

誘電緩和

1. はじめに

身の回りには、いろいろな材料があり、多様な特性・機能を持っている。新しい材料開発、材料の多機能化や機能向上のためには材料の性質（物性）を知る必要がある。一番有効な方法は、外場に対してどのような応答をするかを調べることである。例えば、外から材料に電圧をかけて、材料に流れる電流を調べることによって、大雑把にマクロな電氣的な性質の「導体」、「半導体」、「絶縁体」がわかる。



この関係を書くと

$$\text{応答} = \text{物性} \times \text{作用}$$

$$\text{電流} = (\text{電気伝導度}) \times (\text{電場})$$

$$\vec{J} = \sigma \times \vec{E}$$

となる。つまり、 $\Delta J = \sigma \Delta E$ の関係から、金属は σ が大きいので少しで電圧を大きくすると電流は大きく増大することがわかる。他の例を挙げてみると、

磁化	=	(帯磁率)	×	(磁場)
電気変位	=	(誘電率)	×	(電場)
電気分極	=	(圧電定数)	×	(応力)
歪み	=	(圧電定数)	×	(電場)
歪み	=	(コンプライアンス)	×	(応力)
歪み	=	(熱膨張率)	×	(温度)
熱量	=	(比熱)	×	(温度)

2. 電磁気学の基礎

§ 2-1 平面上に一様分布した電荷

まず、無限に広い平面を考える。面密度 σ の電荷が一様に分布している。右図のような断面積が A の円柱では、円柱内の電荷は σA となる。

電場に関するガウスの法則は、全電束 ψ とすると、

$$\psi = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i \quad (2 \cdot 1)$$

となる。ゆえに、右図の場合、

$$\epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\epsilon_0 EA \quad (2 \cdot 2)$$

が求まり、これが電荷 σA に等しくなるから、 $2\epsilon_0 EA = \sigma A$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2 \cdot 3)$$

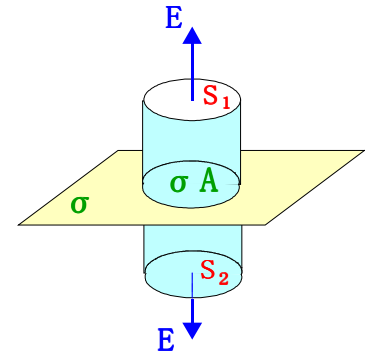


図 2・1

§ 2-2 平行板コンデンサー (真空中)

面積 S の平行板コンデンサーを考える。各極板にそれぞれ $+Q$ および $-Q$ の電荷を与えると、その電荷密度 σ は $\pm Q/S$ となる。但し、電極の端付近における電場の乱れは無視する。

電極間の電場は①の結果を考慮すると、

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad (2 \cdot 4)$$

となるので、両電極間の電位差 V は、

$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \quad (2 \cdot 5)$$

である。すなわち、平行板コンデンサーの電気容量 C_0 は、

$$C_0 = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (2 \cdot 6)$$

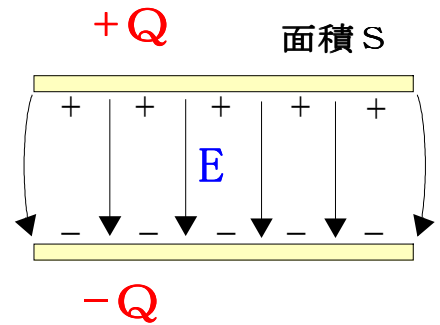


図 2・2

§ 2-3 誘電分極

誘電体を電場の中に置くと両端に電荷が現れる。このことを誘電分極という。誘電分極がおきる原因に、電子分極・イオン分極・配向分極・空間電荷分極が挙げられる。

① 電子分極

電場を印加すると電子雲が原子核に対してわずかに変位 ℓ する。

その結果、正電荷 $(+q)$ と負電荷 $(-q)$ の重心がずれて、 $q\vec{\ell}$ の双極子モーメント \vec{p} をもつ。(電気双極子モーメント: $-q$ から $+q$ へ向かうベクトル量で大きさが $q\ell$)

$$\vec{p} = q\vec{\ell} \quad (2 \cdot 7)$$

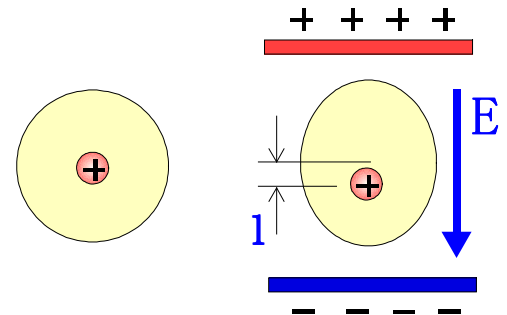


図 2・3

②イオン分極

NaClなどのイオン結晶は、正イオン・負イオンが規則的に配列している。電場を加えると、正イオンと負イオンはそれぞれ反対方向に変位し、双極子モーメントをもつようになる。

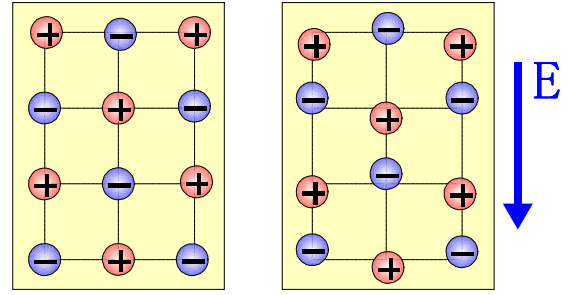


図 2・4

③配向分極

水(H₂O)などの分子は、もともと分子内の電荷が偏っているため正電荷と負電荷の重心が一致しない。その結果、永久双極子モーメントを生じる。永久双極子モーメントをもつ分子は極性分子と呼ばれ、アンモニア(NH₃)、塩化水素(HCl)などが挙げられる。

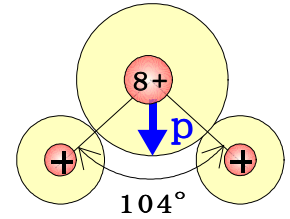


図 2・5

④空間電荷分極

不均一な誘電体では、欠陥・結晶粒界など局在した空間電荷が生じる場合がある。この局所的に束縛された空間電荷によって分極が起きる。

§ 2-4 電束密度

電荷密度 ρ ($=Q/V$) とする (V は体積) と、単位体積当たりの双極子モーメントを $\vec{P}(\mathbf{r})$ とする。

$$\vec{P}(\mathbf{r}) = \rho \vec{\ell} \quad [\text{C/m}^2] \quad (2 \cdot 8)$$

と表せる。 \vec{P} を電気分極 (単に分極) と呼ぶ。また、分極表面電荷密度を σ_p とすると、微小面積 dS を通って表面に現れる分極電荷 dQ_p は、

$$dQ_p = \sigma_p dS = \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (2 \cdot 9)$$

閉曲面 S を通して出て行く全電荷 Q_p は、(2・9) 式から

$$Q_p = \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (2 \cdot 10)$$

一方、閉曲面 S 内の体積を V 、分極体積密度 ρ_p とする。電荷の保存則から、閉曲面 S から外へ $+Q$ 分の分極が出て行くので、閉曲面 S 内では $-Q$ の電荷がなければならない。これを式に表すと、

$$-Q_p = \int_V \rho_p dv \quad (2 \cdot 11)$$

$$\int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \int_V \rho_p dv \quad (2 \cdot 12)$$

真電荷密度 ρ による電場 \vec{E}_0 と分極電荷密度 ρ_p に誘起される誘導電場 \vec{E}_p の重ね合わせが、誘電体が存在する場合の電場 \vec{E} となる (図 2・7)。

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \quad (2 \cdot 13)$$

$\rho + \rho_p = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$ が成り立つから、ガウスの定理から、

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho + \rho_p) dv \quad (2 \cdot 14)$$

(2・12) 式と (2・14) 式から、

$$\int_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dv \quad (2 \cdot 15)$$

となるので、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2 \cdot 16)$$

を導入する。D を電束密度 (電気変位) と名づける。また、電場があまり大きくなければ、分極 \mathbf{P} は電場 \mathbf{E} に比例する。電気感受率 χ_e を導入すると、

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi_{er} \mathbf{E} \quad (2 \cdot 17)$$

になり、これを (2・16) 式に代入すると、

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_{er}) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2 \cdot 18)$$

$$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0 \quad (2 \cdot 19)$$

となる。 ϵ は誘電体の誘電率、 ϵ_r は比誘電率である。

§ 2-5 誘電体につまったコンデンサー

電場を印加すると、分極が生じる。内部では電荷を打ち消しあうので、表面だけ電荷が現れる (図 2-6)。

誘電体につまった平行板コンデンサーは、真空のコンデンサーと分極した物質の重ね合わせと考える。この考えは (2・13) 式の $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_P$ と同じである。図から \mathbf{E}_P は \mathbf{E} と逆向きだから (図 2・7)、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{P} / \epsilon_0 \quad (2 \cdot 20)$$

となる。誘電体がつまっている時の電位差 V_p は、

$$V_p = \left(E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} \right) d \quad (2 \cdot 21)$$

となり、真空コンデンサーよりも電位差が小さくなる。電気容量 C は電位差に反比例するから、(2・20) 式と (2・21) 式を用いて、

$$\frac{C}{C_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E_0 - P/\epsilon_0} = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E}$$

が求められる。(2・17) 式を使うと、

$$1 + \frac{P}{\epsilon_0 E} = 1 + \chi_{er} = \epsilon_r$$

となり、結局、

$$C / C_0 = \epsilon_r \quad (2 \cdot 22)$$

が導かれる。

分極した物質の電気容量 C は、(2・4) 式から、

$$E_p = \frac{Q_p}{\epsilon S}、\text{さらに、} V_p = E_p d = \frac{Q_p d}{\epsilon S} \text{ となり、}$$

$$C = \frac{Q_p}{V_p} = \epsilon \frac{S}{d} \quad (2 \cdot 23)$$

(2・6) 式と (2・23) 式から、 $C / C_0 = \epsilon_r$ となり、(2・22) 式と矛盾しない。

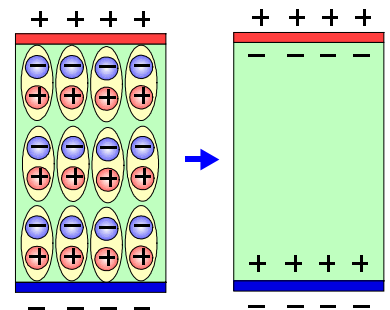


図 2・6

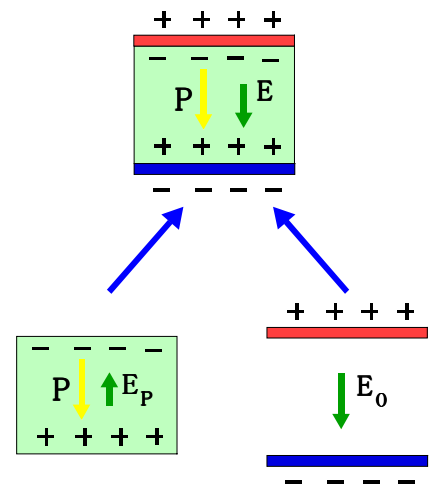


図 2・7

3. 誘電率の周波数特性

一般に誘電体の誘電率は周波数、温度によって変化する。従ってこれらの誘電的定数の周波数依存性を誘電体の誘電特性と呼んでいる。前節では電場一定の条件（直流電場）であったが、ここでは振動電場（交流電場）の下での配向分極の時間変化について考えてみる。

§3-1 誘電緩和

誘電体に交流電場 $E = E_0 e^{j\omega t}$ が作用するとき、一般に電気変位 D は電場に対して位相の遅れを示す。これは誘電率が複素数であることに相当する。そこでこの複素誘電率 ϵ^* を

$$\epsilon^* = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (3 \cdot 1)$$

とする。双極子モーメントの空間平均 $\langle p \rangle$ は、電場を切ってもすぐに 0 にならない（図 3・1）。双極子モーメントがランダムな配向に戻るまでに時間がかかる。この時間を緩和時間 τ という。直流電圧では、

$$\langle p \rangle = \epsilon E$$

なので、運動方程式は、

$$\frac{d\langle \vec{p} \rangle}{dt} = -\frac{\langle \vec{p} \rangle}{\tau} + \frac{\epsilon \vec{E}}{\tau} \quad (3 \cdot 2)$$

交流電圧として $E = E_0 e^{j\omega t}$, $\langle p \rangle = \langle p \rangle_0 e^{j\omega t}$, $\epsilon = \epsilon_i(t=0)$ を代入すると、

$$\langle \vec{p} \rangle_0 = \frac{\epsilon_i}{1 + j\omega\tau} E_0 = \epsilon(\omega) E_0 \quad (3 \cdot 3)$$

となる。ただし、

$$\epsilon(\omega) = \frac{\epsilon_i}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \epsilon_i \quad (3 \cdot 4)$$

とおく。実部と虚部に分けると、

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \text{ より、}$$

$$\epsilon' = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \epsilon_i \quad (3 \cdot 5)$$

$$\epsilon'' = \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \epsilon_i \quad (3 \cdot 6)$$

緩和時間が 1 つの場合、デバイ型単一緩和という（図 3.2）。

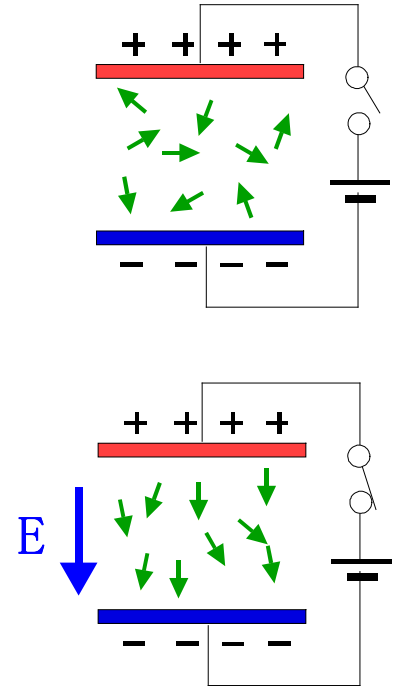


図 3・1

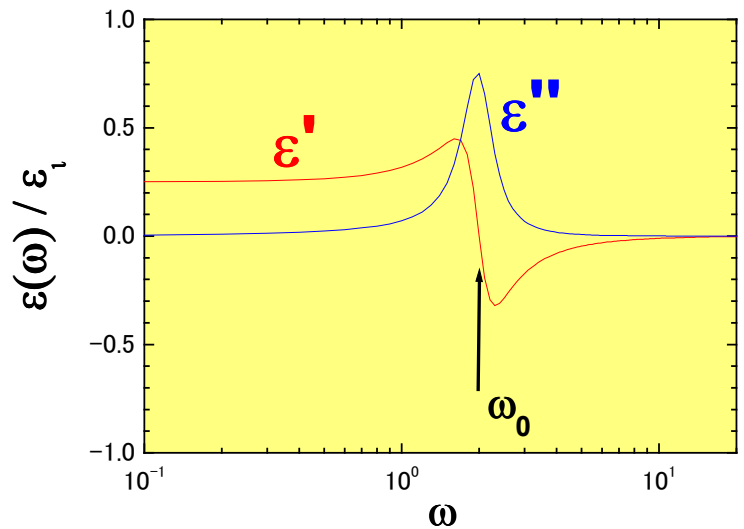


図 3・2

§ 3-2 電子共鳴

電子分極の場合、交流電場の下で電子がイオンを中心に調和振動しているとする。電子の質量 m として古典的な運動方程式は、 $Q = -e$ とすると、

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - eE \quad (3 \cdot 7)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \frac{eE}{m} \quad (3 \cdot 8)$$

$E = E_0 e^{j\omega t}$, $x = x_0 e^{j\omega t}$, $p = -ex$ を代入すると、

$$x_0 = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0$$

$$p = -ex_0 = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \quad (3 \cdot 9)$$

$\omega = \omega_0$ のとき、(3・9) 式が発散するので、減衰項を加える。

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \frac{eE}{m} - \frac{\dot{x}}{\tau} \quad (3 \cdot 10)$$

$p = \varepsilon(\omega)E_0$ とすると、

$$\varepsilon(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} \quad (3 \cdot 11)$$

となる。実部と虚部分けると、

$$\varepsilon' = \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \quad (3 \cdot 12)$$

$$\varepsilon'' = \frac{e^2}{m} \frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \quad (3 \cdot 13)$$

と求められる。

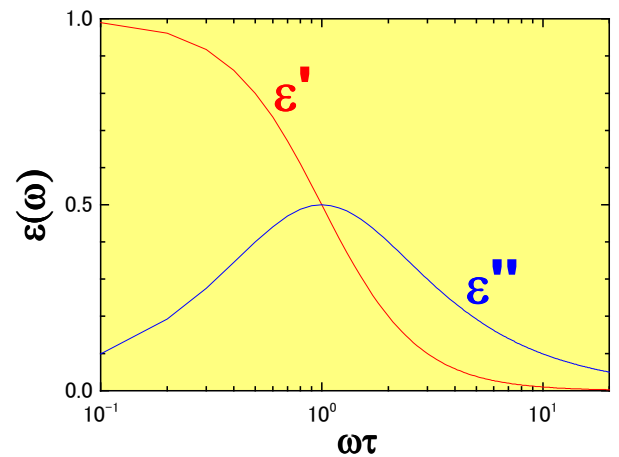


図 3・3

4. 導電率の周波数特性

§4-1 コンダクタンス

誘電物質が電気伝導性場合、電圧 V に比例して電流が流れる。電気伝導性という性質による電流を I_G とする。

$$I_G = GV \quad (4 \cdot 1)$$

と表される。この比例定数 G をコンダクタンスという。

$$G = 1/R = \frac{I_G(\text{単位時間当たりの放電電気量})}{V} \quad (4 \cdot 2)$$

G の単位は S (ジーメンズ) で $S=1/\Omega$ である。

平行板コンデンサーでは、 G は面積に比例して、電極間距離 d に反比例するから、

$$G = \kappa \frac{S}{d} \quad (4 \cdot 3)$$

この比例係数 κ は導電率である。(2・18) 式、(2・22) 式、(2・23) 式から、

$$\kappa = G \frac{d}{S} = G \frac{\epsilon}{C} = G \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{C} = G \frac{\epsilon_0}{C_0} \quad (4 \cdot 4)$$

が求まる。

交流電場での導電性機構を考察するために充電電荷と導電性電荷を区別する。図 4・1 の右側に見られるように、丸印の電荷は分極する充電電荷で分極 P を生じ、放電しない。一方、図 4・1 の左側のような三角印の電荷は導電性電荷で電極まで移動して放電する。この関係を電気回路にならって図のように書き直すことができる。並列等価 C - G 回路という。

⊕ ⊖ . . . 充電電荷

⊕ ⊖ . . . 導電性電荷

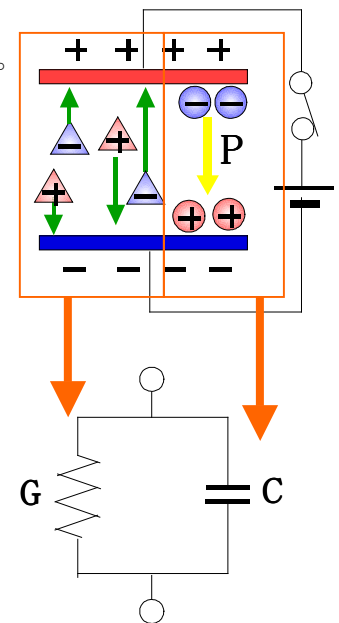


図 4・1

§4-2 交流電圧・交流電流での複素量表現

$V=V_0 e^{j\omega t}$ の交流電圧のとき、誘電現象は $Q = CV$ 、導電現象は $I_G = GV$ と書き表せる。また、交流電場では、充電電荷が $+Q \rightarrow -Q \rightarrow +Q \rightarrow$ と電荷が変化するのでコンデンサーに電流（充電電荷の時間変化） I_C が観測される（図 4.2）。結局、

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = Cj\omega V \quad (4 \cdot 5)$$

$$I_G = GV \quad (4 \cdot 6)$$

となる。全電流 I は、

$$I = GV + j\omega CV = (G + j\omega C)V = G^* V \quad (4 \cdot 7)$$

となり、複素コンダクタンス G^* が定義される。

$$G^* \equiv G + jG'' \quad (4 \cdot 8)$$

$$G'' = \omega C \quad (4 \cdot 9)$$

次に、誘電現象と導電現象を一緒に考えて、全電流に対する拡張された複素電気容量 C^* を定義する。

$$Q = C^* V \quad (4 \cdot 10)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = j\omega C^* V \quad (4 \cdot 11)$$

(4・7) 式と (4・11) 式を比べると、

$$G^* V = j\omega C^* V$$

となる。

$$C^* V = \frac{G^* V}{j\omega} = CV - j \frac{G}{\omega} V \equiv (C - jC'')V \quad (4 \cdot 12)$$

$$C'' = G / \omega \quad (4 \cdot 13)$$

C'' を誘電損失と呼ぶ。

(2・23) 式と (4・3) 式を (4・12) 式に代入すると、

$$C^* = C - j \frac{G}{\omega} = \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} \right) \frac{S}{d} \equiv \epsilon_0 \epsilon_r^* \frac{S}{d} = \epsilon_r^* C_0 \quad (4 \cdot 15)$$

同様に (4・7) 式に代入すると、

$$G^* = G + j\omega C = (\kappa + j\omega \epsilon_0 \epsilon_r) \frac{S}{d} \equiv \kappa^* \frac{S}{d} \quad (4 \cdot 16)$$

$$\epsilon_r^* \equiv \epsilon_r - j \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} \equiv \epsilon' - j\epsilon''$$

$$\kappa^* \equiv \kappa + j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \equiv \kappa' + j\kappa''$$

また、(4・7) 式と (4・11) 式から、 $G^* = j\omega C^*$ となり、これに (4・15) 式と (4・16) 式を代入すると、

$$\kappa^* = j\omega \epsilon_0 \epsilon_r^* \quad (4 \cdot 17)$$

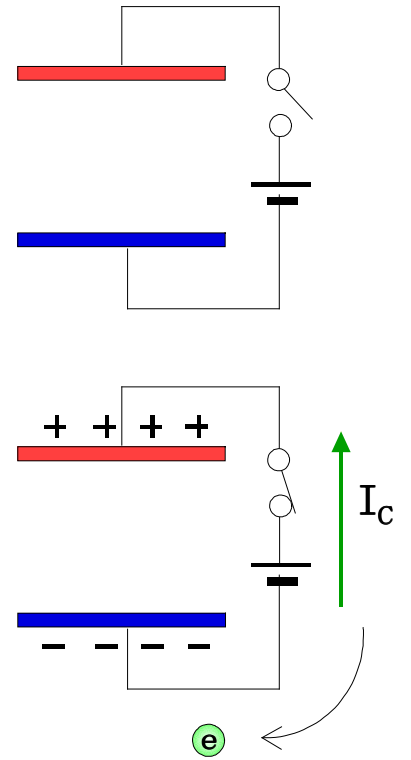


図 4・2

(4・15) 式から、

$$C^* = C - jC'' = C_0(\epsilon_r' - j\epsilon_r'') \quad (4 \cdot 18)$$

となり、複素平面で表すと図4・3のようになる。図から、

$$\tan \delta = \frac{C''}{C'} = \frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'} \quad (4 \cdot 19)$$

が求まる。 $\tan \delta$ を損失正接、 δ を損失角という。(2・22) 式、(4・13) 式と

(4・19) 式から、

$$\epsilon_r'' = \epsilon_r' \frac{C''}{C'} = \frac{G}{\omega C_0} \quad (4 \cdot 20)$$

となる。

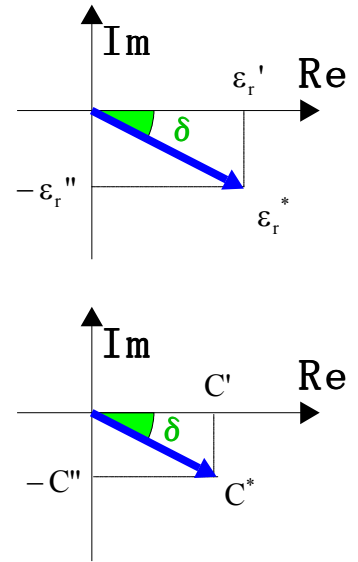


図4・3

まとめ

$$G'' = \omega C$$

$$C'' = \frac{G}{\omega}$$

$$\epsilon_r^* \equiv \epsilon_r' - j\epsilon_r'' \equiv \epsilon_r' - j \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}$$

$$\kappa^* \equiv \kappa' + j\kappa'' \equiv \kappa' + j\omega \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\epsilon_r' = \frac{C}{C_0}$$

$$\epsilon_r'' = \frac{G}{\omega C_0}$$

5 測定データの解析

§5-1 単一緩和則

一般に、測定データは図5・1のようになる。

$C = \varepsilon_r' C_0$ と (3・5) 式から、

$$C = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \varepsilon_i C_0$$

となるが、 $\omega \rightarrow \infty$ のとき、 $C \rightarrow C_H$ となるので、

$$C = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \varepsilon_i C_0 + C_H \quad (5 \cdot 1)$$

と書き換えられる。また、 $\omega \rightarrow 0$ のとき、 $C \rightarrow C_L$ なので、

$$\varepsilon_i C_0 = C_L - C_H \quad (5 \cdot 2)$$

となる。 C が半分になる ω を ω_0 とすると、

$$\omega_0 \tau = 1 \quad (5 \cdot 3)$$

(5・2) 式と (5・3) 式を (5・1) 式に代入す

ると、

$$C = \frac{C_L - C_H}{1 + (\omega/\omega_0)^2} + C_H \quad (5 \cdot 4)$$

同様に、 $G = \omega \varepsilon_r'' C_0$ と (3・6) 式から、 $\omega \rightarrow 0$ のとき、 $G \rightarrow G_L$ を考慮して、

$$G = G_L + \omega \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \varepsilon_i C_0 = G_L + \frac{1}{\tau} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \varepsilon_i C_0 = G_L + \omega_0 \frac{(\omega/\omega_0)^2}{1 + (\omega/\omega_0)^2} \varepsilon_i C_0$$

が求まる。 $\omega = \omega_0$ のとき、 $G = (G_L + G_H)/2$ なので、

$$\omega_0 \varepsilon_i C_0 = G_H - G_L \quad (5 \cdot 5)$$

となり、結局、

$$G = G_L + \frac{(G_H - G_L)(\omega/\omega_0)^2}{1 + (\omega/\omega_0)^2} \quad (5 \cdot 6)$$

(5・2) 式と (5・5) 式から、

$$\omega_0 = \frac{G_H - G_L}{C_L - C_H} \quad (5 \cdot 7)$$

$x = \omega / \omega_0$ として (5・4) 式は、

$$C - C_H = \frac{C_L - C_H}{1 + x^2}$$

となり、(5・6) 式は、(5・7) 式の関係を使って、

$$\Delta C'' = \frac{\Delta G}{\omega} = \frac{G - G_L}{\omega} = \frac{(G_H - G_L)x^2}{\omega(1 + x^2)} = \frac{(G_H - G_L)(\omega/\omega_0)x}{\omega(1 + x^2)} = \frac{(C_L - C_H)x}{1 + x^2}$$

となる。これらの2式から x を消去すると、

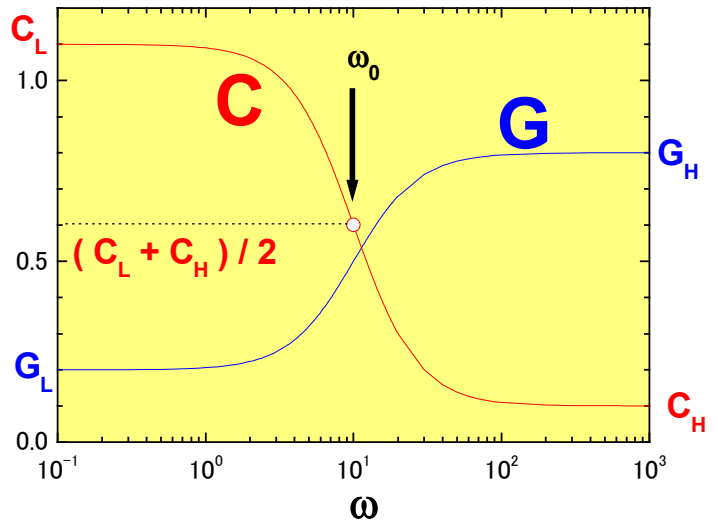


図5・1

$$\left(C - \frac{C_L + C_H}{2}\right)^2 + (\Delta C'')^2 = \left(\frac{C_L - C_H}{2}\right)^2 \quad (5 \cdot 8)$$

となる。横軸 C 、縦軸 $\Delta C''$ の図を書くと半円になる。デバイの半円型則という (図 5・2)。

また、(5・4) 式と (5・6) 式から x を消去すると、

$$C - C_H = (C_L - C_H) \frac{1}{1+x^2}$$

$$G - G_L = \frac{(G_H - G_L)x^2}{1+x^2} = (G_H - G_L) \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\frac{G - G_L}{G_H - G_L} = 1 - \frac{C - C_H}{C_L - C_H}$$

$$G - G_L = G_H - G_L - \frac{G_H - G_L}{C_L - C_H} C - C_H$$

$$G - G_L = G_H - G_L - \omega_0 (C - C_H)$$

$$G = -\omega_0 C + G_H + \omega_0 C_H \quad (5 \cdot 9)$$

C - G 平面で勾配が $-\omega_0$ の勾配の直線になる (図 5・3)。この図は (5・7) 式そのものである。

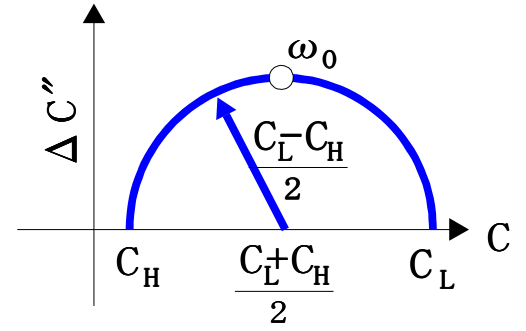


図 5・2

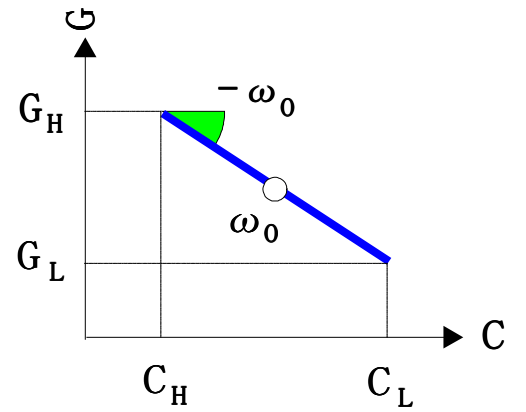


図 5・3

§5-2 円弧型則 (Cole-Cole プロット)

実際にきれいな半円にならない場合が多い。図 5・4 のような円弧の場合を考える。V ベクトルは U ベクトルより θ 進んでいるので、

$$\frac{\vec{V}}{V} = \frac{\vec{U}}{U} e^{j\theta} \quad (5 \cdot 10)$$

と書ける。

$$C_H + \vec{U} = C^* + j \frac{G_L}{\omega} \quad (5 \cdot 11)$$

$$C_L = \left(C^* + j \frac{G_L}{\omega}\right) + \vec{V} \quad (5 \cdot 12)$$

$\theta = \beta \pi/2$ とすると、 $e^{j\theta} = e^{j\beta\pi/2} = (e^{j\pi/2})^\beta = j^\beta = \cos\theta + j\sin\theta$ となる。

$$C_L - \left(C^* + j \frac{G_L}{\omega}\right) = \frac{V}{U} \vec{U} j^\beta = \left(C^* + j \frac{G_L}{\omega} - C_H\right) \frac{V}{U} j^\beta$$

まず、 $z = \frac{V}{U} j^\beta$ とおく。図 5・4 から $V=U$ のとき、 $\omega = \omega_0$ となる。

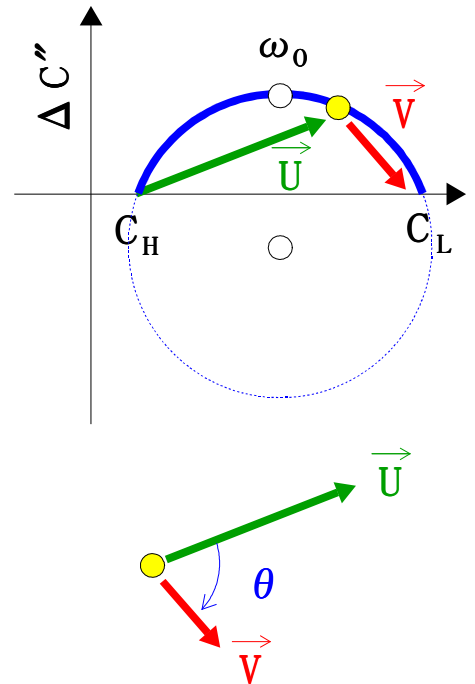


図 5・4

また、 V/U は単調増加関数なので、 $\log(V/U)$ が $\log f$ に対して直線にならなければならない (図 5・5)。

$$z = \frac{V}{U} j^\beta = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^\beta j^\beta \quad (5 \cdot 13)$$

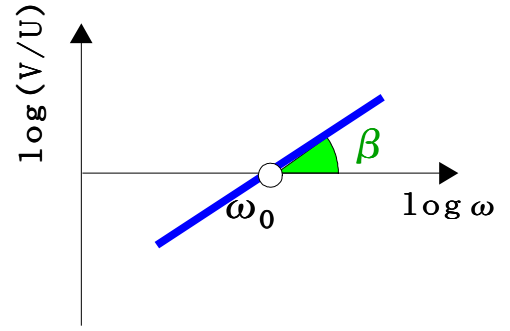


図 5・5

$C_L - \left(C^* + j \frac{G_L}{\omega} \right) = \left(C^* + j \frac{G_L}{\omega} - C_H \right) \frac{V}{U} j^\beta$ に z を代入すると、

$$C_L + zC_H - j(1+z) \frac{G_L}{\omega} = (1+z)C^*$$

$$C^* = \frac{C_L}{1+z} + \frac{zC_H}{1+z} - j \frac{G_L}{\omega} = \frac{C_L}{1+z} + \left(1 - \frac{1}{1+z} \right) C_H - j \frac{G_L}{\omega} = C_H + \frac{C_L - C_H}{1+z} - j \frac{G_L}{\omega}$$

$$C^* = C_H + \frac{C_L - C_H}{1 + (\omega/\omega_0)^\beta (\cos \theta + j \sin \theta)} - j \frac{G_L}{\omega} = C_H + \frac{C_L - C_H}{\{1 + (\omega/\omega_0)^\beta \cos \theta\} + j(\omega/\omega_0)^\beta \sin \theta} - j \frac{G_L}{\omega}$$

$$C^* = C_H + \frac{(C_L - C_H) \left[\{1 + (\omega/\omega_0)^\beta \cos \theta\} - j(\omega/\omega_0)^\beta \sin \theta \right]}{\{1 + (\omega/\omega_0)^\beta \cos \theta\}^2 + \{(\omega/\omega_0)^\beta \sin \theta\}^2} - j \frac{G_L}{\omega} \quad (5 \cdot 14)$$

ここで、実部と虚部に分けると、

$$C = C_H + \frac{(C_L - C_H) \left\{ 1 + (\omega/\omega_0)^\beta \cos \left(\frac{\pi}{2} \beta \right) \right\}}{1 + 2(\omega/\omega_0)^\beta \cos \left(\frac{\pi}{2} \beta \right) + (\omega/\omega_0)^{2\beta}} \quad (5 \cdot 15)$$

$$G = G_L + \frac{\omega(C_L - C_H)(\omega/\omega_0)^\beta \sin \left(\frac{\pi}{2} \beta \right)}{1 + 2(\omega/\omega_0)^\beta \cos \left(\frac{\pi}{2} \beta \right) + (\omega/\omega_0)^{2\beta}} \quad (5 \cdot 16)$$

C - $\Delta C''$ 平面で円弧則型となる。特に、(5・14) 式を Cole-Cole の円弧則式という。また、 $\beta=1$ のとき、デバイ型単一緩和になっている (図 5・6、図 5・7)。

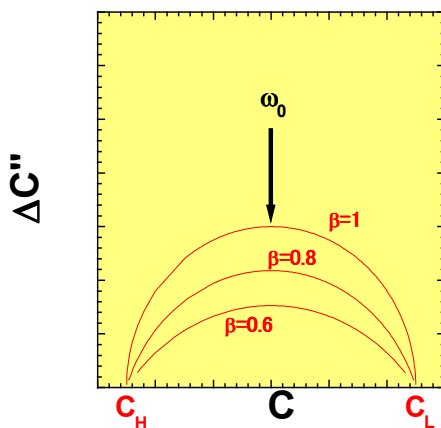


図 5・6

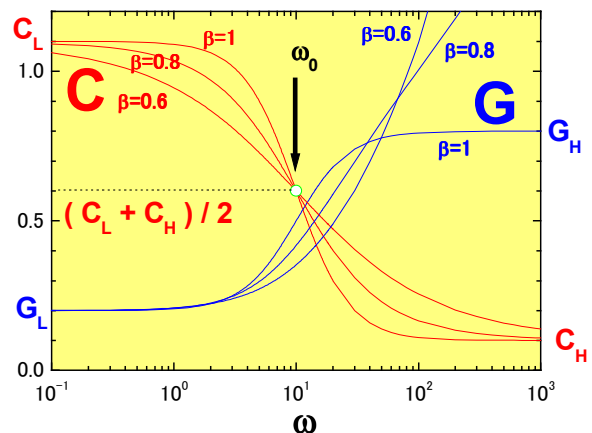


図 5・7

§ 5-3 ゆがみ円弧型則

C-ΔC'' 平面で図 5・8 のようにゆがんだ円弧になっている実測例がある。前節の

$C^* = C_H + \frac{C_L - C_H}{1 + (j\omega/\omega_0)^\beta} - j\frac{G_L}{\omega}$ を以下のように変形する。

$$C^* = C_H + \frac{C_L - C_H}{(1 + j\omega/\omega_0)^\beta} - j\frac{G_L}{\omega} \quad (5 \cdot 17)$$

$$C^* = C_H + \frac{(C_L - C_H)(1 - j\omega/\omega_0)^\beta}{\{1 + (\omega/\omega_0)^2\}^\beta} - j\frac{G_L}{\omega} \quad (5 \cdot 18)$$

$1 - j\omega/\omega_0$ なので、 $\tan \phi = \frac{\omega}{\omega_0}$ とすると、

$$1 - j\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - j \tan \phi = \sqrt{1 + \tan^2 \phi} \cdot e^{-j\phi} = \frac{e^{-j\phi}}{\cos \phi}$$

の関係が求められる。これを (5・18) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} C^* &= C_H + \frac{(C_L - C_H)e^{j\phi\beta} / \cos^\beta \phi}{\{1 + \tan^2 \phi\}^\beta} - j\frac{G_L}{\omega} \\ &= C_H + \frac{(C_L - C_H)\{\cos(\phi\beta) - j\sin(\phi\beta)\} / \cos^\beta \phi}{1 / \cos^{2\beta} \phi} - j\frac{G_L}{\omega} \\ &= C_H + (C_L - C_H)\{\cos(\phi\beta) - j\sin(\phi\beta)\}\cos^\beta \phi - j\frac{G_L}{\omega} \end{aligned} \quad (5 \cdot 19)$$

実部と虚部に分けると、

$$C - C_H = (C_L - C_H)\cos(\phi\beta) \cdot \cos^\beta \phi \quad (5 \cdot 20)$$

$$C'' = (C_L - C_H)\sin(\phi\beta)\cos^\beta \phi + \frac{G_L}{\omega} \quad (5 \cdot 21)$$

$$\Delta C'' = C'' - \frac{G_L}{\omega} = (C_L - C_H)\sin(\phi\beta)\cos^\beta \phi \quad (5 \cdot 22)$$

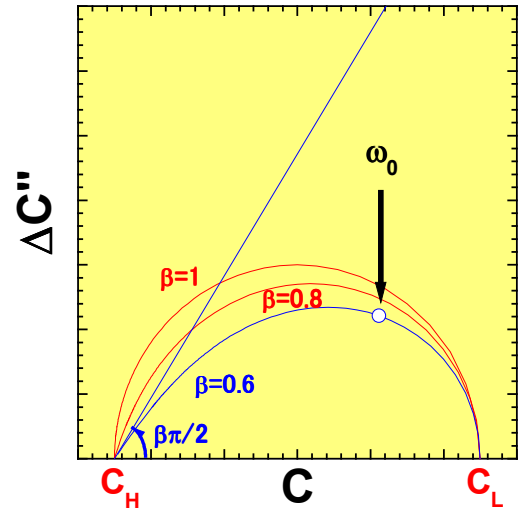


図 5・8

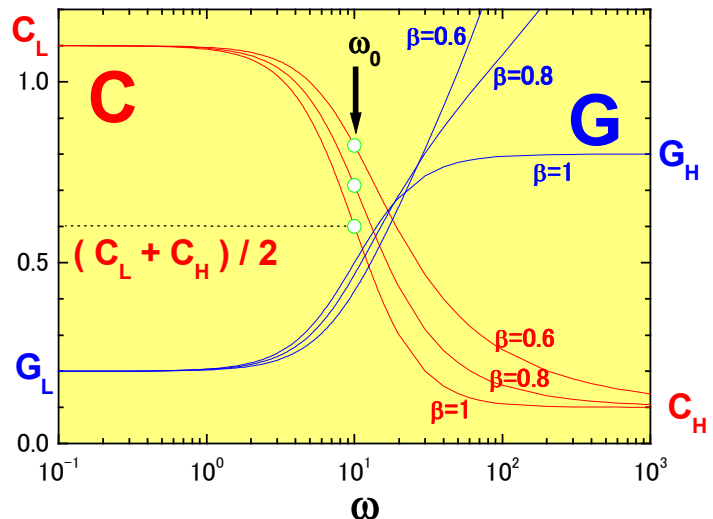


図 5・9

§ 5-4 m乗型則

付録

真空の誘電率 $\epsilon_0 = 0.08854185$ (pF / cm)

真空の比誘電率 $\epsilon_r = 1$