

音の性質と解析： 自己相関関数

機能材料工学科 阿部 洋

0. はじめに

音は、いろいろな周波数をもった波の重ね合わせである。音を記述する方法は2つあり、振幅の時間変化と強度の周波数変化（スペクトル）がある。周波数は音の高低を示すので、周波数の強度分布によって音を定量的に解析することができる。これは、太陽光（白色光）を三角プリズムで波長成分（色は波長に依存する）に変換することと同じである。

1. 音の基本的性質

よく知られているように、音は大気中で縦波（疎密波）が伝播していくことである。しかし、「ゆとり教育」の学生は基本的なことを理解していないようである（何故か疑問に思わないようである）。

以下の質問に答えなさい！

1. 伝播と移動の違いを説明せよ！
2. 横波と縦波の違いは？図に書いて説明せよ！
3. 空気などの気体媒体で横波は伝播するか？
4. 水などの液体媒体で横波は伝播するか？
5. 縦波と横波とではどちらが速いか？
6. 真空中で音は伝播するか？
7. 光は横波であるが、何故、真空中でも伝播するのか？

1.1 波の物理量

振幅：	A	[m]	
波長：	λ	[m]	
角振動数：	ω	[rad / sec]	1秒間に回転する角度
周期：	T	[sec]	1回振動する間の時間
周波数：	f	[Hz]	1秒間の振動数

$$T = 1 / f \quad [\text{sec}] \quad (1 \cdot 1)$$

1回転するときの時間が T [sec] なので、

$$\omega \times T = 2\pi \quad [\text{rad}] \quad (1 \cdot 2)$$

となる。

(1・1) 式と (1・2) 式から

$$\omega = 2\pi f \quad (1 \cdot 3)$$

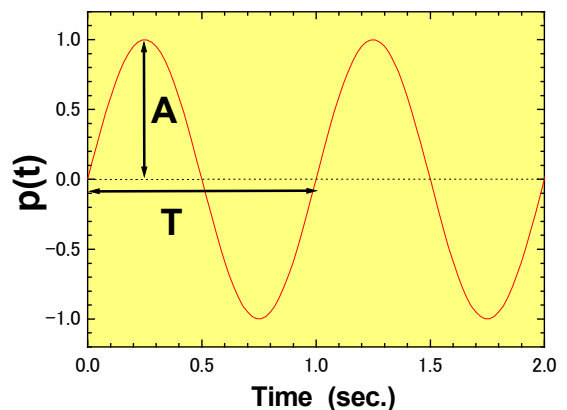


図 1・1 1Hz の波

波が1回振動すると1波長分 (λ) 進むので、波の伝播速度を v とすると、 $\lambda = v T$ となる。(1・1) 式を代

入すると、

$$v = f \lambda \quad (1 \cdot 4)$$

1.2 音の高さ

(1・4) 式から、波長 λ と周波数 f は反比例する。周波数 f が大きいほど高い音になり、周波数が小さくなると低音になる。例えば、ギターの弦をゆるめて振動数を小さくすると、低音になり、弦を硬く締めて高周波にすると高音になる。ばねの単振動の角振動数 ω を計算すると、 x 方向に伝播していく波は、

$$m\ddot{x} = -kx$$

単位体積あたりでは、

$$\rho\ddot{x} = -kx$$

となる。

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

ただし、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$ とした。平面波 $x = A \cdot e^{i\omega t}$ は、特殊解である。確かに弾性定数 k を大きくすると、角振動数 ω は大きくなる。

問題

1. H_2O 気体の密度を計算しなさい。但し、1 モル (18 g) で 22.4 l である。
2. H_2O 液体の密度を 1 g/cm^3 、音速を 1483 m/s、周波数 1 kHz のときの波長を求めなさい。

1.3 音の強さ

一般に音の強さは振幅 A の 2 乗と周波数 f の 2 乗に比例する。ギターの弦の強さ (周波数) を固定して、振幅を大きくすると、音の高さが一定で音が強くなる。振幅を A とすると

$$I \propto f^2 A^2$$

となることを意味している。

問題

強度が周波数 f の 2 乗に比例することを証明しなさい！

2. 自己相関関数 (ACF: Autocorrelation Function)

2.1 自己相関関数の定義

時間的または空間的に離れた2点で関係の強さを関数で表します。例えば、ブラウン運動はランダムな動きなので数秒後には元の位置を忘れることは良く知られている。この場合、相関がほとんどないという。定量的に相関の強さを調べることができたら、波の重ね合わせである音の解析に応用できる。音の時間的特徴を表すために自己相関関数 $G(\tau)$ を定義する。

$$G(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t)p(t+\tau)dt \quad (2 \cdot 1)$$

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2 \cdot 2)$$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2 \cdot 3)$$

音の時間関数 $p(t)$ とする。ここで、 τ は遅れ時間、 T は積分区間です。(2・3) 式のように、信号のパワースペクトルを $P(\omega)$ は、自己相関関数 $G(\tau)$ のフーリエ変換から求めることができる。また、 $G(\tau)$ はパワースペクトルの逆フーリエ変換の計算で求められる。このように、 $G(\tau)$ とパワースペクトルは数学的に関係がある。

また、(2・1) 式を離散データ $p(k)$ に適用すると、

$$G(L) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} p(k) \cdot p(k+L) \quad (L = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (2 \cdot 4)$$

となる。次に、周波数 ($f = 1\text{Hz}$)の波を考える。積分区間 T の長さの信号 $p(t)$ を切り出すと、時間 τ だけ遅れた信号は $p(t+\tau)$ となる。(図 2・1)。もし $p(t)$ と $p(t+\tau)$ の振幅が大きく、同様な繰り返し成分があれば、2つの信号の相関値 $G(\tau)$ は大きくなる。つまり、自己相関関数は信号自体にどの程度の類似性があるかを表す関数といえる。

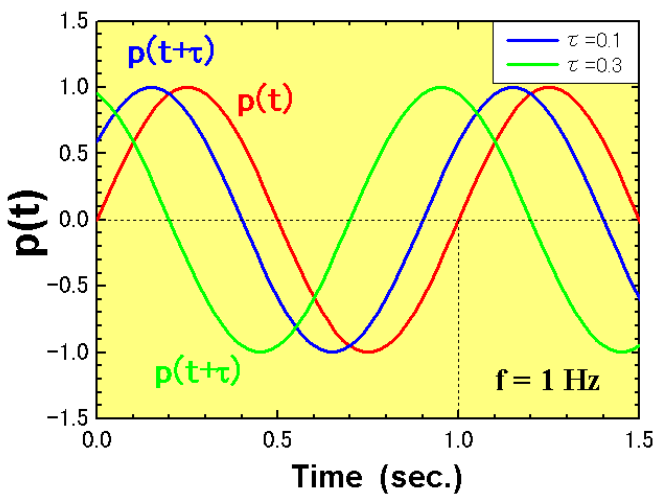


図 2・1 $p(t) = \sin(\omega t)$

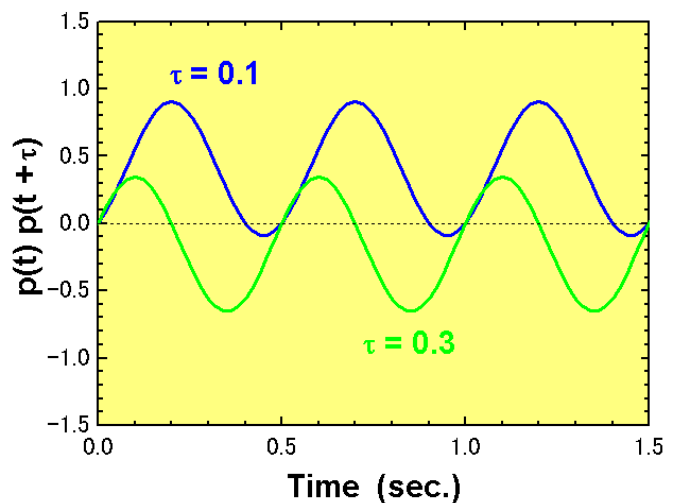


図 2・2 $p(t) \times p(t+\tau)$

2.2 自己相関関数の具体例

① sin 関数

$p(t) = \sin(\omega t)$ の自己相関関数は、

$$\begin{aligned}
 G(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega t) \sin(\omega t + \omega \tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega t) [\sin(\omega t) \cos(\omega \tau) + \cos(\omega t) \sin(\omega \tau)] dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\sin^2(\omega t) \cos(\omega \tau) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\omega \tau)] dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \cos(\omega \tau) + \frac{\sin(2\omega t)}{2} \sin(\omega \tau) \right] dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\cos(\omega \tau) \left. \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right|_{-T/2}^{T/2} + \sin(\omega \tau) \left. - \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right|_{-T/2}^{T/2} \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\cos(\omega \tau) \frac{T}{2} \right] = \frac{\cos(\omega \tau)}{2}
 \end{aligned}$$

となる。実際に $p(t) = \sin(\omega t)$ ($0 \leq t \leq T$) の相関関数を EXCEL の VBA で計算してみる。数値計算では離散データを取り扱うので (2.4) 式に基づくプログラムを作る必要がある。また、図 2・3 のように τ 範囲が ($0 \leq \tau \leq T$) となるので、 $p(t)$ は、($0 \leq t \leq 2T$) の範囲で値を持たなければならない。但し、 $p(t+\tau)$ ($0 \leq \tau \leq T$) である。

もし、 $T \leq t$ で $p(t)$ が 0 になると、 τ が大きくなるにつれて $p(t) \times p(t+\tau)$ が小さくなっていく。

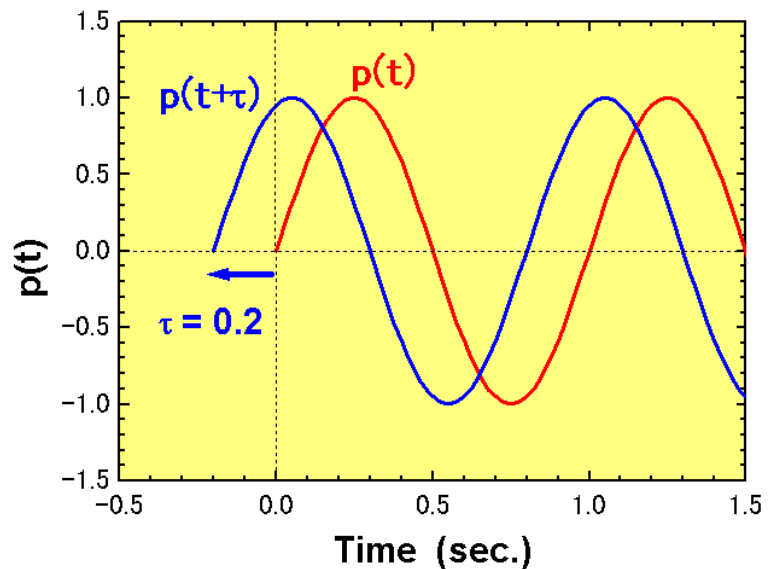


図 2・3 t の範囲の拡張

EXCEL の VBA のプログラムは右のようになる。
計算結果を図 2・4 に示す。明らかに、

$$G(\tau) = \frac{\cos(\omega\tau)}{2}$$

が計算でも確かめられた。

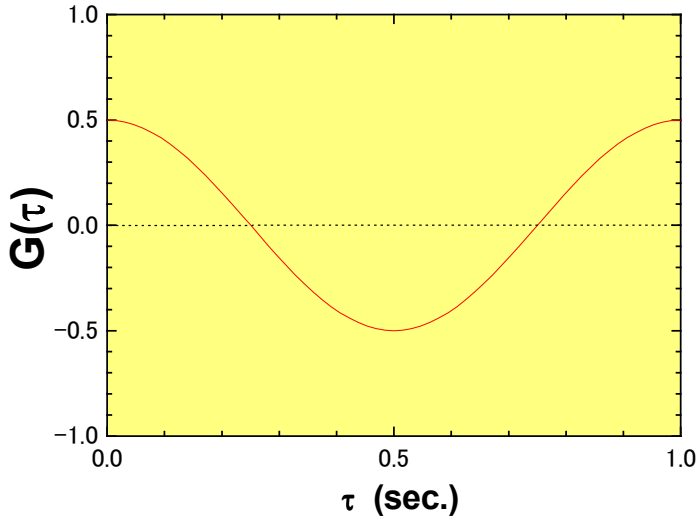


図 2・4 $\sin(\omega t)$ の自己相関関数 $G(\tau)$
 $p(t)$ ($0 \leq \tau \leq 2T$)

次に $p(t) = \sin(\omega t)$ ($0 \leq t \leq T, 0 \leq \tau \leq T$) の場合を計算してみる。前述のとおり、 $T \leq t$ で $p(t) = \sin(\omega t)$ が 0 になるため、 τ が大きくなるにつれて $p(t) \times p(t+\tau)$ が小さくなっていく。上のプログラムのプロシージャを『ACF(nd)』にすると、計算ができる。

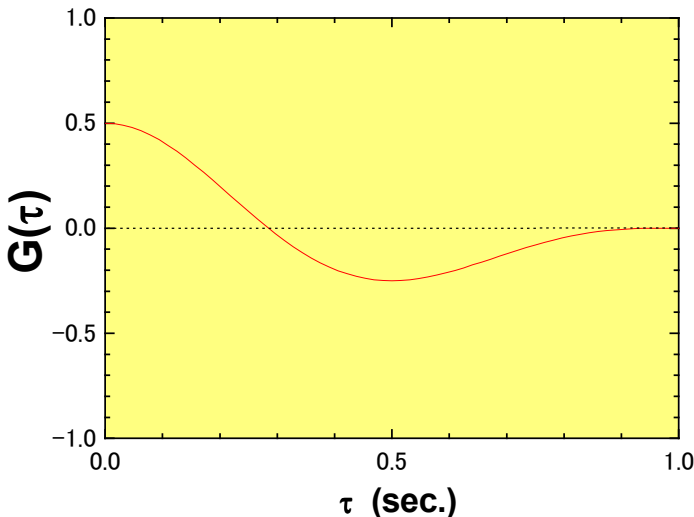


図 2・5 $\sin(\omega t)$ の自己相関関数 $G(\tau)$
 $p(t)$ ($0 \leq \tau \leq T$)

```
Dim pi As Double, x(1000), G(1000)

Sub data()
    pi = 4# * Atn(1#)           ' π
    nd = 64                     ' Number of DATA
    For K = 0 To nd - 1
        x(K) = Sin(2# * pi * K / nd)
        x(K + nd) = Sin(2# * pi * K / nd)
        Cells(K + 1, 1) = 360 * K / nd    ' [deg.]
        Cells(K + 1, 2) = x(K)
    Next K

    ACF2 nd           ' Auto-correlation Function
End Sub

Sub ACF2(nd)
    For L = 0 To nd - 1
        G(L) = 0#
        For K = 0 To nd - 1
            G(L) = G(L) + x(K) * x(K + L)
        Next K
        G(L) = G(L) / nd
        Cells(L + 1, 3) = G(L)
    Next L
End Sub
```

```
Sub ACF(nd)
    For L = 0 To nd - 1
        G(L) = 0#
        For K = 0 To nd - 1 - L
            G(L) = G(L) + x(K) * x(K + L)
        Next K
        G(L) = G(L) / nd
        Cells(L + 1, 3) = G(L)
    Next L
End Sub
```

問題

乱数の自己相関関数を計算しなさい！

② パルス

図 2・6 のパルス状の波形は、 $p(t) = 1 (0 \leq t \leq 1)$, $p(t) = 0 (1 < t)$ と表せる。この自己相関関数は、図 2・7 のように計算される。実際に、VBA で計算しなさい。

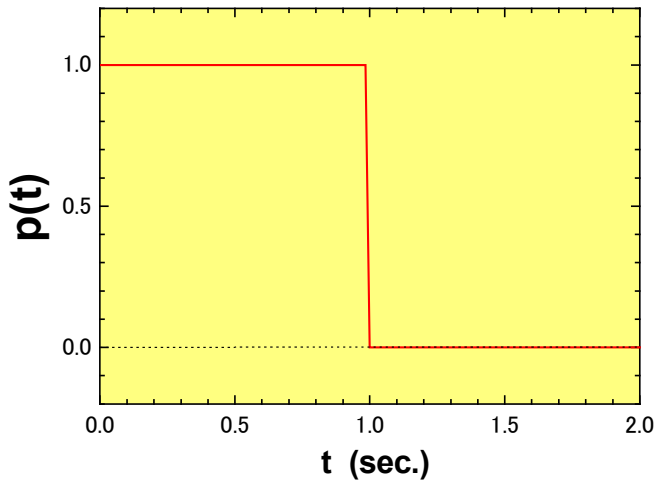


図 2・6 パルス状の波形

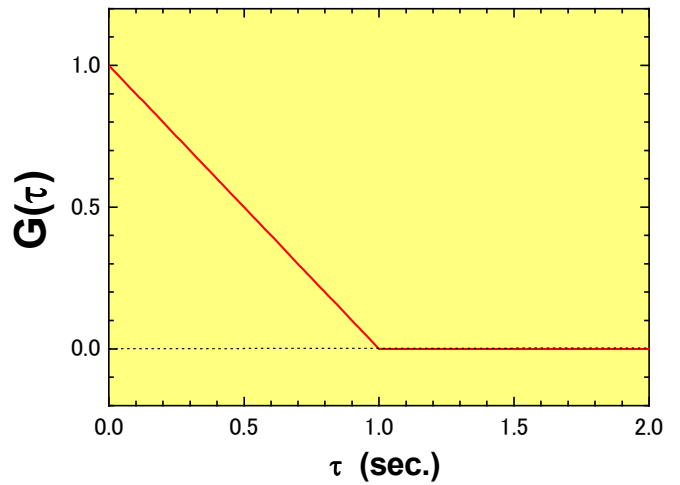


図 2・7 パルスの自己相関関数

③ ガウシアン

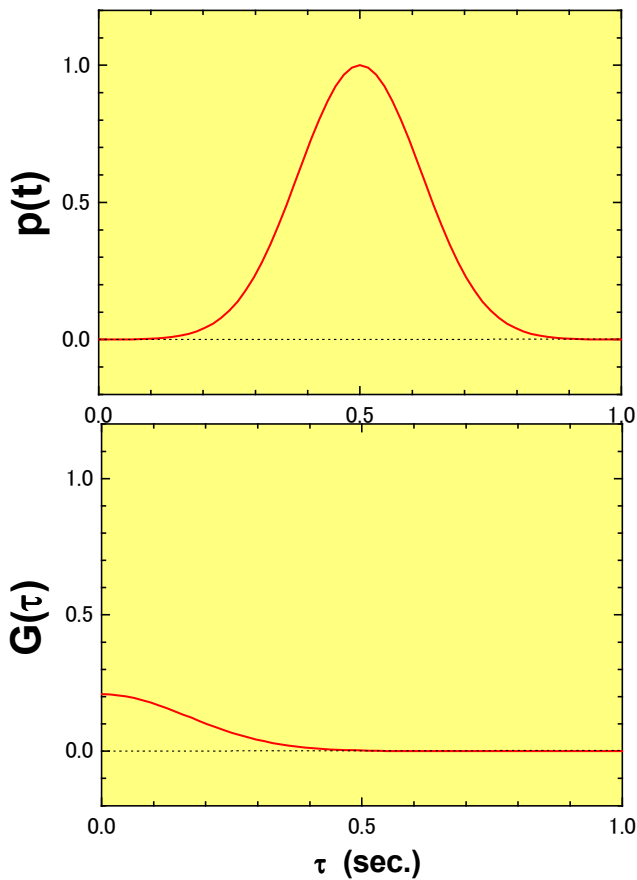


図 2・8

```

Dim pi As Double, x(1000), G(1000)

Sub data()
    pi = 4# * Atn(1#)           ' π
    nd = 64                    ' Number of DATA
    For K = 0 To nd - 1
        x(K) = Exp(-((K - nd/2) / nd * 6) ^ 2)
        Cells(K + 1, 1) = K / nd ' [deg.]
        Cells(K + 1, 2) = x(K)
    Next K

    ACF1 nd                    ' Auto-correlation Function
End Sub

Sub ACF1(nd)
    For L = 0 To nd - 1
        G(L) = 0#
        For K = 0 To nd - 1 - L
            G(L) = G(L) + x(K) * x(K + L)
        Next K
        G(L) = G(L) / nd
        Cells(L + 1, 3) = G(L)
    Next L
End Sub
    
```

2.3 自己相関関数の意味

これまでの自己相関関数の例から、 $p(t)$ と $p(t+\tau)$ の振幅が大きく、同様な繰り返し成分があれば、2つの信号の相関値 $G(\tau)$ は大きくなる。つまり、自己相関関数は信号自体にどの程度の類似性があるかを表す関数といえる。

自己相関関数 $G(\tau)$ を $G(0)$ で規格化した $G(\tau)/G(0)$ を『正規化された自己相関関数』と呼ぶ。正規化された自己相関関数の値が $1/2$ になるラグを相関時間 とする。相関時間が長いほど、変動は緩やかであることを意味する。

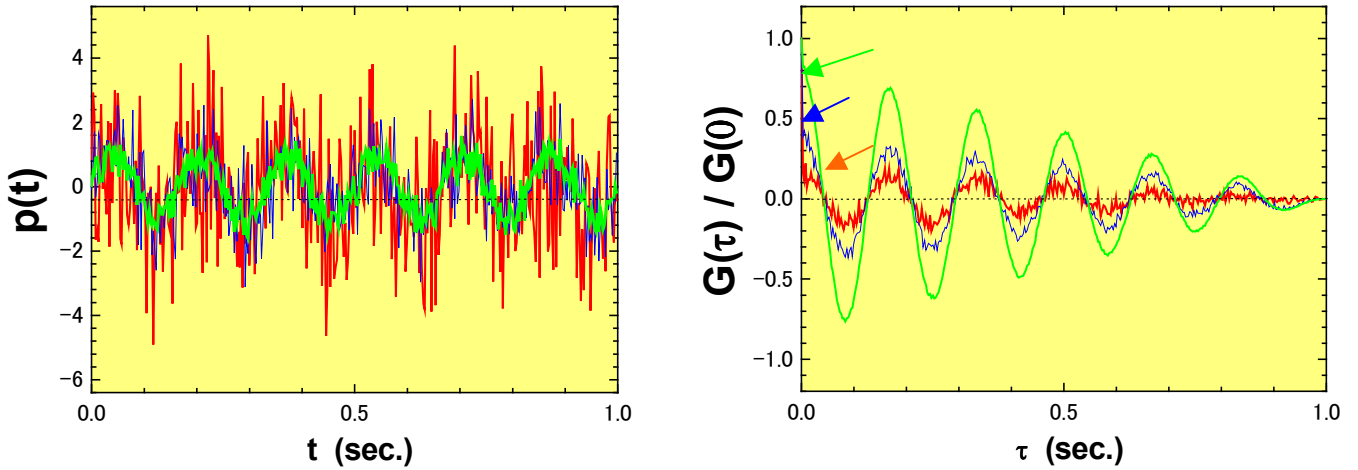


図 2・9 ノイズと自己相関関数

図 2・9 は、自己相関関数が信号に含まれるノイズの度合いによって、どのように変化するかを計算してみた。明らかに、ノイズによって信号が多く変動する場合は、自己相関関数は早く減衰する。かつ、自己相関関数もノイズが顕著に表れる。

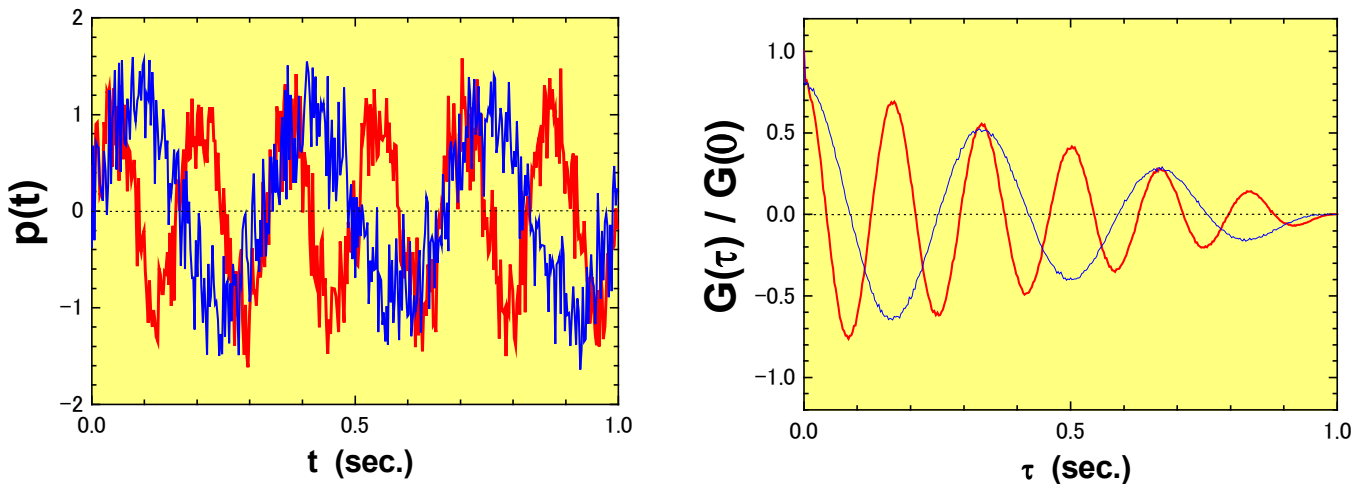


図 2・10 周期と自己相関関数

次に、波の周期とその自己相関関数の関係を求める (図 2・10)。信号の周期が小さいとそれを反映して、自己相関関数の振動の周期も小さくなる。自己相関関数を求めることによって、信号のノイズの度合いと周波数特性が明らかになる。つまり、信号が何らかの周期性を持っている場合は、必ず、自己相関関数も周期性を示す。

これまでの、信号が $p(t)=0$ を中心とした波形で平均すると 0 になる場合であった。今度は、実際に解析す

る波形の自己相関関数がどのようなになるか計算してみる。

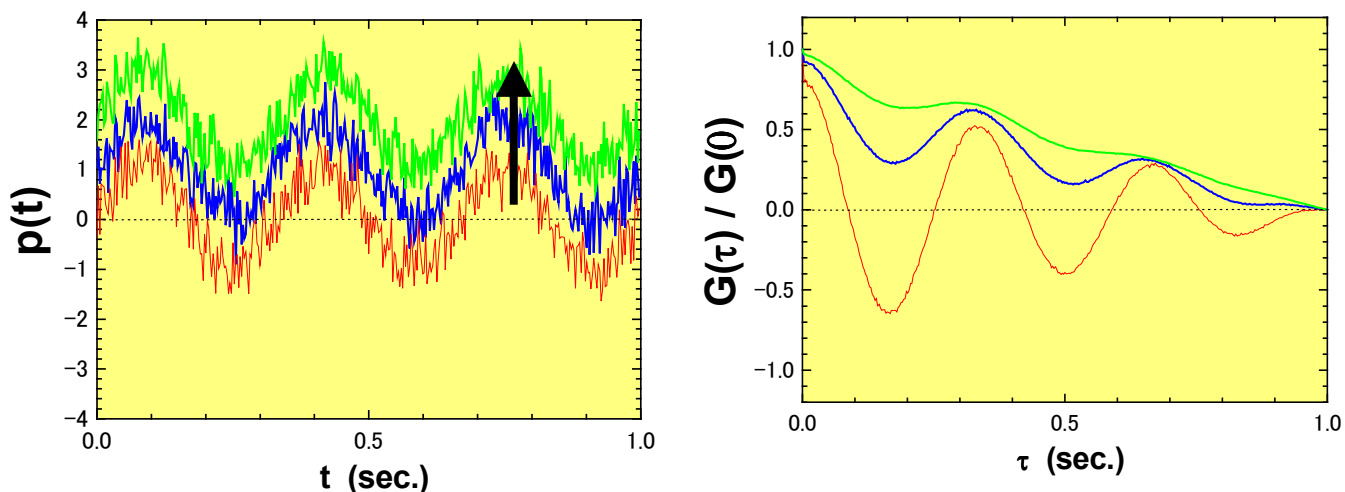


図 2・11 バックグラウンドと自己相関関数

波形のバックグラウンドを大きくしていくと、自己相関関数の傾きが現れる。これは、図 2・6 のパルス波形の自己相関関数が傾きをもつことと関係がある。バックグラウンドを一定関数 $p_{pulse}(t)$ とし、その自己相関関数を $G_{pulse}(\tau)$ と定義する。同様に、信号である周期関数 ($p_{sin}(t)$) の自己相関関数を $G_{sin}(\tau)$ とする。一般的なデータは、 $p_{sin}(t) + p_{pulse}(t)$ の信号である。これらの重ね合わせの自己相関関数は、 $G_{sin}(\tau) \times G_{pulse}(\tau)$ となる。つまり、バックグラウンドの増大分だけ自己相関関数が τ の増大に伴って振動しながら減少する。

実際の解析で周期関数成分だけを抽出したい場合は、自己相関関数を求める前にあらかじめバックグラウンドを引かなければならない。もしくは、生データの自己相関関数を求めて、バックグラウンドに起因する一次関数 $G_{pulse}(\tau)$ で割る。そのあと規格化すれば、周期関数に起因する規格化した『正規化された自己相関関数』 $G(\tau) / G(0)$ を求めることができる (図 2・12)。

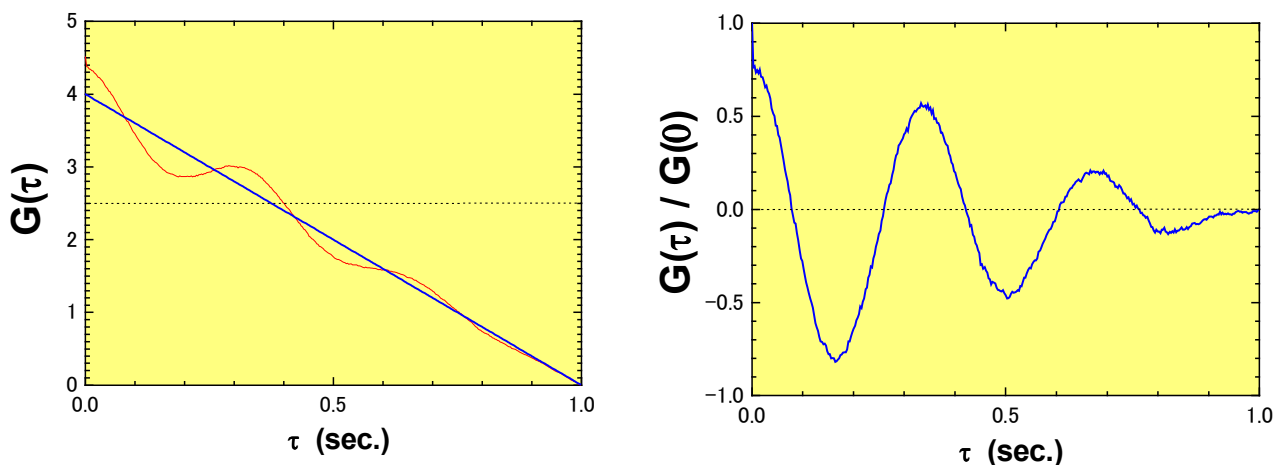


図 2・12 生データの自己相関関数とその補正