	364

一方、(1.4) に $\theta = 21.3^\circ$, $\mu = 0.1$ とすると

$$\eta_F \doteq 1.96 \doteq 2 \quad , \quad \dots\dots\dots (1.10)$$

それ故 (1.6) より $\eta_P \doteq 0.5$ としても

$$\eta_{IB} \doteq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{600} & \text{for } t = 1 \text{ m} \\ \frac{1}{700} & \text{for } t = 2 \text{ m} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (1.11)$$

砕氷の為に必要な船の動力は $V = 3 \text{ m/s}$ とすると

$$P_{DIB} \doteq \left\{ \begin{array}{ll} 60,000 \text{ kg-m/sec} = 600 \text{ kW} & \text{for } t = 1 \text{ m} \\ 150,000 \text{ kg-m/sec} = 1,500 \text{ kW} & \text{for } t = 2 \text{ m} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (1.12)$$

この値は小さすぎるように思われる。

因みに流体抵抗 R_W を

$$R_W = C_D \frac{\rho}{2} B d V^2 \quad , \quad \dots\dots\dots (1.13)$$

の形で表わし $C_D = 1$ とおくと $V = 3 \text{ m/s}$ として

$$R_W V = \frac{\rho}{2} B d V^3 = 376,000 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \doteq 3,760 \text{ kW}$$

となり、軸馬力から見てかなり妥当な値のように思われる故(1.12)のさらに3倍位が現実に近い値であろうか。

また今は平均値で論じてしまったが、実際にはエンジンの荷重は大きく変動するからその余裕を見ているのだろうか。

いづれにしても砕氷に必要なパワーは想像を絶する位小さく、一方船の推力で氷にのし上げて割る形式の砕氷効率は大変悪い事だけは確かであろう。

2. 縦ゆれ周期と速度

砕氷しながら航走する時は略固有周期で縦ゆれと横ゆれをしているようである。

これは一度氷がわれると船が沈み、次に船が上がった時氷の上ののし上げるからであろう。

一方氷板にぶつかる時抵抗が大きいためであろうからこの点から適正な速度は、縦ゆれ固有周期を T_P とすると

$$V \doteq \ell_B / T_P \quad , \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

「しらせ」の場合 $T_P = 6 \sim 7 \text{ sec}$ と考えられる故、氷厚 1 m の時 $V \doteq 6 \text{ kts}$ となる。

この事から逆に強制的に縦ゆれをさせて砕氷する事が考えられるがその為に必要な強制モーメントは明らかに氷の反力 F かける半船長で大変大きくなる。

F は高々数十トンで、氷が割れるまでの時間は船の固有周期に比較すればほんの瞬間にすぎない故、最も実際的な方法としては船首前方に上下に動く砕氷装置をとりつけてこれで周期的に割りながら進むのがよからう。それに必要な動力は今度は(1.3)に機械効率を考えたものでよく極めて小さいと考えられる。

また流体抵抗についても船と氷板の間の氷が楽に動ける位の間隙があればずっと小さくなると考えられるから少し船幅より広く割っておけばよい。

その装置の砕氷周期を T_I とすれば適正速度は(1.3)同様に表わせる。

あるいは適正速度はプロペラ・トルク or スラストに大きい周期的変動が出ないように選ぶと考えてもよからう(?)。

いづれにしてもこの場合は動的問題となるので運動を考えねばならず、周波数又はインディシャル応答試験が必要とならう。

浅水波の一次元理論

別所 正利

One dimensional theory of shallow water wave

Masatoshi Bessho

浅水で平面波のみ存在するような場合，波は一次的に伝播して行くので大変簡単である。浅水の仮定では速度は深さ方向に不変であるから物体としては水平平板と垂直で底まで達する平板しか扱えないけれど見通しが楽である。

内容目次

- | | |
|----------------|---------------------|
| 1. 解と力およびモーメント | 4. 端部上下可動平板 |
| 2. 平板（水平） | 5. 前進速度のある場合 |
| i) ~v) 解 | i) 上下動 ($V > c$) |
| vi) 造波推進 | ii) 横ゆれ ($V > c$) |
| vii) 反射と透過 | iii) 散乱 ($V > c$) |
| viii) 波消 | i) 上下ゆれ ($V < c$) |
| 3. 壁と平板 | ii) 縦ゆれ ($V < c$) |
| i) 壁と水平平板 | iii) 散乱 ($V < c$) |
| ii) 動く壁 | |

1. 解と力およびモーメント*

$e^{i\omega t}$ なる因子を除いて速度ポテンシャルの満たすべき条件は

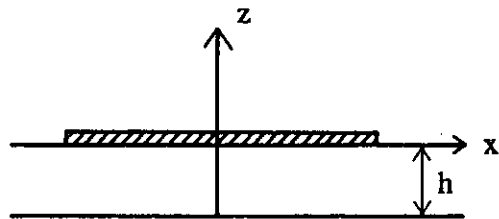
$$\varphi_{xx}(x) + K^2 \varphi(x) = 0, \quad K^2 = \frac{\omega^2}{gh} \quad \dots\dots\dots(1.1)$$

又平板の垂直変位を $\zeta(x)$ とすると

$$\varphi_{xx}(x) + \frac{i\omega}{h} \zeta(x) = 0, \quad \dots\dots(1.2)$$

圧力 $p(x)$ は静水圧を除いて

$$p(x)/\rho = -i\omega \varphi(x), \quad \dots\dots(1.3)$$



* 「浅い水面に浮ぶ平板の問題」，昭48. 10. 28

今
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -i\omega X \phi(x) & , & \\ \zeta(x) &= X z(x) & , & \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1.4)$$

Xは運動振幅

又、入射波は（振幅を a として） x の正方向から来る波に

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= i \frac{g a}{\omega} \phi_0(x) & , & & \phi_0(x) &= e^{i K x} \\ \zeta_0 &= a e^{i K x} & , & & z_0(x) &= \frac{-\omega^2}{g} e^{i K x} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1.5)$$

散乱ポテンシャルは

$$\varphi_d(x) = \frac{i g a}{\omega} \phi_d(x) & , & \dots\dots\dots (1.6)$$

のように規格化しておこう。

そうすると(1.1) , (1.2) , (1.3)は

$$\phi_{xx} + K^2 \phi = 0 & , & \text{for free surface} & \dots\dots\dots (1.1')$$

$$\phi_{xx} = \frac{z}{h} & , & \text{for flat plate} & \dots\dots\dots (1.2')$$

$$p/\rho = -\omega^2 X \phi & , & (p_0 + p_d)/\rho = g a (\phi_0 + \phi_d) & , & \dots\dots (1.3')$$

力とモーメントは

$$\begin{aligned} Z &= \int p dx = -\rho \omega^2 X \int \phi dx & , & \\ M &= \int p x dx = -\rho \omega^2 X \int \phi x dx & , & \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

又、左右方向には速度 ($u = \phi_x$) は z -方向に一定と考えているので垂直平板としては底まで達しているものしか考えられず、それについて水平力は

$$S = p h = -\rho \omega^2 h X \phi(x) & , & \dots\dots\dots (1.8)$$

又モーメントは0である。

水平平板の上下動について下添字 2 を附すると

$$z_2(x) = 1 \quad \text{for } |x| < b & , & \dots\dots\dots (1.9)$$

ローリングについて下添字 3 を附すると

$$z_3(x) = x \quad \text{for } |x| < b & , & \dots\dots\dots (1.10)$$

$$\int_{-b}^b \phi_2 dx = f_{2,2} & , & \int_{-b}^b \phi_3 x dx = f_{3,3} & , & \dots\dots\dots (1.11)$$

とおくと

$$\begin{aligned} Z &= -\rho \omega^2 X_2 f_{2,2} & , & \\ M &= -\rho \omega^2 X_2 f_{3,3} & , & \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1.12)$$

又垂直平板については左右動しか考えられないでそれを添字 1 で示すと

$$S = -\rho \omega^2 X_1 f_{1,1} & , & f_{1,1} = h \phi_1(x) & , & \dots\dots\dots (1.13)$$

波の強制力は垂直平板では完全反射であるから平板が $x = \xi$ の所にあると

$$\phi_d(x) = e^{-iKx+2iK\xi}, \quad \phi_0(x) = e^{iKx}, \quad \dots\dots\dots (1.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} (\phi_0 + \phi_d) \right) \Big|_{x=\xi} = 0$$

故 $S_W = 2\rho g a h e^{iK\xi}, \quad \dots\dots\dots (1.15)$

水平平板については後に求めるが

$$\begin{bmatrix} Z_W \\ M_W \end{bmatrix} = \rho g a \int (\phi_0 + \phi_d) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} dx, \quad \dots\dots\dots (1.16)$$

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \phi_d z_j dx &= h \int_{-b}^b \phi_d \phi_{jxx} dx = h \int_{-b}^b \phi_j \phi_{dxx} dx \\ &= - \int_{-b}^b \phi_j z_0 dx = - \int_{-b}^b \phi_j e^{iKx} dx, \quad \dots\dots\dots (1.17) \end{aligned}$$

それ故今

$$H_j(K) = \int_{-b}^b e^{iKx} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} - \phi_j \right) dx, \quad \dots\dots\dots (1.18)$$

とおくと

$$\begin{bmatrix} Z_W \\ M_W \end{bmatrix} = \rho g a \begin{bmatrix} H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}, \quad \dots\dots\dots (1.19)$$

2. 平 板 (水平)

i) 上下動

$z=1$ において

$$\phi(x) = \frac{1}{b} \left(\frac{x^2}{2} + c \right) \quad \text{for } |x| < b,$$

$$\phi(x) = A^\pm e^{\mp iKx} \quad \text{for } \begin{matrix} x > b \\ x < -b \end{matrix} \quad \Big\}$$

$$\phi(b) = \frac{1}{b} \left(\frac{b^2}{2} + c \right) = A^+ e^{-iKb} = A^- e^{-iKb}$$

$$\phi_x(b) = \frac{1}{b} (b) = -iK A^+ e^{-iKb}$$

$$\therefore A^+ = A^- = \frac{ib}{Kh} e^{iKb},$$

$$c = -\frac{b^2}{2} + \frac{ib}{K},$$

$$f_{22} = \frac{1}{h} \int_{-b}^b \left[\frac{x^2 - b^2}{2} + \frac{ib}{Kh} \right] dx = -\frac{2b^3}{3h} + \frac{2ib^2}{Kh},$$

ii) 横ゆれ

$z = x$ とおくと

$$\phi(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{x^3}{6} + cx \right)$$

$$\phi(b) = \frac{b}{h} \left(\frac{b^2}{6} + c \right) = A^+ e^{-iKb} = -A^- e^{-iKb},$$

$$\phi_x(b) = \frac{1}{h} \left(\frac{b^2}{2} + c \right) = -iKA^+ e^{-iKb},$$

$$A^+ = -A^- = -\frac{b^3 e^{iKb}}{3h(1+iKb)},$$

$$c = -\frac{b^2}{6} - \frac{b^2}{3(1+iKb)},$$

$$\begin{aligned} f_{ss} &= \frac{b^5}{15h} + \frac{1}{h} \frac{2b^3}{3} c = -\frac{2b^5}{45h} - \frac{2b^5}{9h(1+iKb)} \\ &= -\frac{b^5}{h} \left\{ \frac{2}{45} + \frac{2}{9(1+K^2 b^2)} \right\} + \frac{2iKb^5}{9h(1+K^2 b^2)}, \end{aligned}$$

iii) 散乱 $\phi_0 = e^{iKx}$ とすると $z_0 = -\frac{\omega^2}{g} e^{iKx}$

以下 ϕ_d を ϕ と記すと

$$\phi = -e^{iKx} + C + Dx, \quad \text{for } |x| < b$$

$$= A^\pm e^{\mp iKx}, \quad \text{for } |x| > b$$

$$\left. \begin{aligned} C + Db - e^{iKb} &= A^+ e^{-iKb} \\ C - Db - e^{-iKb} &= A^- e^{-iKb} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} D - iK e^{iKb} &= -iKA^+ e^{-iKb} \\ D - iK e^{-iKb} &= iKA^- e^{-iKb} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} iK(C + Dh) + D &= 2iK e^{iKb} = iKC + (1 + iKb)D \\ iK(C - Dh) - D &= 0 = iKC - (1 + iKb)D \end{aligned} \right\}$$

$$C = e^{iKb}, \quad D = \frac{iK e^{iKb}}{1 + iKb},$$

$$A^+ = e^{2iKb} - \frac{D}{iK} e^{iKb} = \left(1 - \frac{1}{1 + iKb} \right) e^{2iKb} = \frac{iKb}{1 + iKb} e^{2iKb},$$

$$(A^- + A^+) iK e^{-iKb} = iK (e^{iKb} - e^{-iKb})$$

$$\therefore A^- + A^+ = e^{2iKb} - 1$$

$$A^- = \frac{e^{2iKb}}{1+iKb} - 1, \quad ,$$

$$\int_{-b}^b (\phi_0 + \phi_d) dx = 2bC = 2be^{iKb} = 2iKhA_2^+$$

$$\int_{-b}^b (\phi_0 + \phi_d) x dx = \frac{2}{3} b^3 D = \frac{2iKb^3 e^{iKb}}{3(1+iKb)} = 2iKhA_3^-$$

次に $\phi_0 = e^{-iKx}$ つまり x の正方向に向う入射波の場合は同様にして

$$C = e^{iKb}, \quad D = \frac{-iK}{1+iKb} e^{iKb},$$

$$A^+ = \frac{e^{2iKb}}{1+iKb} - 1, \quad A^- = \frac{iKb}{1+iKb} e^{2iKb},$$

となり力の方も上下方向は同じでモーメントのみ符号異なる。それ故、原点に垂直壁がある場合は両者を加え合せて

$$\phi_0 = e^{iKx} + e^{-iKx}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 + \phi_d &= 2C, \quad \text{for } |x| > b \\ &= e^{2iKb-iKx} + e^{iKx}, \quad \text{for } x > b \\ &= e^{2iKb+iKx} + e^{-iKx}, \quad \text{for } x < b \end{aligned} \right\}$$

波の強制力は

$$\left. \begin{aligned} Z_W &= \rho g a \int_0^b (\phi_0 + \phi_d) dx = \rho g a 2bC = \rho g a 2be^{iKb} \\ M_W &= \frac{h}{2} Z_W \end{aligned} \right\}$$

又、壁に働く力は

$$S_W = (\phi_0 + \phi_d)_{x=0} h = 2\rho g a h e^{iKe} = \frac{h}{b} Z_W$$

iv) 同等関係

$$Z_W = 2\rho g a b e^{iKb} = -2\rho g a iKh A_2^-$$

$$M_W = 2\rho g a iKh A_3^-$$

$$f_{22} = -\frac{2b}{3h} + i \frac{2Kh}{b} |A_2^+|^2$$

$$f_{33} = -\frac{2b^3}{45b} \left(1 + \frac{5}{1+K^2 e^2}\right) + 2iKh |A_3^+|^2$$

$$A_d^+ + A_d^- + 1 = e^{2iKb} = -A_2^+ / A_2^+$$

$$-A_d^+ + A_d^- + 1 = \frac{1-iKb}{1+iKb} e^{2iKb} = -A_3^+ / A_3^+$$

$$A_2^+ = |A_2| e^{i\alpha_2}, \quad A_3^- = |A_3| e^{i\alpha_3}$$

$$\alpha_2 = Kb + \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \pi + Kb - \tan^{-1}(Kb)$$

$$|A_2| = \frac{b}{Kh}, \quad |A_3| = \frac{b^3}{3h\sqrt{1+K^2b^2}}$$

V) 運動方程式

単位入射波中の運動は

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{X}_2 + \rho g(2b)X_2 &= Z + Z_W \\ I\ddot{X}_3 + \rho g M \cdot GM X_3 &= M + M_W \end{aligned} \right\}$$

$$\text{今, } i\omega X_2 = U_2, \quad i\omega X_3 = U_3$$

とおき上式を

$$\left. \begin{aligned} U_2 Z_2 &= Z_W \\ U_3 Z_3 &= M_W \end{aligned} \right\}$$

と書くと

$$Z_2 = -i\rho\omega f_{22} + i\left[\omega M - \frac{2\rho g b}{\omega}\right]$$

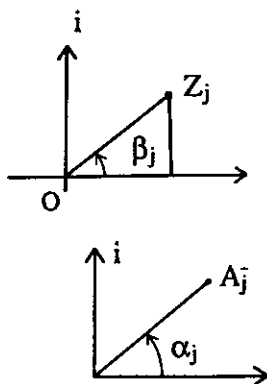
$$= 2\rho\omega Kh |A_2|^2 + i\left[\omega M + \frac{2\rho b^3\omega}{3h} - \frac{2\rho g b}{\omega}\right],$$

$$Z_3 = i\left[\omega I - \frac{\rho g M \overline{GM}}{\omega}\right] - i\rho\omega f_{33}$$

$$= 2\rho\omega Kh |A_3|^2 + i\left[\omega I + \frac{2b^5}{45h} \left(\frac{G+K^2b^2}{1+K^2b^2}\right) - \frac{\rho g M \overline{GM}}{\omega}\right]$$

$$Z_j = 2\rho\omega Kh |A_j|^2 \frac{e^{i\beta_j}}{\cos \beta_j}, \quad \text{と書くと}$$

$$U_j = \frac{2\rho g i Kh \overline{A_j}}{2\rho\omega Kh |A_j|^2} e^{+i(x_j - \beta_j)} \cos \beta_j = \frac{i g e^{+i(\alpha_j - \beta_j)}}{\omega |A_j^-|} \cos \beta_j$$



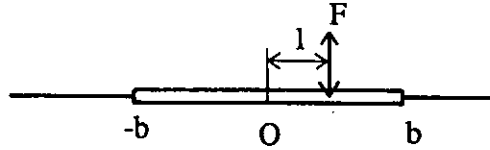
波以外の Damping がある場合も次のようにかくことにしよう。

$$Z_j = (1+r) \cdot 2 \rho \omega K h |A_j|^2 e^{i\beta_j} / \cos \beta_j ,$$

vi) 造波推進

図の点 ℓ に F なる周期力が加わる
と運動は

$$X_2 = \frac{F}{i \omega Z_2} , X_3 = \frac{\ell F}{i \omega Z_3} ,$$



出て行く波は

$$A^+ = -\frac{\omega^2}{g} (X_2 A_2^+ + X_3 A_3^+) ,$$

for $x > 0$

$$A^- = -\frac{\omega^2}{g} (X_2 A_2^- + X_3 A_3^-) = -\frac{\omega^2}{g} (X_2 A_2^+ - X_3 A_3^+) , \quad x < 0$$

今, $A^+ = 0$ となるためには

$$X_2 / X_3 = -A_3^+ / A_2^+ = \frac{Z_3}{\ell Z_2}$$

それ故

$$\frac{|A_3|^2}{\ell |A_2|^2} \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_3} e^{i(\beta_3 - \beta_2)} = \frac{-A_3^+}{A_2^+} = + \frac{|A_3^+| e^{i\beta_3}}{|A_2^+| e^{i\beta_2}}$$

$$\ell = + \frac{A_3}{A_2} \frac{\cos \beta_2}{\cos \beta_3} ,$$

$$\left| \frac{A_3}{A_2} \right| = \frac{h^3}{3h\sqrt{(1+K^2b^2)}} \times \frac{Kh}{b} = \frac{Kb^2}{3\sqrt{1+K^2b^2}}$$

この時 $A^- = -2 \frac{\omega^2}{g} X_2 A_2^+ = +2i \frac{\omega}{g} \frac{A_2^+}{Z_2} F$

$$= i \frac{(\cos \beta_2) F}{\rho g K h |A_2|} e^{i(\alpha_2 - \beta_2)} = i \frac{\cos \beta_2}{\rho g b} F e^{i(\alpha_2 - \beta_2)}$$

推力は $T = \frac{\rho g B}{2} |A^-|^2$, (B は奥行幅)

明らかに $\beta_2 = 0$ つまり上下同調時に T は最大となる。

F を得るために回転円板上の偏心(r)重量(ω)を考えると

$$F = \frac{\omega}{g} r \omega^2 / B , \quad (B \text{ は } y \text{ 方向の幅})$$

$$\therefore A^- = \frac{w r \omega^2}{\rho g^2 b B} = \frac{w}{\rho y B b} \cdot \frac{r \omega^2}{g}$$

一方，上下同調故

$$\omega^2 = \frac{2 \rho g b B}{M + \frac{2 \rho B b^3}{3 h}}$$

$$\therefore A^- = \frac{2 w r}{g \left(M + \frac{2 \rho B b^3}{3 h} \right)},$$

平板は抵抗 R に 合うよう動き出すからその速度を V とすると，

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho}{2} B b V^2 C_R \\ &= T = \frac{\rho g B}{2} |A^-|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore V = |A| \sqrt{\frac{g}{b C_R}}$$

$$\text{効率} \eta = \frac{R V}{T V W} = \frac{V}{\sqrt{g h}} = \frac{|A|}{\sqrt{b h C_R}}$$

vii) 反射波と透過波

正の正方向からの単位入射波に対し，反射波，透過波の振幅は

$$\left. \begin{aligned} A_R &= A_d^+ - \frac{\omega^2}{g} (X_2 A_2^+ + X_3 A_3^+), \\ A_T &= 1 + A_d^- - \frac{\omega^2}{g} (X_2 A_2^- + X_3 A_3^-), \end{aligned} \right\}$$

所で

$$\frac{\omega^2}{g} X_j A_j^- = e^{i(2\alpha_j - \beta_j)} \cos \beta_j$$

故

$$\left. \begin{aligned} 1 + A_d^- + A_d^+ &= e^{2i\alpha_2} \\ 1 + A_d^- - A_d^+ &= e^{2i\alpha_3} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_R + A_T &= e^{2i\alpha_2} (1 - 2 e^{-i\beta_2} \cos \beta_2) = -e^{2i(\alpha_2 - \beta_2)}, \\ A_T + A_R &= e^{2i\alpha_3} (1 - 2 e^{-i\beta_3} \cos \beta_3) = -e^{2i(\alpha_3 - \beta_3)} \end{aligned} \right\},$$

$A_T = 0$ なる為には

$$\alpha_2 - \beta_2 - (\alpha_3 - \beta_3) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$A_R = 0$ なる為には

$$\alpha_2 - \beta_2 - (\alpha_3 - \beta_3) = 4n\pi$$

n は正負の整数

それ故 $A_T = 0$ に対して

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + Kb, \quad \alpha_3 = \pi + Kb - \tan^{-1} Kb \text{ を代入すると}$$

$$\beta_3 - \beta_2 = (2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} Kb = -\tan^{-1} Kb \pmod{n\pi}$$

のようになる。

viii) 波消し

前節で

$$\frac{\omega^2}{g} X_j A_j = \frac{e^{i(2\alpha_j - \beta_j)}}{1+r_j} \cos \beta_j$$

とし波減衰の r_j 倍の減衰を追加すると

$$A_R + A_T = \frac{e^{2i\alpha_2}}{1+r_2} (r_2 - e^{-2i\beta_2})$$

$$A_T - A_R = \frac{e^{2i\alpha_3}}{1+r_3} (r_3 - e^{-2i\beta_3})$$

それ故、最も簡単な case は

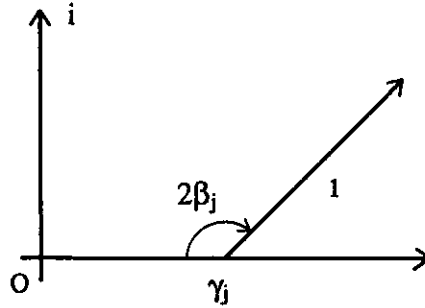
$$A_T = A_R = 0, \quad ,$$

$$\text{for } \begin{pmatrix} r_2 = r_3 = 1 \\ \beta_2 = \beta_3 = 0 \end{pmatrix}$$

$A_T = 0$ の為には

$$\frac{e^{2i\alpha_2}}{1+r_2} (r_2 - e^{-2i\beta_2}) = \frac{e^{2i\alpha_3}}{1+r_3} (r_3 - e^{-2i\beta_3})$$

これは複雑な関係である。



3. 壁と平板

i) 壁と平板(右図)

平板の上下動による波は

$$-\frac{\omega^2}{g} X_2 A_2^+$$

散乱波は(入射波を除いて)

$$e^{2iKb - iKx}$$

それ故先ず, 反射波が0になる為には

$$e^{2iKb} = \frac{\omega^2}{g} X_2 A_2^+ = \frac{-i\omega}{g} \frac{Z_W A_2^+}{Z_2}$$

$$Z_W = -2\rho g iKh A_2^-$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} Z_{20}, \quad (Z_{20} \text{は幅 } 2b \text{ の場合の impedance})$$

$$= \frac{1+r}{2} \cdot 2\rho\omega Kh |A_2|^2 e^{i\beta_2} \operatorname{cosec} \beta_2,$$

$$\frac{-i\omega}{g} \frac{Z_W A_2^+}{Z_2} = \frac{-2}{1+r} e^{2i\alpha_2 - i\beta_2} \cos \beta_2$$

∴ $r = 1, \beta_2 = 0$ の時反射波はなくなる。

次に板の上下動で壁に働く水平力は

$$S = -\rho\omega^2 h X_2 \phi_2(0) = -\rho\omega^2 X_2 \left(\frac{ib}{K} - \frac{b^2}{2} \right),$$

波の水平力は

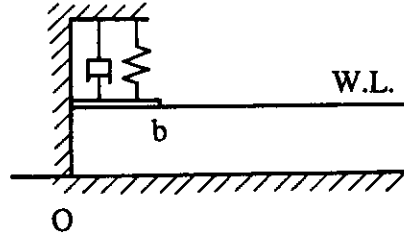
$$S_W = \frac{h}{b} Z_W = -\frac{2\rho gh}{b} iKh A_2^-$$

それ故 $S + S_W = 0$ なる為には

$$\frac{h}{b} Z_W = \rho\omega^2 X_2 \left(\frac{ib}{K} - \frac{b^2}{2} \right)$$

$$i\omega X_2 = \frac{Z_W}{Z_2}$$

$$\frac{h}{b} = \frac{\rho\omega}{Z_2} \left(\frac{b}{K} + \frac{ib^2}{2} \right)$$



$$Z_2 = (1+r) \rho \omega K h |A_2|^2 e^{i\beta_2} / \cos \beta_2$$

$$= \frac{\rho \omega b^2}{Kh} \left(1 + \frac{iKb}{2}\right)$$

$$|A_2|^2 = \left(\frac{b}{Kh}\right)^2$$

$$\frac{e^{i\beta_2}}{\cos \beta_2} = \frac{1 + \frac{iKb}{2}}{1+r} = 1 + i \tan \beta_2$$

それ故 $r=0$ ならば

$$\tan \beta_2 = \frac{Kb}{2}$$

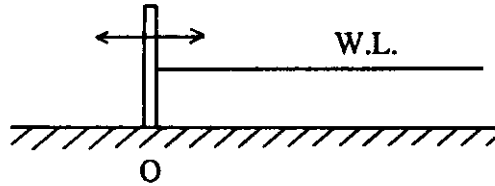
ii) 動く垂直壁

振巾 X_1 で壁が左右に動くと

$$\varphi(x) = A_1^+ e^{-iKx}$$

$$i\omega X_1 = \varphi_x(0) = -iK A_1^+$$

$$A_1^+ = -\frac{\omega}{K} X_1$$



左右力

$$S_1 = -i\omega \rho h \varphi(0) = -\omega \rho h A_1^+$$

$$= \frac{i\rho\omega^2}{K} h X_1 = i\rho g h^2 K X_1$$

波振幅は

$$\zeta = -\frac{K^2 h}{i\omega} \varphi = -\frac{i\omega}{g} \varphi$$

$$= \frac{i\omega^2}{gK} X_1 e^{-iKx} = i h K X_1 e^{-iKx}$$

一方散乱波 (単位入射波の反射波) は e^{-iKx}

それ故 $i h K X_1 = -1$, $X_1 = \frac{i}{Kh}$, $A_1 = -\frac{i\omega}{K^2 h}$

とおくと反射波は消える。

この時

$$\varphi(x) = A_1^+ e^{-iKx} = -\frac{\omega}{K^2} \times \frac{i}{h} e^{-iKx}$$

$$\varphi_x(x) = -\frac{\omega}{Kh} e^{-iKx} ,$$

$$\varphi_{0x}(x) = -\frac{gK}{\omega} e^{iKx} ,$$

それ故壁の動きは入射波粒子のそこの動きに等しい。

運動方程式は

$$-\omega^2 M X_1 + k X_1 = -S_1 + S_W = -i\rho g h^2 K X_1 - 2\rho g h$$

$$i\omega X_1 = \frac{S_W}{Z_2} = \frac{-2\rho g h}{Z_2}$$

$$i\omega Z_2 = -\omega^2 M + k + i\rho g h^2 K$$

$$Z_2 = \frac{\rho g K h^2}{\omega} + i\left[\omega M - \frac{k}{\omega}\right]$$

同調時には

$$i\omega X_1 = -\frac{2\rho g h \omega}{\rho g K h^2} = -\frac{2\omega}{Kh}$$

$$\therefore X_1 = \frac{2i}{Kh}$$

これは波の消える時の倍であるから結局何時ものように波以外の減衰を波と同じだけ附加すればよい。

又壁に働く力が0になる為には

$$S_1 + S_W = 0 , \quad i\rho g h^2 K X_1 = -2\rho g h a$$

$$K X_1 = \frac{2i a}{h} ,$$

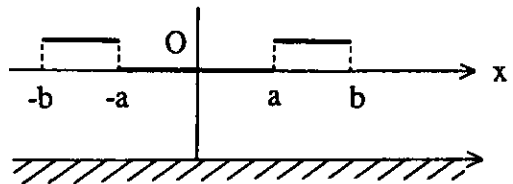
なお S_1 は X_1 と 90° 位相が異なる故 added mass term 等、つまり

Reactance 成分はない！

4. 端部上下可動平板

図の $a \sim b$ の部分が上下動するとする。 $\pm a$ の部分は静止しているとする。

左右対称に上下するポテンシャルを ϕ_4
 左右反対称に上下するポテンシャルを ϕ_5 } としよう。



$$\left. \begin{aligned} \phi_4 &= C & \text{for } |x| < a, \\ \phi_4 &= \frac{x^2}{2h} + Dx + E & \text{for } a < x < b \\ &= A^+ e^{-iKx} & \text{for } x > b \end{aligned} \right\} h \phi_{4,xx} = 1 \equiv z$$

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{a^2}{2h} + aD + E \\ 0 &= \frac{a}{h} + D \end{aligned} \right\} C = \frac{-a^2}{2h} + E,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b^2}{2h} + bD + E &= A^+ e^{-iKb} \\ \frac{b^2}{h} + D &= -iKA^+ e^{-iKb} \end{aligned} \right\} \frac{b}{h} (1 + \frac{iKb}{2}) + D(1 + iKb) + iKE = 0$$

$$iKE = + \frac{a}{h} (1 + iKb) - \frac{b}{h} (1 + \frac{iKb}{2})$$

$$E = \frac{a-b}{iKh} + \frac{ab - \frac{b^2}{2}}{h}$$

$$C = - \frac{(a-b)^2}{2h} + \frac{a-b}{i h K} = \frac{i(b-a)}{Kb} \left[1 + \frac{iK(b-a)}{2} \right]$$

$$A_4^+ = \frac{b-a}{-iKh} e^{iKb} = A_4^-$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi_4 dx &= \frac{1}{6h} (b^3 - a^3) + \frac{D}{2} (b^2 - a^2) + E(b-a) \\ &= (b-a) \left[+ \frac{b^2 + a^2 + ab}{6h} - \frac{(b+a)}{2} \times \frac{a}{h} + \frac{ba - \frac{b^2}{2}}{h} + \frac{a-b}{iKh} \right] \\ &= \frac{(b-a)}{h} \left[-\frac{a^2}{3} + \frac{2}{3} ab - \frac{b^2}{3} + i \frac{b-a}{K} \right] \\ &= \frac{(b-a)^2}{h} \left[\frac{i}{K} - \frac{(b-a)}{3} \right] \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= Cx & \text{for } |x| < a \\ \phi_3 &= \frac{x^2}{2h} + Dx + E & \text{for } b > x > a \\ &= A_3^+ e^{-iKx}, & \text{for } b < x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Ca &= \frac{a^2}{2h} + aD + E \\ C &= \frac{a}{h} + D \end{aligned} \right\} E = \frac{a^2}{2h}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b^2}{2h} + Db + \frac{a^2}{2h} &= A_s^+ e^{-iKb} \\ \frac{b}{h} + D &= -iKA e^{-iKb} \end{aligned} \right\} \frac{b}{h} \left(1 + \frac{iKb}{2} \right) + D(1+iKb) + \frac{iK}{2h} a^2 = 0$$

$$D = \frac{-1}{1+iKb} \left[\frac{b}{h} + \frac{iK}{2h} (a^2 + b^2) \right]$$

$$C = \frac{a}{h} + D = \frac{a(1+iKb) - b - \frac{iK}{2}(a^2 + b^2)}{h(1+iKb)}$$

$$= \frac{(a-b)}{h(1+iKb)} \left(1 - \frac{iK}{2}(a-b) \right)$$

$$A_s^+ = \frac{e^{iKb}}{-iKh(1+iKb)} \left[b(1+iKb) - b - \frac{iK}{2}(a^2 + b^2) \right]$$

$$= \frac{+(b^2 - a^2)}{2h(1+iKb)} e^{iKb}$$

主部の波強制力をなくすには端部振巾は $K(b-a)$ に逆比例しなければならないので $(b-a)$ が大きいとか又は K が大きくないとうまくない。

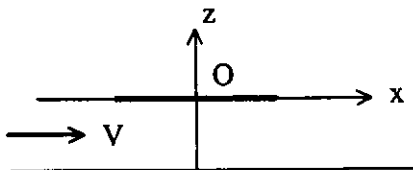
5. 前進速度のある場合

物体に固定した座標系に対して速度ポテンシャルは

$$\varphi(x) e^{i\omega_e t}$$

のように書けるとしよう。

ω_e ; 出会円周波数



$$gh\varphi_{xx}(x) e^{i\omega_e t} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi(x) e^{i\omega_e t} = 0$$

$$\varphi_{xx}(x) e^{i\omega_e t} + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta(x) e^{i\omega_e t} = 0$$

つまり

$$gh \varphi_{xx}(x) - (i\omega_e + V \frac{\partial}{\partial x})^2 \varphi(x) = 0$$

$$\varphi_{xx}(x) + \frac{1}{h} (i\omega_e + V \frac{\partial}{\partial x}) \zeta(x) = 0$$

$$\zeta(x) = -\frac{1}{g} (i\omega_e + V \frac{\partial}{\partial x}) \varphi(x)$$

圧力は $\frac{1}{\rho} p(x) = -(i\omega_e + V \frac{\partial}{\partial x}) \varphi(x)$,

一般解を $\varphi = e^{+iKx}$ とおくと ($K^2 = \omega^2/gh = (\frac{\omega}{c})^2$)

$$K^2 gh = (\omega_e + KV)^2 = \omega^2$$

$$\omega_e = \omega \left(\frac{V}{c} \pm 1 \right) , \quad c = \sqrt{gh}$$

$$= K(V \pm c)$$

今

$$K_1 = \frac{\omega_e}{V+c} \quad \left\{ \begin{array}{ll} K_2 = \frac{\omega_e}{V-c} & \text{for } V > c \\ K_2 = \frac{\omega_e}{c-V} & \text{for } V < c \end{array} \right.$$

とおくと

$V > c$ の時は

$$\varphi = A e^{-iK_1 x} + B e^{-iK_2 x}$$

で第1項は $(V+c)$ の速度で右方向に進み、第2項は $(V-c)$ で右方向に進む波であるが静止座標系から見ると第2項は左方向に進んでいるものである。

$V < c$ の時は

$$\varphi = A e^{-iK_1 x} + B e^{iK_2 x}$$

この時第2項の波速は $c (> V)$ なので左方に進む事ができる。

$$\left. \begin{array}{ll} \omega_e - K_1 V = \omega_1 \\ \omega_e - K_2 V = \omega_2 & \text{for } V > c \\ \omega_e - K_2 V = \omega_2 & \text{for } V < c \end{array} \right\}$$

$$\zeta = -\frac{i}{g} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \varphi(x)$$

単位振幅の入射波ポテンシャル

$$\varphi = \frac{ig}{\omega_1} e^{-iK_1 x} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{ig}{\omega_2} e^{-iK_2 x} & \text{for } V > c \\ \frac{ig}{\omega_2} e^{iK_2 x} & \text{for } V < c \end{array} \right\}$$

(向波) (追波)

◎ $V > c$ の場合

i) 上下動

$$\zeta = X_2 \quad \text{for } |x| < b$$

$$\varphi_{xx} + \frac{i\omega_s}{h} X_2 = 0 \quad \text{for } |x| < b$$

$$\varphi = -\frac{i\omega_s}{h} X_2 \left(\frac{x^2}{2} + cx + D \right) \quad \text{for } |x| < b$$

$$\varphi = 0 \quad \text{for } x < -b$$

$$\varphi = A e^{-iK_1 x} + B e^{-iK_2 x} \quad \text{for } x > b$$

$$\varphi = \frac{\omega_s X_2}{hi} \frac{(x+b)^2}{2} \quad \text{for } |x| < b$$

$$\frac{\omega_s X_2}{hi} 2b^2 = A e^{-iK_1 b} + B e^{-iK_2 b}$$

$$\frac{\omega_s X_2}{hi} 2b = -i (K_1 A e^{-iK_1 b} + K_2 B e^{-iK_2 b})$$

$$\frac{\omega_s X_2}{hi} 2b (iK_2 b + 1) = i (K_2 - K_1) A e^{-iK_1 b}$$

$$\frac{\omega_s X_2}{hi} 2b (iK_1 b + 1) = i (K_1 - K_2) A e^{-iK_2 b}$$

$$\frac{p}{\rho} = - (i\omega_s) \frac{\omega_s X_2}{hi} \frac{(x+b)^2}{2} - V \frac{\omega_s X_2}{hi} (x+b)$$

$$\int_{-b}^b \frac{p}{\rho} dx = -\frac{\omega_s^2 X_2}{2h} \frac{8b^3}{3} + \frac{iV\omega_s X_2}{2h} b^2 = \frac{2iV\omega_s X_2}{h} b^2 \left(1 + 2i \frac{\omega_s b}{3V} \right)$$

$$\int_{-b}^b (x+b)^2 x dx = \frac{4}{3} h^4$$

$$\int_{-b}^b (x+b) x dx = \frac{2h^3}{3}$$

$$\frac{1}{\rho} \int p x dx = i \frac{2}{3} \frac{\omega_s X_2}{h} b^3 V \left(1 + i \frac{h\omega_s}{V} \right)$$

ii) 横ゆれ

$$\zeta = X_3 x$$

$$\varphi_{xx} = -\frac{X_3}{b} (i\omega_e x + V)$$

$$\varphi = -\frac{iX_3}{h} \omega_e \frac{x^3}{6} - \frac{X_3 V}{h} \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

$$+ \frac{iX_3}{h} \omega_e \frac{b^3}{3} - \frac{X_3 V}{2h} b^2 - bC + D = 0$$

$$- \frac{iX_3}{h} \omega_e \cdot \frac{b^3}{2} + \frac{X_3 V}{h} b + C = 0$$

$$- \frac{iX_3}{h} \omega_e b^3 + \frac{X_3 V}{2h} b^2 + D = 0$$

$$\varphi = -\frac{iX_3}{h} \omega_e \left(\frac{x^3}{3} - \frac{b^3}{6} - \frac{b^2 x}{2} \right) - \frac{X_3 V}{2h} (x+b)^2$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi \Big|_{x=b} &= \frac{i\omega_e}{3h} X_3 b^3 - \frac{2Vb^2}{h} X_3 = A e^{-iK_1 b} + B e^{-iK_2 b} \\ \varphi_x \Big|_{x=b} &= -\frac{i\omega_e}{2h} X_3 b^2 - \frac{2V}{h} b X_3 = -iK_1 A e^{-iK_1 b} - iK_2 B e^{-iK_2 b} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{i\omega_e}{h} X_3 b^2 \left(\frac{iK_2 b}{3} - \frac{1}{2} \right) - \frac{2Vb}{h} X_3 (iK_2 b + 1) &= i(K_2 - K_1) A e^{-iK_1 b} \\ \frac{i\omega_e}{h} X_3 b^2 \left(\frac{iK_1 b}{3} - \frac{1}{2} \right) - \frac{2Vb}{h} X_3 (iK_1 b + 1) &= i(K_1 - K_2) B e^{-iK_2 b} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho X_3} &= -\frac{\omega_e^2}{h} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{b^2 x}{2} - \frac{b^2}{6} \right) + \frac{iV\omega_e}{2h} (x+b)^2 \\ &\quad + \frac{iV\omega_e}{h} \left(x^2 - \frac{b^2}{2} \right) + \frac{V^2}{h} (x+b) \end{aligned}$$

$$\int \frac{p}{\rho X_3} dx = +\frac{\omega_e^2}{3h} b^4 + \frac{i\omega_e}{h} V b^3 + \frac{2V^2}{h} b^2$$

$$\int \frac{p x dx}{\rho X_3} = -\frac{\omega_e^2}{5h} b^5 + \frac{iV\omega_e}{h} b^4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{V^2}{3h} b^3$$

iii) 散乱

$$\text{向波} \quad \varphi_0 = \frac{ig}{\omega_1} e^{-iK_1 x}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_d &= 0 & \text{for } x < -b \\ \varphi_d &= -\varphi_0 + Cx + D & \text{for } |x| < b \\ \varphi_d &= A e^{-iK_1 x} + B e^{-iK_2 x} & \text{for } x > b \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(-b) &= -bC + D = \frac{ig}{\omega_1} e^{iK_1 b} \\ \varphi_{0x}(-b) &= C = \frac{gK_1}{\omega_1} e^{iK_1 b} \end{aligned} \right\} \quad D = \left(\frac{ig}{\omega_1} + \frac{gK_1 b}{\omega_1} \right) e^{iK_1 b}$$

$$\left. \begin{aligned} bC + D - \frac{ig}{\omega_1} e^{-iK_1 b} &= A e^{-iK_1 b} + B e^{-iK_2 b} \\ C - \frac{gK_1}{\omega_1} e^{-iK_1 b} &= -iK_1 A e^{-iK_1 b} - iK_2 B e^{-iK_2 b} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} C(1+iK_2 b) + iK_2 D + \frac{g}{\omega_1} (K_2 - K_1) e^{-iK_1 b} &= i(K_2 - K_1) A e^{-iK_1 b} \\ C(1+iK_1 b) + iK_1 D &= i(K_1 - K_2) B e^{-iK_2 b} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{P}{\rho} = -(i\omega_s + V \frac{\partial}{\partial x})(\varphi_0 + \varphi_d) = -i\omega_s(Cx + D) - VC$$

$$\begin{aligned} \int \frac{P}{\rho} dx &= -2i\omega_s bD - 2VCb \\ &= \frac{-2i\omega_s b g}{\omega_1} (1 + bK_1) e^{iK_1 b} - \frac{2gbV}{\omega_1} K_1 e^{iK_1 b} \\ &= \frac{2gb}{\omega_1} e^{iK_1 b} \left[\frac{\omega_1}{-VK_1 + \omega_s} - iK_1 b \omega_s \right] \end{aligned}$$

$$\int \frac{P}{\rho} x dx = -i\omega_s C \cdot \frac{2}{3} b^3 = -\frac{2i}{3} g \frac{\omega_s b^3 K_1}{\omega_1} e^{iK_1 b}$$

◎ $V < c$ の場合

i) 上下動 (単位振巾)

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= B^- e^{iK_2 x} && \text{for } x < -b \\ \varphi &= \frac{i\omega_s}{h} \left(\frac{x^2}{2} + Cx + D \right) && \text{for } |x| < b \\ \varphi &= A^+ e^{-iK_1 x} && \text{for } |x| > b \end{aligned} \right\}$$

$$B^- e^{-iK_2 b} = \frac{\omega_s}{h i} \left(\frac{b^2}{2} - bC + D \right)$$

$$iK_2 B^- e^{-iK_2 b} = \frac{\omega_s}{h i} (-b + C)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_s}{h i} \left(\frac{b^2}{2} + bC + D \right) &= A^+ e^{-iK_1 b} \\ \frac{\omega_s}{h i} (b + C) &= -iK_1 e^{-iK_1 b} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (1 + iK_2 b) C - iK_2 D &= b + \frac{iK_2}{2} b^2 \\ (1 + iK_1 b) C + iK_1 D &= -b - \frac{iK_1}{2} b^2 \end{aligned} \right\}$$

$$C = \frac{b(K_1 - K_2)}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b}$$

$$D = \frac{-b(2 + iK_2 b + iK_1 b) - \frac{i}{2} b^2 [K_1(1 + iK_2 b) + K_2(1 + iK_1 b)]}{i(K_1(1 + iK_2 b) + K_2(1 + iK_1 b))}$$

$$\begin{aligned} B^- &= \frac{+\omega_s}{i h} e^{iK_2 b} \frac{[(-b^2(K_1 - K_2) + i b(2 + iK_1 b + iK_2 b))]}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b} \\ &= \frac{2\omega_s}{h} e^{iK_2 b} \times \frac{b(1 + iK_1 b)}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b} \end{aligned}$$

$$A^+ = \frac{2b\omega_s}{h} e^{-iK_1 b} \times \frac{(1 + iK_2 b)}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b}$$

$$\int \frac{p}{\rho} dx = -i\omega_e \int \varphi dx - V [\varphi]_{-b}^b$$

$$\int \frac{p}{\rho} x dx = -i\omega_e \int \varphi x dx - V [x\varphi]_{-b}^b - \int \varphi dx$$

$$\int \varphi dx = \frac{\omega_e}{i h} \left(\frac{b^3}{3} + 2bD \right), \quad [\varphi]_{-b}^b = \frac{\omega_e}{i h} (2b) C$$

$$\int \varphi x dx = \frac{\omega_e}{i h} C \frac{2}{3} b^3, \quad \int x \varphi_x dx = \frac{\omega_e}{i h} \cdot \frac{2}{3} b^3$$

$$\int \frac{p}{\rho} dx = -\frac{\omega_e^2}{h} \left(\frac{b^3}{3} + 2Db \right) + i \frac{2b}{h} \omega_e V C$$

$$\int \frac{p}{\rho} x dx = -\frac{2\omega_e^2}{3h} C b^3 + i \frac{2}{3} \frac{V}{h} b^3 \omega_e$$

ii) 縦ゆれ ($\zeta = x$)

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= B^- e^{iK_2 x} && \text{for } x < -b \\ \varphi &= -\frac{1}{h} \left(i\omega_e \frac{x^3}{6} + \frac{V}{2} x^2 + Cx + D \right), \\ \varphi &= A^+ e^{-iK_1 x} && \text{for } x > b \end{aligned} \right\}$$

$$B^- e^{-iK_2 b} = -\frac{1}{h} \left(-\frac{i\omega_e}{6} b^3 + \frac{V}{2} b^2 - bC + D \right),$$

$$iK_2 B^- e^{-iK_2 b} = -\frac{1}{h} \left(\frac{i\omega_e}{2} b^2 - Vb + C \right),$$

$$A^+ e^{-iK_1 b} = -\frac{1}{h} \left(\frac{i\omega_e}{6} b^3 + \frac{V}{2} b^2 + bC + D \right),$$

$$-iK_1 A^+ e^{-iK_1 b} = -\frac{1}{h} \left(\frac{i\omega_e}{2} b^2 + Vb + C \right),$$

$$C(1+iK_2 b) - iK_2 D = -\frac{i\omega_e b^2}{2} \left(\frac{iK_2 b}{3} + 1 \right) + Vb \left(1 + \frac{iK_2 b}{2} \right),$$

$$C(1+iK_1 b) + iK_1 D = -\frac{i\omega_e b^2}{2} \left(1 + \frac{iK_1 b}{3} \right) - Vb \left(1 + \frac{iK_1 b}{2} \right),$$

$$C = \frac{\frac{\omega_e}{2i} b^2 (K_1 + K_2 + \frac{2}{3} iK_1 K_2 b) + Vb (K_1 - K_2)}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b}$$

$$D = \frac{\frac{\omega_e}{2i} b^2 \left[\left(1 + \frac{2}{3} K_1 b\right) \left(1 + i K_2 b\right) - \left(1 + \frac{1}{3} K_2 b\right) \left(1 + i K_1 b\right) \right] - V b \left[\begin{array}{l} (1 + \frac{i K_1 b}{2})(1 + i K_2 b) \\ + (1 + \frac{i K_2 b}{2})(1 + i K_1 b) \end{array} \right]}{i [K_1 + K_2 + 2i K_1 K_2 b]}$$

$$= \frac{\frac{\omega_e}{3} b^3 (K_2 - K_1) - V b \left[2 + \frac{3}{2} i K_1 b + \frac{3}{2} i K_2 b - K_1 K_2 b^2 \right]}{i [K_1 + K_2 + 2i K_1 K_2 b]}$$

$$B^- = \frac{i e^{i K_2 b}}{K_2} \left[\frac{\frac{\omega_e}{2i} b^2 \left(-\frac{4}{3} i K_1 K_2 b \right) + V b (K_1 - K_2)}{K_1 + K_2 + 2i K_1 K_2 b} - V b \right]$$

$$= \frac{i e^{i K_2 b}}{K_2 h} \frac{-\frac{2}{3} \omega_e b^3 K_1 K_2 - 2 V b K_2 (1 + i K_1 b)}{K_1 + K_2 + 2i K_1 K_2 b}$$

$$A^+ = \frac{e^{i K_1 b}}{i h} \frac{\left[-\frac{2}{3} \omega_e b^3 K_2 + 2 V b (1 + i K_2 b) \right]}{K_1 K_2 + 2i K_1 K_2 b}$$

$$\int \varphi dx = -\frac{1}{h} \left[\frac{V}{3} b^3 + 2 D b \right]$$

$$\int \varphi_x dx = -\frac{1}{h} \left[\frac{i \omega_e}{15} b^5 + \frac{2}{3} C b^3 \right]$$

$$\int \varphi_x dx = -\frac{1}{h} \left[\frac{i \omega_e}{3} b^3 + 2 b C \right]$$

$$\int x \varphi_x dx = -\frac{1}{h} \left[\frac{2}{3} b V \right]$$

$$\begin{aligned} \int \frac{P}{\rho} dx &= -i \omega_e \int \varphi dx - V \int \varphi_x dx \\ &= \frac{i \omega_e}{h} \left[\frac{V}{3} b^2 + 2 D \right] b + \frac{2 V b}{h} \left[\frac{i \omega_e}{6} b^2 + C \right] \\ &= \frac{2 i \omega_e V}{h} b \left[\frac{b^2}{3} + \frac{D}{V} \right] + \frac{2 V b}{h} C \end{aligned}$$

$$\int \frac{P}{\rho} x dx = + \frac{i \omega_e}{h} \left[\frac{i \omega_e}{15} b^5 + \frac{2}{3} C b^3 \right] + \frac{V^2}{h} \times \frac{2 b}{3}$$

iii) 散乱

向波 $\varphi_0 = \frac{ig}{\omega_1} e^{-iK_1 x}$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_d &= B^- e^{iK_2 x} && \text{for } x < -b \\ \varphi_d &= -\varphi_0 + Cx + D \\ \varphi_d &= A^+ e^{-iK_1 x} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B^- e^{-iK_2 b} &= -\frac{ig}{\omega_1} e^{iK_1 b} - Cb + D \\ iK_2 B^- e^{-iK_2 b} &= -\frac{gK_1}{\omega_1} e^{iK_1 b} + C \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A e^{-iK_1 b} &= -\frac{ig}{\omega_1} e^{-iK_1 b} + bC + D \\ -iK_1 A e^{-iK_1 b} &= -\frac{gK_1}{\omega_1} e^{-iK_1 b} + C \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} C(1+iK_2 b) - iK_2 D &= \frac{g}{\omega_1} (K_1 - K_2) e^{iK_1 b} \\ C(1+iK_1 b) + iK_1 D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$C = \frac{\frac{g}{\omega_1} (K_1 - K_2) e^{iK_1 b}}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b}$$

$$D = \frac{(1+iK_1 b)}{-iK_1} C$$

$$\int (\varphi_0 + \varphi_d) dx = 2bD \quad , \quad \int (\varphi_0 + \varphi_d) x dx = \frac{2}{3} b^3 C$$

$$\int (\varphi_0 + \varphi_d)_x dx = 2bC \quad , \quad \int (\varphi_0 + \varphi_d)_x x dx = 0$$

$$\int \frac{(\varphi_0 + \varphi_d)}{\rho} dx = -2i\omega_s b D - 2bCV$$

$$\int \frac{(\varphi_0 + \varphi_d)_x}{\rho} dx = -\frac{2i}{3} \omega_s b^3 C$$

翼理論における非線形可逆定理

別所 正利

概要

翼理論におけるFlaxの変分原理は線形理論に立脚しているので所謂非線形問題には役立たない。本報はその非線形への拡張定理について述べその応用例を示す。

なお粘性を含む一般の誘導法は今秋の造船学会にて講演予定であるのでこゝでは粘性はないが渦のある流れについての別証を記す。

1. 定理の誘導

擾乱速度を $\mathbf{1} + \mathbf{u} = (1 + u, v, w)$, 渦度を $\vec{\omega} = (\xi, \eta, \zeta)$, 全圧を ρG とすると運動方程式は

$$\Delta G = (\mathbf{1} + \mathbf{u}) \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1+u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$G = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} [(1+u)^2 + v^2 + w^2], \quad (2)$$

$$\xi = w_y - u_z, \quad \eta = u_z - w_x, \quad \zeta = v_x - u_y, \quad (3)$$

後流渦面を除けば速度ポテンシャルは存在する。

今逆流れのそれを $\tilde{\phi}$ としよう。

$$\nabla \tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad \nabla \phi = \mathbf{u}, \quad (4)$$

以下(-)印を逆流れ量を示すものとする。

これを(1)式にかけて翼及び後流渦面の外側の領域 D で積分すると

$$\int_D \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla G \, d\tau = J - I, \quad d\tau = dx \, dy \, dz, \quad (5)$$

$$I = \int_D (\zeta \tilde{v} - \eta \tilde{w}) \, d\tau, \quad (6)$$

$$J = \int_D (\mathbf{u} \times \vec{\omega}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\tau, \quad (7)$$

となるが(5)式左辺の積分において全圧 G は今は粘性による散逸はないとしているので一定であるからこれは0である。

それ故

$$I = J, \quad (8)$$

同様にして

$$\tilde{I} = \int_D (\tilde{\zeta} v - \tilde{\eta} w) d\tau, \quad (9)$$

$$\tilde{J} = \int_D (\tilde{u} \times \tilde{\omega})_u d\tau, \quad (10)$$

とおくと

$$\tilde{I} = \tilde{J}, \quad (11)$$

が成立つが、一方

$$\begin{aligned} I + \tilde{I} &= \int_D (\zeta \tilde{v} - \eta \tilde{w} + \tilde{\zeta} v - \tilde{\eta} w) d\tau \\ &= \int_D \{ (-u\tilde{u} + v\tilde{v} + w\tilde{w})_x - (u\tilde{v} + \tilde{u}v)_y - (u\tilde{w} + \tilde{u}w)_z \} d\tau \\ &= \int_{S+W} \left(u \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \tilde{u} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \nabla \phi \cdot \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{x}_n \right) dS, \end{aligned} \quad (12)$$

それ故(8)と(11)を辺に加え合せて次の定理をうる。

$$\int_{S+W} \left(u \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \tilde{u} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \nabla \phi \cdot \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{x}_n \right) dS = I + \tilde{J}, \quad (13)$$

薄翼では左辺第3項は右辺と同じく高次の量であるから無視すると

$$\int_{S+W} (u \tilde{\phi}_n + \tilde{u} \phi_n) dS = 0, \quad (14)$$

となり、Flaxの定理となる。

それに対して(13)はその拡張となり線形仮定は入っていないので非線形性が見積りが出来る事になる。

2. 薄翼の揚力

図のように矩形揚力面を考え、後流渦面では

$$\eta = \zeta = 0, \quad \int \xi dy dz = d\Gamma(y, z), \quad (15)$$

となるから対称性を考えに入れると(13)は近似的

$$2 \int_{\bar{S}} (p\tilde{w} + \tilde{p}w) dx dy = 2\rho \int_W r_y(y, z) (w\tilde{v} - v\tilde{w}) dx dy, \quad (16)$$

$$\text{但し } p = -\rho u, \quad \tilde{p} = -\rho \tilde{u}$$

仰角を α とし細表翼を考えると

$$r(y) = \alpha \sqrt{\frac{B^2}{3} - y^2} \quad (17)$$

$$C_{L0} = \frac{\pi}{2} \alpha \lambda, \quad \lambda = B/L$$

この時

$$v - i\omega = i\alpha \left[1 - \frac{y + iz}{\sqrt{(y + iz)^2 - \frac{B^2}{4}}} \right],$$

であるから近似的に

$$v \doteq - \frac{\alpha y}{\sqrt{z^2 + \frac{B^2}{4}}}, \quad w \doteq \frac{\alpha z}{\sqrt{z^2 + \frac{B^2}{4}}}, \quad (18)$$

となるのでこれらを(13)に代入すると

$$C_L = \frac{\pi \lambda}{2} \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{\lambda^2}{4}}} \right), \quad (19)$$

同じ事を図(b)の揚力線模型で計算してみると

$$C_L = \frac{\pi \lambda \alpha}{1 + \frac{\lambda}{2}} \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \right), \quad (20)$$

この式で $\lambda \gg \alpha$ とすると

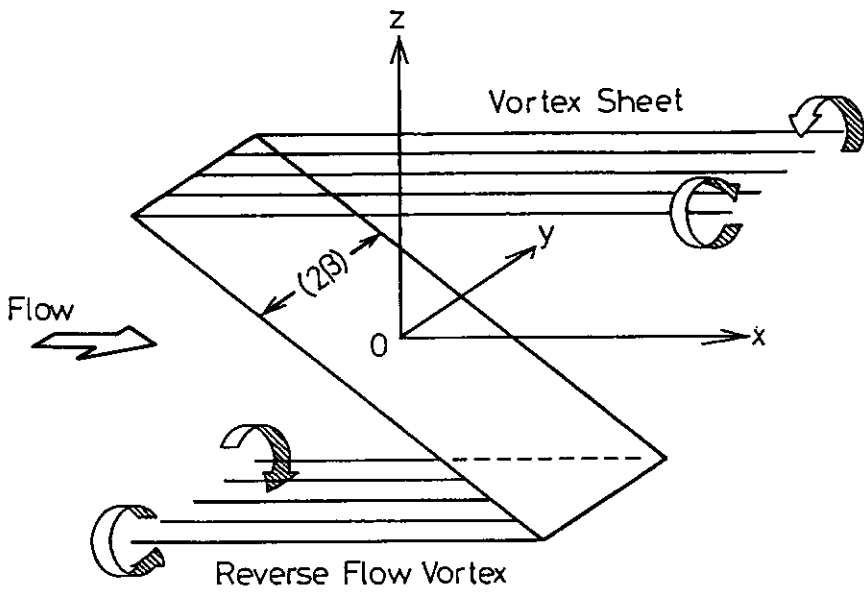
$$C_L = \pi \lambda \alpha, \quad (21)$$

となり、元良の与えた近似式に一致する。

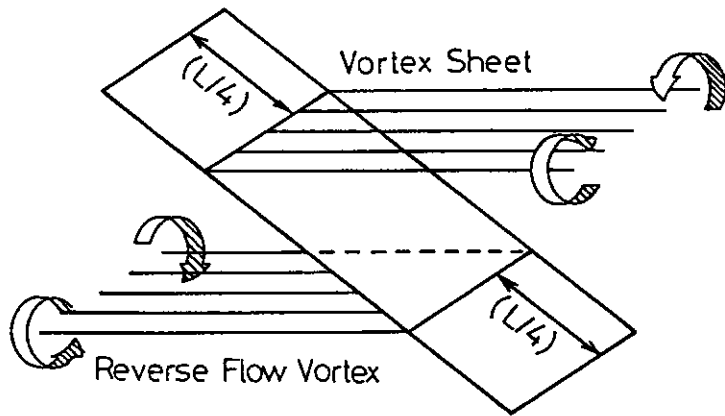
また(19)は井上の式によく似た形をしており、又数値的にも殆ど等しく、菅井、浜本の計算値ともよく一致する。

また不破の実験値、洞爺丸の実験値等と較べると(19)も捨て難いものがあり、特に回転楕円体ではその右辺第1項を無視したものの方が良いようにも見える。

以上



(a) Slender Wing Theory



(b) Lifting Line Theory

Flat Plate Wing

水波問題と制御理論

(その1 非最小位相推移系)

別所正利

"Water Wave Problem and Controll Theory
(First Report Non-minimum phase shift system)

by Masatoshi Bessho

内容目次

1. 波上側の波高から波下側のそれを推定する事
2. プイの運動から波高を推定する事
3. 最小位相推移系
4. 流体力の正則性の確認

概要

近年船および浮遊構造物の波浪中運動性能の研究は格段の進歩を遂げ、その予測精度は目覚ましい。

このような成果を踏まえて、工学としての必然性からこれらの現象を支配(制御)して、工学的価値を創出しようと言う研究も多数現われている。

このような研究では当然の事ながら自動制御理論の援けを借りる事になるが、それは成立ちから水波理論と少し勝手が異なり、細かい事で何かととまどう。

例えば制御電気回路理論では殆どの場合集中定数回路(R, C, L)を扱いかい、分布定数回路は(同軸)線路などの特殊な場合のみ解析されているのに対し、水波問題における水の反力は常に分布定数回路であって、伝達関数のラプラス変換で考えると前者では(正)実係数の多項式であるのに対し、後者では大変複雑な解析関数であるので制御理論を直接援用してよいのかどうか、あるいはどう援用すればよいのかとまどう事が多い。

本報告はこの点に関し筆者の最近考えた道筋の2,3を紹介し、大方の批判を仰ぎたいと記すものである。

本報では具体的に中村、内藤が研究した波上側の波高から波下側の波高を推定する問題を取りあげ、深海波では理想的Filterが構成不可能と同じ理由で理論的不可能であり、その原因はその伝達関数が制御理論で言う非最小位相推移系(Non-Minimum Phase Shift System)であって事前過渡現象が存在(この事は水波理論ではよく知られている)する事に起因する事を述べ、さらにこの性質はKochin関数にも存在する事を述べる。

そうすると流体力全般についても心配になって来るのでそれについても調査をした。

これらの調査から最小位相推移系であるためのBodeの関係は水波理論で知られているKramer-Kronigの関係と同じである事がわかった。

1. 波上側の波高から波下側のそれを推定する事

先ず浅海波について考えよう。

x の正方向から負方向に入射して来る波を考えると波高のスペクトル密度を $A(\omega)$ とすれば波高は次式で与えられる。

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{iKx+i\omega t} d\omega, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad c; \text{波速} \quad (1.1)$$

この値から原点の波高を推定するには

$$\eta(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(A(\omega) e^{\frac{i\omega x}{c}} \right) e^{-\frac{i\omega x}{c} + i\omega t} d\omega$$

と書け、 $e^{-\frac{i\omega x}{c}}$ はラプラス変換では $e^{-\frac{x}{c}s}$ となってよく知られるいるように無駄時間要素であり、直ちに

$$\eta(0, t) = \eta(x, t - \frac{x}{c}) \quad , \quad (1.2)$$

と書けるが、これはフーリエ変換をまつまでもない。

さて深海波では*

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{iKx+i\omega t} d\omega, \quad K = \frac{\omega|\omega|}{g} \quad (1.3)$$

と表わされるとすると

$$\begin{aligned} \eta(0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) e^{iKx}] e^{-iKx+i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, \tau) W(x, t-\tau) d\tau \quad , \end{aligned} \quad (1.4)$$

こゝに

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iKx+i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(Kx - \omega t) d\omega \\ &= \sqrt{\frac{g}{2\pi x}} \left\{ \cos\left(\frac{gt^2}{4x}\right) \left\{ \frac{1}{2} + C\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2\pi x}} t\right) \right\} + \sin\left(\frac{gt^2}{4x}\right) \left\{ \frac{1}{2} + S\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2\pi x}} t\right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

*) 中村彰一, 内藤林, 海洋構造物研究会報告, 昭和 57, 58 年度

で C , S はフレネル積分である。

そして

$$\begin{aligned}
 W(x, t) &\xrightarrow[\sqrt{\frac{g}{2\pi x}} \rightarrow 0]{\sqrt{\frac{g}{2\pi x}} t} \sqrt{\frac{g}{2\pi x}} \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{g}{2\pi x}} t \right], \\
 &\xrightarrow[\sqrt{\frac{g}{2\pi x}} + \gg 1]{\sqrt{\frac{g}{2\pi x}} t} \sqrt{\frac{g}{\pi x}} \cos\left(\frac{g t^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right),
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

であるから、 $t < 0$ でも W は 0 にならず、つまり事前過渡現象があって、 $\eta(x, t)$ の現在までの $\eta(0, t)$ を推定する事は理論的に不可能である。

このようになるのは W のフーリエ変換 $e^{-i\frac{\omega|\omega|}{g}} x$ が ω の下半面で正則でない事に起因し、制御理論等ではそのような系を非最小位相推移系と呼んでいる。

理想フィルターが不可能であるのも同様な理由^{*}によるものであり、制御理論ではこれを近似的に実現する為に補償 (compensate) 回路を工夫する。

中村、内藤 (前頁注) はそのような補償についての考案を提示している。

所で $e^{-i\frac{\omega|\omega|}{g}} x$ なる関数はゲインが 1 で位相がどんどん遅れるのであるから、最も簡単に考えれば進相回路を入れてやればよいわけである。

それを

$$F(\omega) = \frac{R}{R - \frac{i}{\omega C}}, \quad R, C; \text{ 定数} \tag{1.7}$$

とおくと

$$\eta(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_F(x, \tau) W_F(x, t - \tau) d\tau, \tag{1.8}$$

$$\eta_F(x, t) = \eta(x, t) + \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t \eta(x, \tau) d\tau, \tag{1.9}$$

$$W_F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-iKx + i\omega t} d\omega, \tag{1.10}$$

となって、確かに事前過渡現象は少し、小さくなりそうである。いづれにしろ (1.10) で $F(\omega)$ を適当に選ぶ事により実用上有用なものを得る事は出来るであろう。

この時フィルターの設計理論も大いに参考になろう。

所で、特に 2 次元問題では $\eta(x, t)$ には一般に反射波が含まれているのでその影響も考慮しなければならないし、また物体の前方の点に波高計を設計しなければならない、さらに波高の信号には多くの雑音がある事も予想しなければならない。

従って直接浮体の運動なり、圧力なりから波高を求める方法 (波高計) がよりよいと考えられる。

* 高橋利衛, 自動制御の数学, オーム社, 1961

2. ブイの運動から波高を推定する事

簡単の為に対称の浮体の平面波による上下ゆれを考えると、動揺振巾 $y(t)$ の周波数応答 $Y(\omega)$ は

$$Y(\omega) = \frac{\rho g A(\omega) H_2(K)}{Z_2(\omega)}, \quad (2.1)$$

$A(\omega)$ は波のスペクトル密度、 H_2 は波強制力、つまりコッチン関数、 Z_2 は上下ゆれの流力インピーダンス、と与えられる故、波高は

$$A(\omega) = \frac{Y(\omega) Z_2(\omega)}{\rho g H_2(K)}, \quad (2.2)$$

つまり

$$\begin{aligned} \eta(0, t) &= \frac{1}{2\pi\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(\omega) Z_2(\omega)}{H_2(K)} e^{i\omega t} d\omega, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) N_2(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$N_2(t) = \frac{1}{2\pi\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_2(\omega)}{H_2(K)} e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.4)$$

となるが、例えば充分吃水の浅い浮体では近似的に

$$\begin{aligned} \frac{\rho g H_2(K)}{Z_2(\omega)} &\div 1 && \text{for } |\omega| < \omega_0; \text{ 同調周波数} \\ &e^{i\frac{\omega|\omega|\alpha}{g}} && \\ &\propto \frac{e}{\omega^4} && \text{for } |\omega| \gg \omega_0, \alpha; \text{ 定数} \end{aligned} \quad (2.5)$$

となるから、やはり $e^{i\frac{\omega|\omega|\alpha}{g}}$ なる成分を有しているので N_2 は事前過渡現象を持ち、従って運動から波高を推定する事は不可能である。(なお、この際観測時間を充分とれば $A(\omega)$ を得る事は出来るわけである事に注意)

それ故、浮子式波高計の性能は同調周波数の選定次第であるのは論をまたない。

さて N_2 の周波数応答で $e^{i\frac{\omega|\omega|\alpha}{g}}$ なる成分が出て来るのは Z_2 ではなく H_2 つまりコッチン関数である。

従って流体力についてこの性質を調べてみる必要がある。

3. 最小位相推移系

制御理論によれば(前掲高橋)最小位相推移系の Bode 線図についてそのゲインと位相は互に Hilbert 変換出来ると言う。

即ち ω 一面の下半面で正則な関数(その対数または指数関数でもよい)の実部および虚部を

$$F(\omega) = R(\omega) - iS(\omega), \quad (3.1)$$

とおくとコーシーの定理により下半面で

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u)}{\omega - u} du \quad , \quad (3 \cdot 2)$$

であるから、実部と虚部にわけてかき、 $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ を考慮すると

$$R(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(u) u}{u^2 - \omega^2} du \quad , \quad (3 \cdot 3)$$

$$S(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(u) \omega}{u^2 - \omega^2} du \quad ,$$

これは Bode の関係式と呼ばれているが、見る通りこれは伝達関数が ω の下半面で正則であるならば常に成立つ関係であり、同じ理由から J. Kotik は上式と全く等しい式を Kramers-Kronig の関係として引用し、附加質量と減衰の間に成立つ事を数値的に示している。

それ故一般に流体力学的インピーダンスも最小位相推移系と考えてよい。

そうでないものとしては入射波 $e^{\frac{i\omega^2 \lambda}{g}}$ が考えられ、従ってそれに関係するコッチン関数が考えられる。

実際、コッチン関数は

$$H_j(K) = - \int_C (\phi_0 + \phi_d) \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \quad , \quad (3 \cdot 4)$$

$$\phi_0 = e^{-Ky + iKx} \quad ; \text{入射波} ; \phi_d \quad ; \text{散乱ポテンシャル}$$

と表わされ、入射波に関する部分を含むので少くとも所謂 Froude-Kriloff 力の部分が非最小位相推移系である。

従って制御系の伝達関数にコッチン関数が含まれる場合は事前過渡現象を防ぐ為の位相補償を考へておく必要がある。

蛇足ながら、その自乗に比例する減衰について問題がないのは何か奇妙な気もする事である。

4. 流体力の正則性の確認

Bode あるいは Kramers-Kronig の関係が成立ち、系が最小位相推移系である為には伝達関数が ω の下半面で正則であればよい。

後者の関係に関する原論文は筆者も未見なのでよくわからないが、線型系の物理現象としてそうあるべきだと言う所論のように推測される。

以下では具体的に 2 次元問題で速度ポテンシャル、流体力の表現からそれを確認しておこう。

i) 2 次元 (深水) 波動問題 (前進速度なし)

速度ポテンシャルは次のように書ける。^{*}

* Bessho. M. "On boundary value problem of an oscillating body floating on water"; N. D. A. vol. 8, 1968

$$\phi(x, y) = \int_c \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} S - \frac{\partial \phi}{\partial n} S(x, y, x', y') \right] ds, \quad (4.1)$$

$$S(x, y, x', y') = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')} \cos k(x-x')}{k-K+\mu i} dk, \quad (4.2)$$

$$K = \omega^2/g$$

この S を $K (= \omega^2/g)$ の関数として見ると上式右辺の積分で K の極は $K = k + \mu i$, つまり K 一面の実軸の上側にあり、従って K の下半面では正則であり、 $K = \omega^2/g$ であるから ω の下半面でも正則である。

それ故、それを積分した速度ポテンシャルも流体力も正則であって最小位相推移系である。

しかし散乱ポテンシャルは境界条件の為に非最小位相推移系である。

この場合はまた特に (3.3) と同じ表現が直接えられる。

例えば (4.2) で特に簡単の為に $y = y' = x' = 0$ とすると

$$S(x, 0; 0, 0) = \frac{P.V.}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k-K} dk - i \cos Kx, \quad (4.3)$$

となって、全く (3.3) と同型である。

この式から虚部が $\cos(-\frac{\omega^2 x}{g})$ である最小位相推移系の実部は正、余弦積分右辺第1項で与えられることがわかる。

また上式から

$$\frac{\partial}{\partial x} S = -\frac{P.V.}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kx k}{-k-K} dk + iK \sin Kx,$$

となるから

$$S - \frac{i}{K} \frac{\partial}{\partial x} S = \frac{P.V.}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k-K} \left(\cos kx + \frac{ik}{K} \sin kx \right) - i e^{-iKx}, \quad (4.4)$$

となる。つまり $[e^{-iKx}]$ を最小位相推移系とするとこの右辺第1項の積分が必要である。

(4.1) は吃水が充分小さい時は圧力分布 p によって

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{\rho g} \int_{-1}^1 p(x') S(x, y; x', 0) dx', \quad (4.5)$$

のように表わされ、コッチン関数を

$$H^\pm(k; K) = \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm i k x} dx, \quad (4.6)$$

のように導入すると（左辺の意味は波数 K の時解 p に $e^{\pm i k x}$ を乗じて積分すること）

$$K \phi(x, 0) - \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0) = \frac{1}{\rho g} p(x) \quad , \quad (4.7)$$

であるから流体力は

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = \frac{1}{2\pi \rho g} \int_0^\infty \{ |H^+(k)|^2 + |H^-(k)|^2 \} \frac{k dK}{k - K + \mu i} \quad , \quad (4.8)$$

$$\left[\because \int_{-1}^1 p \bar{p} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \{ |H^+(k)|^2 + |H^-(k)|^2 \} dk \quad (\text{プランシュレルの定理}) \right]$$

と表わされ、(3.3) に等しいように見えるがこの被積分関数の $H^\pm(k)$ は (4.6) の定義によるもので、(3.3) に全く等しくなるためには

$$H^\pm(k; K) = H^\pm(k; k) \quad , \quad (4.9)$$

が成立たねばならない。

この関係は未だに証明出来ないし、またこれは成立たないけれども積分した時に等しくなると考える方が良さそうである。

ii) 振動翼（2次元平板翼）

この場合も殆ど直接的に (3.3) の関係がわかる場合である。

速度ポテンシャルは圧力分布 $p(x)$ によって*

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\rho U} \int_{-1}^1 p(x') S(x-x', y) dx' \quad , \quad (4.10)$$

$$S(x, y) = \frac{e^{i\alpha x}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x e^{-i\alpha\xi}}{\xi^2 + y^2} d\xi \quad , \quad (4.11)$$

$$S(x, y) = \frac{\text{sgn}(y)}{4\pi i} \int_0^\infty \left(\frac{e^{i k x}}{k - \alpha + \mu i} - \frac{e^{-i k x}}{k + \alpha} \right) e^{-k|y|} dk \quad , \quad (4.12)$$

$$(\alpha = \omega / U)$$

と表わされ、(4.11) から S が ω の下半面で正則である事はよくわかる。

(4.12) から (4.4) に似た関係が直ちに得られる。即ち

$$S(x, +0) = -\frac{e^{i\alpha x}}{2} + \frac{P.V.}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{\alpha \cos kx + k \sin kx}{k^2 - \alpha^2} \right] dk \quad , \quad (4.13)$$

流体力についても前項と同じような式が導びけるがやはり直接証明する事は困難で、 ω の下半面で

* 別所、2次元振動翼理論について、関西造協誌、189号、昭和58年

正則であるから Bode の関係が成立つと見るしかないように見える。

iii) 2次元波動問題 (前進速度のある場合)

吃水が浅いとして圧力分布で表現出来るとすると速度ポテンシャルは*

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\rho U} \int_{-1}^1 p(x') S(x-x', y) dx' \quad , \quad (4.14)$$

$$S(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{u-k}{A(u)} e^{iux} - \frac{u+k}{B(u)} e^{-iux} \right] e^{uy} du \quad , \quad (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} A(u) &= (u-\alpha)^2 - ru + i\mu(u-\alpha) \\ B(u) &= (u+\alpha)^2 - ru - i\mu(u+\alpha) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha &= \omega/U \quad , \\ r &= g/U^2 \quad , \end{aligned} \quad (4.16)$$

で与えられるから, S を α の関数を見るとその特異点は $A(u)$, $B(u)$ の零点で即ち

$$\left. \begin{aligned} A &= \left(\alpha - u - \frac{i\mu}{2} \right)^2 + \frac{\mu^2}{4} - ru \\ B &= \left(\alpha + u - \frac{i\mu}{2} \right)^2 + \frac{\mu^2}{4} - ru \end{aligned} \right\}$$

であるから, 極は $\alpha = \mp u + \frac{i\mu}{2} \pm \sqrt{ru - \frac{\mu^2}{4}}$, (4.17)

となって常に ω の上半面にあり, 従って下半面では正則である。

この場合は前2項と違い直接これらの式から Bode の関係に似た式すらも導けないが正則性からそれが成立つ事は自明である。

* 別所, 動揺する2次元浅吃水船に働く流体力の理論について, 関西造船誌, 165号, 昭和52年6月