

# EHDのための電磁気学

機能材料工学科 阿部 洋

# 1. 電磁気学の基礎

## § 1-1 マクスウェルの応力

静電場の条件は

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (1 \cdot 1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (1 \cdot 2)$$

である。体積  $V$  で電荷密度  $\rho_e$  に働く力はクーロン力から、

$$\vec{F} = \int \rho_e \vec{E} dV \quad (1 \cdot 3)$$

と表せる。

(1・3) 式に (1・1) を代入すると、

$$\vec{F} = \epsilon_0 \int \vec{E} (\operatorname{div} \vec{E}) dV \quad (1 \cdot 4)$$

となる。ここで、 $\vec{E} (\operatorname{div} \vec{E})$  の  $x$  成分を考える。

$$\begin{aligned} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E})_x &= E_x \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) - E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (E_z E_x) - E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (1 \cdot 5)$$

式の変形で、積の微分  $\frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) = \frac{\partial}{\partial y} (E_x) \cdot E_y + E_x \cdot \frac{\partial}{\partial y} (E_y)$  を利用した。

(1・2) 式から、 $\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$  となるので、これを (1・5) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E})_x &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (E_z E_x) - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_y^2) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z E_x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_z^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z E_x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z E_x) \end{aligned} \quad (1 \cdot 6)$$

となる。ここで、 $T_x$  ベクトルを導入する。 $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$  と  $\vec{T}_x = \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \\ E_x E_y \\ E_z E_x \end{pmatrix}$  を使って、

$(\vec{E} \operatorname{div} \vec{E})_x = \vec{\nabla} \cdot \vec{T}_x = \operatorname{div} \vec{T}_x$  と表すことができる。(1・6) 式を  $\epsilon_0 (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E})_x = \operatorname{div} \vec{T}_x$  と書き換える。3次元に

拡張すると、

$$T = \epsilon_0 \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2}E^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y^2 - \frac{1}{2}E^2 & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & E_z^2 - \frac{1}{2}E^2 \end{pmatrix} \quad (1 \cdot 7)$$

となる。これはテンソル量である。

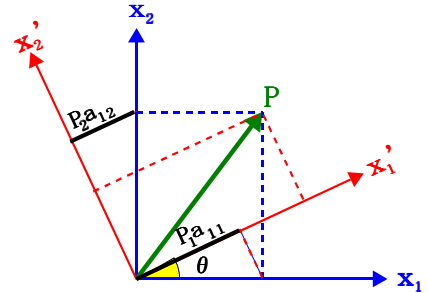
テンソルとは？

空間に固定されたベクトルを拡張したもの。AさんとBさんは異なる座標系である物理量を観測した。Aさんが観測した物理量とBさんが観測した物理量は異なるものであった。Aさんの結果とBさんの結果は同じでなければならない！そこで、テンソルは変換される量として導入された。

$T'_i = a_{ij} T_j$                       1 階のテンソル

$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$                       2 階のテンソル

$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn}$                       3 階のテンソル



座標系の変換に対して普遍であることを意味している。2階のテンソルだけは行列と同じである。

結局 (1・4) 式は、

$$\vec{F} = \int \text{div} \vec{T} dV = \int \vec{T} \cdot \vec{n} dS \quad (1 \cdot 8)$$

と変形できる。ガウスの定理を使って面積分で表すことができる。nベクトルは面に対する単位法線ベクトルである (図1・1)。(1・8) 式は真空中の場合であるが、εの誘電率のときは電束密度Dを用いて、

$$T = \begin{pmatrix} E_x D_x - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \end{pmatrix} \quad (1 \cdot 9)$$

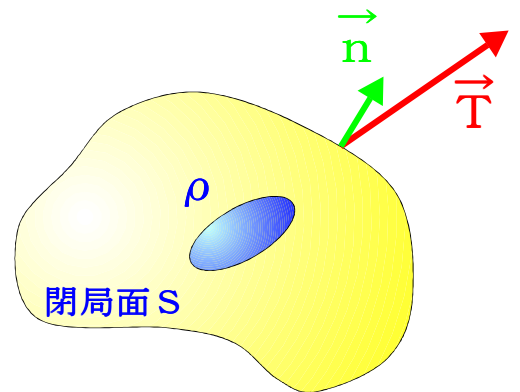


図1・1

となる ( $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ )。面にかかる応力をマクスウェルの応力 (**Maxwell stress**) (張力と圧力) と呼ぶ。最初、電荷と応力の関係がわかりにくいので戸惑うかもしれない。そこで、弾性体の応力を復習する。応力とは単位面積あたりの力である。図1・2は微小な弾性体に働く x 方向の応力 σ で、

$$\Delta F_x = \Delta \sigma_{xx} \Delta y \Delta z + \Delta \sigma_{xy} \Delta z \Delta x + \Delta \sigma_{xz} \Delta x \Delta y \quad (1 \cdot 10)$$

と表せる。  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  としたときに、(1・10) 式が

$$\Delta F_x = \left( \frac{\Delta \sigma_{xx}}{\Delta x} + \frac{\Delta \sigma_{xy}}{\Delta y} + \frac{\Delta \sigma_{xz}}{\Delta z} \right) \Delta V$$

$$F_x = \int \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dV = \int (\text{div} \sigma)_x dV$$

これを三次元に拡張すると、

$$\vec{F} = \int \text{div} \vec{\sigma} dV$$

となり、(1・8) 式と等価になる。実際に応力テンソルは、

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

と表される。つまり、(1・8) 式は電場で表される応力で、空間の電場を通して力が伝わる。電荷が周りの空間に影響を与え、その影響を受けた空間に電荷がやってくると、電荷はその空間から力を受ける。場の考え方は付録で説明する。

マクスウェルの応力を理解するために、帯電した導体の表面から出る細い電気力管を考える (図1・3)。電

場  $E$  の方向が  $x$  方向であるとする、 $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  と

表される。このとき応力と単位法線ベクトルの内積

の  $x$  成分  $(\vec{T} \cdot \vec{n}_1)_x$  は、(1・9) 式から

$$(\vec{T} \cdot \vec{n}_1)_x = \left( E_x D_x - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) n_x + E_x D_y n_y + E_x D_z n_z$$

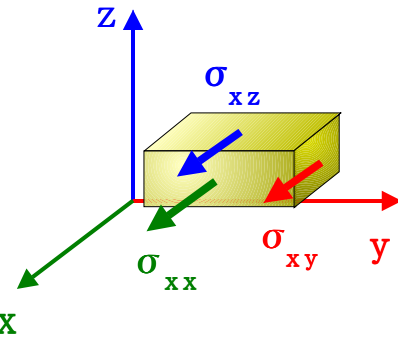


図1・2 弾性体と応力

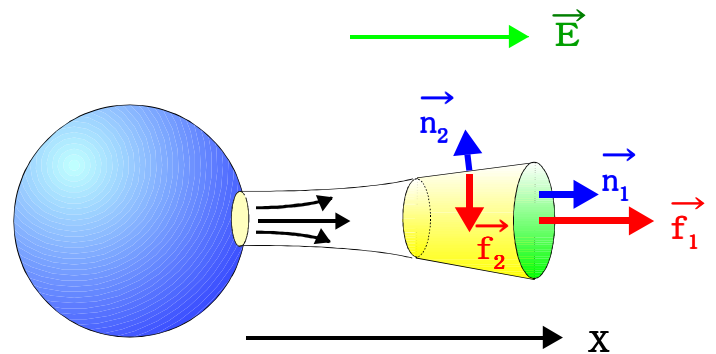


図1・3

となる。電場の方向 ( $E_y = 0, E_z = 0$ ) を考慮すると、 $E_x D_x = \vec{E} \cdot \vec{D}$  なので、

$$(\vec{T} \cdot \vec{n}_1)_x = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} n_x \tag{1・11}$$

が求まる。これは、電場方向に垂直な電気力管の断面積に働く張力  $\vec{f}_1$  である。次に電気力管の側面に働く力  $\vec{f}_2$

を考える。 $(\vec{T} \cdot \vec{n}_2)_y$  は、 $(\vec{T} \cdot \vec{n}_2)_y = E_y D_x n_x + \left( E_y D_y - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) n_y + E_y D_z n_z$  となる。電場の方向を考慮す

ると、

$$(\vec{T} \cdot \vec{n}_2)_y = -\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} n_y \tag{1・12}$$

が求まる。単位法線ベクトル  $\vec{n}_2$  と逆の方向に力が働くので圧力  $\vec{f}_2$  とみなすことができる。電気力管を弾性体としてみなすと、いたるところで電気力線に沿って張力が働く。一方、電気力線どうしはなるべく離れようとする性質があり、電気力線どうしの反発力が電気力管の側面に垂直な圧力として働くと考えられる。

### §1-2 誘電体の境界面に作用する力

まず、電場が境界面に垂直の場合を考える（図1・4）。境界面で連続なのは電束密度  $D$  である。（1・11）式から  $\epsilon_1$  の誘電体の界面に働く単位面積あたりの力  $f_1$  は、

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{2}(\vec{E}_1 \cdot \vec{D})\vec{n}_1 = \frac{1}{2\epsilon_1}|\vec{D}|^2\vec{n}_1 \quad (1 \cdot 13)$$

となる。同様に、 $\epsilon_2$  の誘電体の界面に働く単位面積あたりの力  $f_2$  は、

$$\vec{f}_2 = \frac{1}{2}(\vec{E}_2 \cdot \vec{D})\vec{n}_2 = -\frac{1}{2\epsilon_2}|\vec{D}|^2\vec{n}_2 \quad (1 \cdot 14)$$

界面には反作用が働くので、界面に働く力  $f$  は、

$$\vec{f} = (-\vec{f}_1) + (-\vec{f}_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right)|\vec{D}|^2\vec{n}_1 \quad (1 \cdot 15)$$

と求められる。

次に、電場と境界面が平行の場合を考える（図1・5）。両方の誘電体に共通なのは電場  $E$  である。電気力管の側面には圧力が働くので、単位法線ベクトルと逆方向に力が働く（図1・3の  $\vec{f}_2$ ）。 $\epsilon_1$  の誘電体の界面に働く

単位面積あたりの力  $\vec{f}_1$  は（1・12）式より、

$$\vec{f}_1 = -\frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D}_1)\vec{n}_1 = -\frac{\epsilon_1}{2}|\vec{E}|^2\vec{n}_1 \quad (1 \cdot 16)$$

となる。同様に、 $\epsilon_2$  の誘電体の界面に働く単位面積あたりの力  $\vec{f}_2$  は、

$$\vec{f}_1 = -\frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D}_2)\vec{n}_2 = +\frac{\epsilon_2}{2}|\vec{E}|^2\vec{n}_2 \quad (1 \cdot 17)$$

界面には反作用が働くので、界面に働く力  $f$  は、

$$\vec{f} = (-\vec{f}_1) + (-\vec{f}_2) = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)|\vec{E}|^2\vec{n}_1 \quad (1 \cdot 18)$$

これを誘電率が連続的に変化する場合に応用する。誘電体の薄い微小領域（板状：厚さが  $\Delta x$ ）と電場  $E$  が垂直の場合を考える（図1・6）。

（1・15）式を変形して、

$$\vec{f} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\epsilon(x+\Delta x)} - \frac{1}{\epsilon(x)}\right\}|\vec{D}|^2\vec{n}_1 = -\frac{1}{2}\frac{\epsilon(x+\Delta x) - \epsilon(x)}{\epsilon(x+\Delta x)\epsilon(x)\Delta x}|\vec{D}|^2\Delta x \cdot \vec{n}_1$$

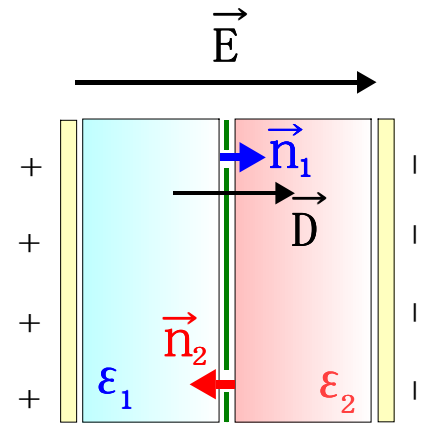


図1・4

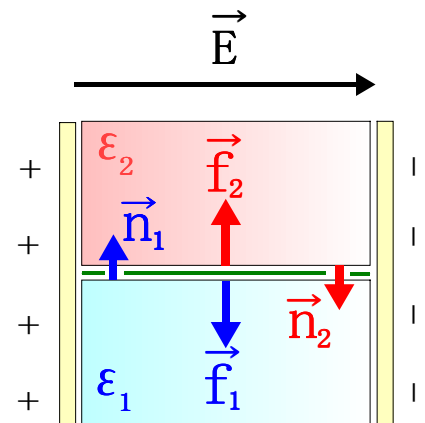


図1・5

$$= -\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{|\vec{D}|^2}{\varepsilon^2} \Delta x \cdot \vec{n}_1 = -\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dx} |\vec{E}|^2 \Delta x \cdot \vec{n}_1$$

となる。単位面積あたりの力が  $f$  なので、 $f / \Delta x$  は、単位体積当たりの力に相当する。

$$\frac{\vec{f}}{\Delta x} = -\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dx} |\vec{E}|^2 \vec{n}_1 \quad (1 \cdot 19)$$

板状の微小領域（厚さが  $\Delta x$ ）と電場  $E$  が平行の場合は、(1・18) 式を変形して、

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \{\varepsilon(x) - \varepsilon(x + \Delta x)\} |\vec{E}|^2 \vec{n}_1 = -\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dx} |\vec{E}|^2 \vec{n}_1 \cdot \Delta x \quad (1 \cdot 20)$$

となる。(1・19) 式と (1・20) 式から電場の方向に関係なく、一般に、誘電体の単位体積あたりに作用する力  $F$  は、

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} |\vec{E}|^2 \text{grad} \varepsilon \quad (1 \cdot 21)$$

となる。これは、クーロン力の項を含めて

**Korteweg-Helmholtz force density**, もしくは **dielectrophoretic force** (誘電泳動力) と呼ばれている。

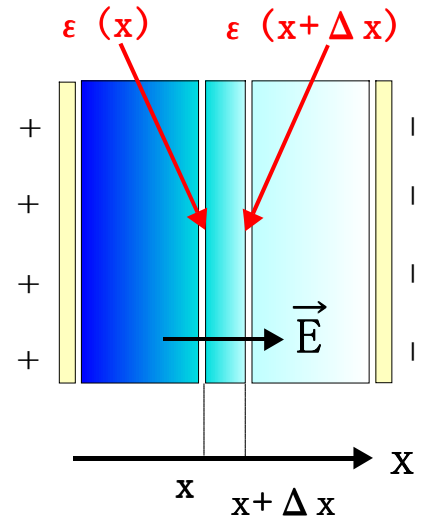


図 1・6

### § 1-3 分極と応力

ここでは、不均一電場における分極した液体中の誘電泳動力(**DEP: dielectrophoretic force**)を考察する。まずその前に、均一電場での双極子モーメントの振る舞いを考える。双極子モーメントを  $\vec{p} = q\vec{d}$  とすると、均一な電場  $E$  の中 (図 1・7) で双極子モーメントに働く偶力は、

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_+ + \frac{-\vec{d}}{2} \times \vec{F}_- = \frac{d}{2} (qE) \sin \theta + \frac{-d}{2} (-qE) \sin \theta \\ &= qdE \sin \theta = pE \sin \theta = \vec{p} \times \vec{E} \end{aligned} \quad (1 \cdot 22)$$

となる。電場が空間的に均一ならば ( $|\vec{E}| = \text{const.}$  ,

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ )、双極子モーメントは回転するだけで、移動しない。位置エネルギーを  $U$  とすると、

$$dU = -|\vec{N}|(-d\theta) = pE \sin \theta d\theta$$

と表せる。これを積分すると、 $U = -pE \cos \theta + \text{const.}$  となるので、

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1 \cdot 23)$$

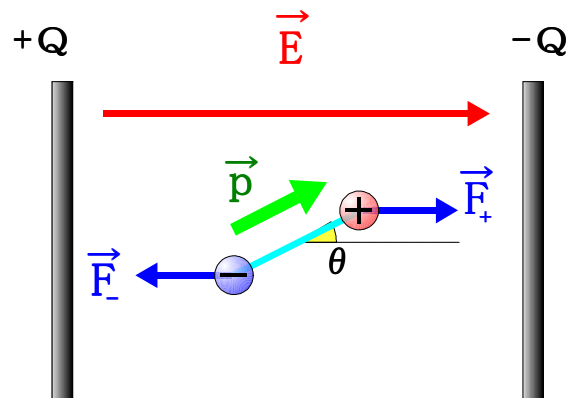


図 1・7

が求まる。また、電場が空間的に不均一ならば ( $\nabla E \neq 0$ )、 $\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\text{grad}U$  なので、 $\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \vec{p}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$

が得られる。これは、次のベクトル解析の公式と静電場の条件 ( $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ) と  $\vec{\nabla} \cdot \vec{p} = 0$  から求められる。

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

単位体積あたりの双極子モーメントを分極  $\vec{P}$  とすると、単位体積あたりの力は、

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{P} \cdot \vec{E}) \quad (1 \cdot 24)$$

となり、**Polarization force density** (分極体積力) と呼ばれる。また、分極の大きさが電場に比例する場合、

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} \quad (1 \cdot 25)$$

と書ける。ここで、 $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi)$  である。 $\chi$  は電気感受率 (electric susceptibility) である。(1・25) 式を (1・24) 式に代入して、

$$\vec{F} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{\nabla}|\vec{E}|^2 = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left[(\varepsilon - \varepsilon_0)|\vec{E}|^2\right] - \frac{1}{2}|\vec{E}|^2\vec{\nabla}(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (1 \cdot 26)$$

が求められる。ここで、 $\vec{\nabla}(\varepsilon E^2) = (\vec{\nabla}\varepsilon)E^2 + \varepsilon\vec{\nabla}(E^2)$  を利用している。(1・26) 式の第一項は電歪 (electrostrictive pressure) の勾配である。第二項は (1・21) 式の誘電泳動力である。

#### §1-4 EHD ポンプ機構

EHD (ElectroHydroDynamics) のポンプ機構は 3 つの項からなる。

$$\vec{F} = \rho_e \vec{E} - \frac{1}{2}|\vec{E}|^2\vec{\nabla}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left[(\varepsilon - \varepsilon_0)|\vec{E}|^2\right] \quad (1 \cdot 27)$$

また、密度によって誘電率が変化する場合、

$$\vec{F} = \rho_e \vec{E} - \frac{1}{2}|\vec{E}|^2\vec{\nabla}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left[\rho \frac{\partial(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\partial \rho} |\vec{E}|^2\right] \quad (1 \cdot 28)$$

と書き換えられる。

第 1 項は、**電気泳動力 (electrophoretic force)** である。電極から注入された電荷に働くクーロン力 (Coulomb force) である。これによって、イオンドラッグポンピング (Ion-drag pumping) が起きる。わずかにイオン化した分子が電氣的に中性な分子を引きずって対流が起きる。高い圧力が得れる反面、分子液体の劣化 (部分的な絶縁破壊) を引き起こし、不安定な対流になる。耐久性も悪くなる。交流電圧の場合、周波数が高くなると圧力が低下する。

第 2 項は **誘電泳動力 (DEP: dielectrophoretic force)** である。強い不均一電場、温度勾配、電極近傍の電気二重層で誘電率の空間的な勾配に起因する力である。

第 3 項は **電歪力 (electrostrictive force)** で、電場の空間的な変化や液体の温度変化による誘電率の変化が力を発生する。

第 2 項と第 3 項は液体分子の分極によって対流が発生し、ポンピング圧は低い。しかし、電荷注入が非常に小さいので液体の劣化が起こりにくい。その結果、安定した圧力を得ることができる。交流電場の周波数にほとんど依存しない。

付録 場の考え方

スカラー場とベクトル場の物理への応用を考える。代表的な拡散・熱伝導・流れを復習する。

- ① 拡散 : 物質の移動 ← 流体内の濃度差
- ② 熱伝導 : エネルギーの移動 ← 流体内の温度差
- ③ 流れ : 運動量の移動 ← 圧力差

それぞれ、以下のように対応付けられる。

	スカラー場	⇒	ベクトル場	
拡散	濃度分布		濃度勾配	拡散係数
熱伝導	温度分布		熱流	熱伝導係数
流体	圧力分布		流速	

§ A-1 拡散

ベクトル場

スカラー場

$c(x, y, z, t)$ : 濃度

とする。質量保存則から、

$$\text{div} \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \left( \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial c}{\partial t} \tag{A・1}$$

(流速の増大の割合)  $\propto$  (濃度の時間変化)

という関係が導かれる。Fick の第一法則は濃度勾配を小さくするほうに拡散するので、

$$\vec{J} = -D \vec{\nabla} c = -D \left( \frac{\partial c}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial c}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial c}{\partial z} \vec{k} \right) \tag{A・2}$$

と表せる。ここで、Dは拡散定数で、位置によらず、一定と仮定している。(A・1) 式に (A・2) 式を代入すると、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} c = D \frac{\partial c}{\partial t} \tag{A・3}$$

となる。  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  なので、  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div} \cdot \text{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  が求められる。△

をラプラシアンと呼ぶ。△φ=0をラプラス方程式と呼び、△φ=一定をポアソン方程式と呼ぶ。対流のない拡散方程式がどのような時間変化をするかを考察する。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} c = \Delta c = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) c = D \frac{\partial c}{\partial t} \tag{A・4}$$

と書き換えることができる。まず、空間的な濃度勾配が二次関数  $c(x)=ax^2$  に従うとする。図 A・1 の場合、

$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} > 0$  なので、 $\frac{\Delta c}{\Delta t}$  は正になり、時間と共に濃度が増大する。一方、図 A・2 の場合、 $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} < 0$  なので、



逆に時間と共に濃度が減少する。

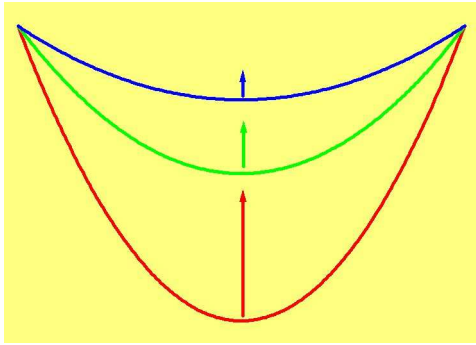


図 A・1

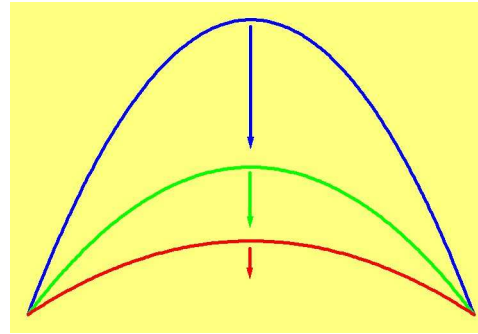


図 A・2

### § A-2 熱伝導

簡単のため、熱伝導率が等方的で温度に依存しない場合に限定する。フーリエの法則から熱流（流入する熱量）は温度勾配に比例するので、

$$\vec{h} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (\text{A} \cdot 5)$$

と表される。hは熱流で、λは熱伝導率である。単位質量の温度を 1℃上げるのに必要な熱量を比熱とすると、熱量（エネルギー）保存則から、

$$\text{div } \vec{h} = \vec{\nabla} \cdot \vec{h} = -C \frac{\partial T}{\partial t} \rho \quad (\text{A} \cdot 6)$$

が求まる。(A・5) 式を (A・6) 式に代入すると、

$$\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A} \cdot 7)$$

となる。但し、 $\kappa = \frac{\lambda}{C\rho}$  である。

### § A-3 流体の運動方程式

簡単のため非圧縮性液体で非回転運動の場合に限定する。 $\vec{v}$ を速度ベクトルとすると、流れに対する連続の式は質量保存則（流失する流体の質量∝密度の時間変化）に従うので、

$$\text{div} (\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{A} \cdot 8)$$

となる。粘性を持たない仮想的な流体（完全流体）を考えると、オイラーの運動方程式は圧力差によって流体が力を受けるので、圧力を P とすると、

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P = -\left( \frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (\text{A} \cdot 9)$$

となる。(A・9) 式を (A・8) 式に代入すると、

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (P) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{A} \cdot 10)$$

#### § A-4 電荷と電場

電荷保存則から、

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{A} \cdot 11)$$

となる。電位（スカラー場）と電場（ベクトル場）の関係は、

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = -\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (\text{A} \cdot 12)$$

となる。(A・12) 式を (A・11) 式に代入すると、

$$\Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{A} \cdot 13)$$

が求まる。

#### § A-5 ラプラス方程式とポアソン方程式

1. ラプラス方程式 ( $\Delta \phi = 0$ ) : 最も自然であり、滑らかな状態に落ち着く。
2. ポアソン方程式 ( $\Delta \phi = \text{一定}$ ) : わきだし点、吸い込み点がある現象